

## **Estudando os Sólidos de Platão com o Poly Pro a partir do Modelo de Van Hiele**

Jorge de Lima Assis  
*Universidade Estadual da Paraíba - UEPB*  
[jorgedelimaassis@gmail.com](mailto:jorgedelimaassis@gmail.com)

Adriano Alves da Silveira  
*Universidade Estadual da Paraíba - UEPB*  
[adriano.exatas@hotmail.com](mailto:adriano.exatas@hotmail.com)

### **Resumo**

A geometria é um importante campo de estudo da Matemática. No entanto, para que os alunos compreendam e raciocinem geometricamente sobre o mundo físico, é indispensável que o professor em sala de aula promova o surgimento de situações de aprendizagem que potencializem o desenvolvimento de habilidades como a visualização, o senso espacial e o pensamento geométrico. Ao falarmos em senso espacial, estamos nos referindo a uma habilidade que está relacionada com a maneira como pensamos sobre as abstrações que se desenvolvem a partir da exploração que executamos sobre as formas e sobre o espaço que nos envolve. Já o pensamento geométrico em consonância com o modelo de Van Hiele, consiste em uma rígida e bem ordenada hierarquia de cinco níveis geométricos que segue uma sequência gradual, de tal forma que o nível anterior é obrigatoriamente pré-requisito para se passar para o nível posterior, já que as ideias/conclusões desenvolvidas/obtidas no nível anterior serão relacionadas/retomadas e aprofundadas/estudadas no nível posterior. Assim, esta pesquisa tem como objetivo a elaboração de três Sequências Didáticas embasadas no estudo dos Sólidos de Platão, tomando como princípio teórico o modelo de Van Hiele e como ferramenta metodológica o uso software Poly Pro, sendo voltada para uma turma de 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública da Paraíba. Diante do fato de o estudo da Geometria ser essencial para o desenvolvimento de habilidades como a visualização, o senso espacial e o pensamento geométrico, decidimos com base no resultado obtido com a aplicação de um questionário na mencionada turma, propor esta alternativa como forma de promover a aprendizagem destes alunos com relação aos Poliedros de Platão.

### **Introdução**

A Geometria é um importante campo de estudo da Matemática. No entanto, para que os alunos compreendam e raciocinem geometricamente sobre o mundo físico, é indispensável o desenvolvimento de habilidades como a visualização, o senso espacial e o pensamento geométrico. O ensino de Geometria no Brasil passou por períodos distintos. Inicialmente, no período entre 1955 e 1965, o ensino de Geometria apresentava um caráter técnico ou mecânico, voltado para as nomenclaturas e para as fórmulas, de tal maneira que não havia a menor preocupação dos professores em explicarem para os alunos o significado dos métodos e procedimentos utilizados. Em outro período, entre 1966 e 1975, sob a influência do Movimento da Matemática Moderna, o ensino da Geometria era meramente abstrato, já que

estava inserido no contexto da teoria dos conjuntos com atividades práticas pouco exploradas.

Entretanto, este cenário começa a mudar no final da década de 1970, quando o ensino da Geometria assume um viés voltado para a realidade dos alunos, ou seja, o ensino da Geometria se torna mais prático, onde neste contexto começa a ocorrer o emprego de materiais concretos que levem os alunos a manipular e a interagir com os objetos geométricos, enriquecendo assim o processo de ensino e aprendizagem da Geometria e dando significado ao seu objeto de estudo, conforme afirma Rêgo (2012).

O senso espacial é uma habilidade que está relacionada com a maneira como pensamos sobre as abstrações que se desenvolvem a partir da exploração que executamos sobre as formas e sobre o espaço que nos envolve. Para isso, baseamo-nos em parâmetros conceituais geométricos que buscam relacionar e explicar o mundo físico e o mundo das abstrações geométricas, levando-nos necessariamente à criação e à manipulação de imagens mentais e de operações mentais associadas a estas imagens como um meio de compreender a nossa realidade, conforme assegura Rêgo (2012).

O senso espacial pode ser desenvolvido no aluno, desde que sejam promovidas pelo professor de matemática atividades pedagógicas que os levem a vivenciarem experiências com objetos geométricos.

Para tanto, é necessário envolver os alunos e estabelecer vínculos entre o pensamento geométrico e a realidade que o cerca, de tal maneira que o aluno consiga manipular objetos geométricos mentalmente, construindo imagens mentais, criando e confrontando hipóteses por meio de um raciocínio geométrico e abstrato. Assim, o aluno desenvolve o seu pensamento geométrico e constrói o seu próprio conhecimento com base em experiências por ele mesmo vivenciadas.

De acordo com Van de Walle (2009, p. 439), o modelo de Van Hiele é uma teoria que surge a partir de estudos feitos pelo casal de educadores holandeses, Pierre Van Hiele e Dina Van Hiele-Geldof, sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria. O trabalho deles começou a ser desenvolvido no ano de 1959 como uma proposta de mensurar qualitativamente o pensamento geométrico, estabelecendo como base para a realização deste propósito fases de aprendizagem.

Assim, poderíamos compreender melhor a maneira como os alunos pensam geometricamente e qual as implicações das experiências vivenciadas por eles em sala de aula e na sociedade com relação à aprendizagem da Geometria.

Este modelo está baseado em uma hierarquia de cinco níveis que segue uma sequência gradual, de tal forma que o nível anterior é obrigatoriamente pré-requisito para se passar para o nível posterior, já que as ideias/conclusões desenvolvidas/obtidas no nível anterior serão relacionadas/retomadas e aprofundadas/estudadas no nível posterior.

Conforme Van de Walle (2009), os níveis de Van Hiele, em linhas gerais, são cinco. No *Nível 0, visualização*, conforme o autor, a principal característica deste nível gira em torno da aparência das formas. É com base nela que os alunos agrupam e classificam as formas, detectando desta maneira, as semelhanças e as diferenças existentes entre as formas, seguindo um raciocínio exclusivamente visual e superficial.

No *Nível 0*, os alunos só conseguem enxergar as formas de modo individual, de tal maneira que, devemos desenvolver atividades práticas que explorem de modo informal os sólidos de Platão com relação aos aspectos visuais aparentes das formas por meio do Poly Pro, levando-os a pensar nas diversas disposições possíveis das formas no espaço.

No *Nível 1, análise*, os alunos já apresentam uma capacidade de visualização mais abrangente, uma vez que aqui, eles conseguem perceber e raciocinar sobre as propriedades geométricas comuns das diversas formas que podem ser agrupadas em uma mesma categoria ou classe.

No *Nível 1*, os alunos devem com base na visualização dos sólidos de Platão e de suas planificações descrever as propriedades das faces que compõem cada sólido e em seguida organizar as figuras em grupo, utilizando como critério de ordem as suas propriedades.

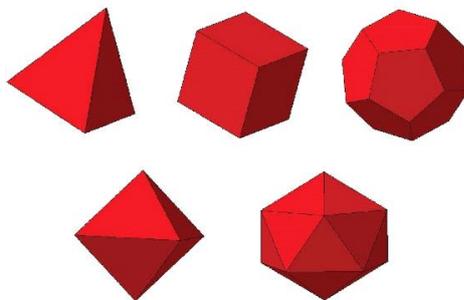
No *Nível 2, dedução informal*, os alunos já apresentam um raciocínio lógico mais refinado e de certa forma mais abstrato sobre as propriedades geométricas das formas, já que conseguem fazer deduções mediante argumentos intuitivamente lógicos resultantes do seu senso crítico. No *Nível 2*, o professor deve propor atividades que levem os alunos a construir formas geométricas a partir da manipulação, com base na visualização destas formas e que sejam desafiados a encontrar as possíveis maneiras de dispor estas peças (formas construídas) no plano.

No *Nível 3, dedução*, os alunos fazem deduções de caráter mais lógico e formal, pois já possuem um raciocínio sedimentado na necessidade de fazer demonstrações, empregando argumentos dedutivos. Eles já conseguem ir além da Geometria Euclidiana, explorando outros sistemas geométricos.

No *Nível 4, rigor*, os educandos conseguem fazer equiparações críticas e construções abstratas entre os diversos sistemas axiomáticos, confrontando suas ideias.

A figura 1 a seguir ilustra os sólidos de Platão, a saber: tetraedro, cubo, octaedro, icosaedro e dodecaedro:

Figura 1 – Sólidos de Platão



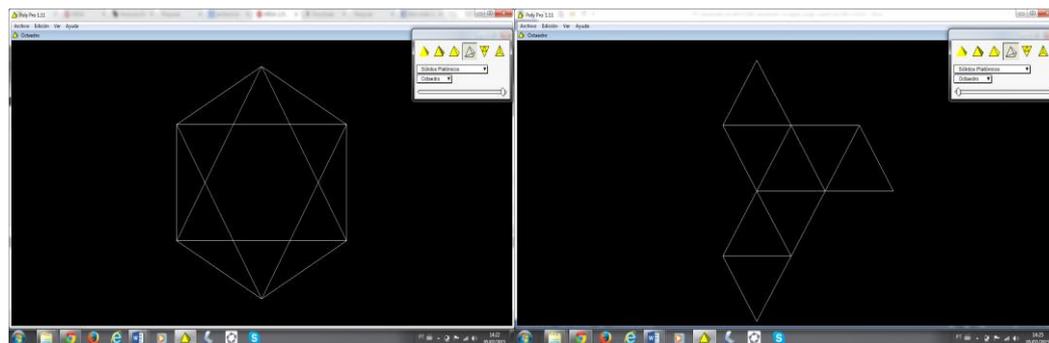
Fonte: Próprio autor, 2015.

A visualização pode ser explorada pelo professor nas aulas de Geometria mediante o uso de softwares que permitam a manipulação dos objetos geométricos com riqueza de detalhes como também através da apresentação de atividades que se mostrem desafiadoras a partir da observação dos fenômenos geométricos do mundo físico, passando necessariamente por construções abstratas e se materializando nas conclusões das respostas obtidas, dando significado ao estudo da Geometria.

O Poly Pro é um software que nos permite com muita facilidade explorar a visualização e trabalhar a planificação, possibilitando assim exercermos diversas ações de manipulação geométrica. No nosso caso, vamos focar nos poliedros de Platão, dando ênfase a visualização destes sólidos no plano e no espaço.

Com este software, podemos visualizar estes sólidos de várias maneiras, através dos seus comandos. Por exemplo, podemos selecionar as opções que enfatizam a visualização do contorno das arestas, seja no espaço, ou seja no plano, inclusive é possível selecionarmos a opção que prioriza a visualização do “esqueleto dos sólidos”, facilitando à análise do número de arestas dos sólidos, a quantidade de arestas que se ligam a cada vértice, a forma geométrica das faces poligonais, contribuindo assim para que os alunos possam verificar as várias características destes sólidos por meio da visualização, como se fosse uma visão de “raio X”.

Figura 2– Tela do Poly Pro / Esqueleto do Icosaedro e planificação do Octaedro



Fonte: Próprio autor, 2015.

Diante deste contexto, esta pesquisa tem como objetivo apresentar algumas propostas didáticas para o estudo dos sólidos de Platão com uso do software Poly Pro para uma turma de Ensino Médio de uma escola pública.

## **Metodologia**

Para a elaboração das propostas didáticas partimos de um questionário sobre o nível de conhecimento geométrico dos alunos acerca dos Sólidos de Platão. A turma de referência era composta por 26 alunos do 2º Ano D do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Alagoinha no Estado da Paraíba. A aplicação do questionário foi realizada no dia 16 de junho de 2015, tendo duração de 40 minutos.

Utilizamos como instrumento de pesquisa um questionário composto por 4 questões. A partir da análise do desempenho dos alunos, elaboramos no software Poly Pro três propostas didáticas que contemplassem as principais dificuldades dos alunos na compreensão do tema e, ao mesmo tempo, que pudessem conduzi-los a outros níveis de pensamento geométrico, segundo a teoria desenvolvida por Van Hiele.

## **Resultados e Discussão**

Considerando o questionário, na primeira questão perguntamos se os alunos já haviam estudado os Sólidos de Platão e podemos afirmar que a maioria (62%) dos alunos do 2º ano D do Ensino Médio desta escola já estudou este conteúdo, enquanto que 19% dos alunos desta turma nunca estudou este assunto e os 19% restante não respondeu à pergunta.

Na segunda questão, exposta logo abaixo, tratou da identificação das faces, arestas e vértices de cada sólido e também solicitou dos alunos que mencionassem as propriedades em comum desses sólidos relacionadas com a definição de Sólidos Platônicos.

2) Observe os sólidos de Platão abaixo



- a) Preencha a Tabela de acordo com o número de arestas, vértices e faces de cada um dos sólidos de Platão (poliedros)
- b) Qual(is) a(s) característica(s) que esses poliedros têm em comum?
- c) O que as faces têm em comum?
- d) O que dizer do número de arestas para cada vértice de cada sólido?

No item a) da segunda questão, eles deveriam preencher a tabela sobre o número de arestas, vértices e faces, da seguinte forma:

Tabela 1 – Questão 2/item (a)

Sólidos de Platão	Arestas	Vértices	Faces
Tetraedro	<b>6</b>	<b>4</b>	<b>4</b>
Cubo	<b>12</b>	<b>8</b>	<b>6</b>
Octaedro	<b>12</b>	<b>6</b>	<b>8</b>
Dodecaedro	<b>30</b>	<b>20</b>	<b>12</b>
Icosaedro	<b>30</b>	<b>12</b>	<b>20</b>

Fonte: Próprio autor, 2015.

Os dados mostram claramente que eles têm muitas dificuldades com relação aos conceitos e às características referentes especificamente aos Sólidos de Platão, posto que nesta questão da pesquisa foram abordados justamente os aspectos conceituais específicos dos Sólidos Platônicos.

Já no item b), os alunos deviam especificar que os sólidos de Platão possuem as seguintes características em comum: são convexos, todos os

vértices possuem o mesmo número de arestas, todas as suas faces são polígonos congruentes e que neles é válida a relação de Euler:  $V - A + F = 2$ .

No item c), eles deviam responder que todas as faces são congruentes e poligonais. E finalmente, no item d), eles deviam responder que cada vértice possui o mesmo número de arestas. Nota-se uma enorme porcentagem de erros nesta questão: (a) 81%, (b) 77%, (c) 69% e (d) 54%, evidenciando assim, a necessidade de uma intervenção que venha a explorar toda a teoria na qual se fundamenta os Sólidos de Platão, pois ela é indispensável para a compreensão deste conteúdo e para o desenvolvimento do pensamento geométrico destes alunos.

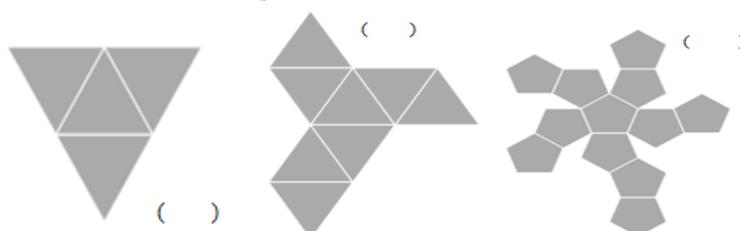
Percebemos também de acordo com esta análise quantitativa, que os alunos nesta questão não souberam muitas vezes nem sequer arriscar uma resposta, o que nos leva a deduzir apoiados no fato de que 62% dos alunos já tiveram contato com este conteúdo, que eles precisam revê-lo, porém, de uma forma mais cuidadosa com relação às características destes sólidos, e de forma mais dinâmica com relação à visualização. Mesmo diante das figuras, os alunos erraram na contagem do número de arestas, vértices e faces dos Sólidos Platônicos. Não souberam descrever as características comuns destes sólidos e se confundiram na identificação do tetraedro e do octaedro. A terceira questão, exposta a seguir, tratava da planificação dos sólidos de Platão.

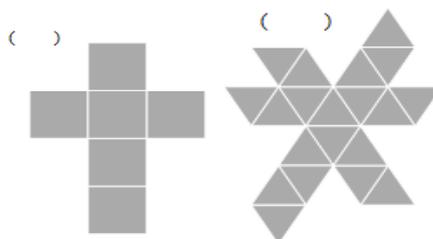
3. Associe cada sólido de Platão com a sua respectiva planificação ligando com uma linha:

### Sólidos de Platão



### Planificações dos Sólidos de Platão





De acordo com a análise supracitada, constatamos que os alunos desta turma, muito embora apresentem dificuldades com relação aos conceitos, 62% deles responderam a questão corretamente. Com base nesta informação, podemos dizer que eles conseguiram compreender alguns pontos básicos referentes à passagem da Geometria Plana para a Geometria Espacial e vice-versa, uma vez que esta questão tratou da planificação dos sólidos de Platão.

Este fato evidencia que estes alunos possuem certas habilidades que os levam a construir imagens mentais e a levantar hipóteses que são necessárias ao desenvolvimento do processo de planificação, embora de forma insatisfatória, sendo que o erro mais frequente na questão 3 do nosso questionário ocorreu quando os alunos trocaram a planificação do icosaedro pela do octaedro, conforme podemos perceber na tabela 2 a seguir.

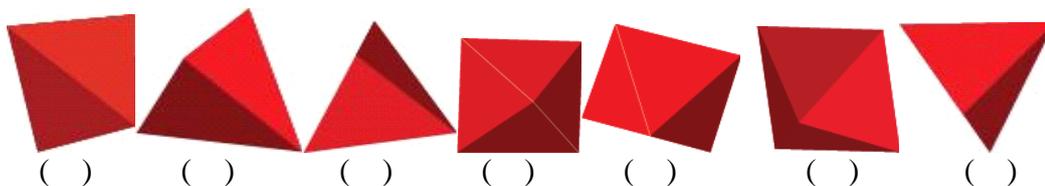
Tabela 2 – Erros para a Questão 3

Questão 3 - Associe cada sólido com a sua respectiva planificação		
Sólidos de Platão	Planificação Erros (%)	Erro mais comum (%)
Tetraedro	Octaedro (11,8%) Icosaedro (5,9%)	Octaedro (11,8%)
Cubo	Tetraedro (5,9%)	Tetraedro (5,9%)
Octaedro	Tetraedro (11,8%), Icosaedro (11,8%) Dodecaedro (5,9%).	Tetraedro (11,8%) Icosaedro (11,8%)
Dodecaedro	Tetraedro (5,9%) Icosaedro (5,9%)	Icosaedro (5,9%) Tetraedro (5,9%)
Icosaedro	Octaedro (17,4%) Dodecaedro (5,9%) Tetraedro (11,8%)	Octaedro (17,4%)

Fonte: Próprio autor, 2015.

Por fim, a questão 4 buscou explorar os aspectos ligados à visualização em diferentes perspectivas de dois poliedros específicos de Platão, o tetraedro e o octaedro.

4. As diferentes perspectivas representadas abaixo são do Tetraedro e do Octaedro. Identifique-as com **T** para **Tetraedro** e **O** para o **Octaedro**.



Nesta questão, os alunos da referida turma tiveram um desempenho muito ruim, já que chegaram a atingir os 61% de erros. Assim, constatamos que é necessária uma intervenção embasada em aulas e atividades não somente de viés teórico (aspectos conceituais) como também ligada a recursos que facilitem e que levem os alunos a exercitarem a visualização dos Poliedros de Platão. A tabela 3 a seguir resume o resultado da pesquisa realizada.

Tabela 3 – Resultado da Pesquisa – Sólidos de Platão

RESULTADO DA PESQUISA (%)			
Questões	Acertos	Erros	Nenhuma das Respostas
Questão 2 a)	8%	81%	11%
Questão 2 b)	0%	77%	23%
Questão 2 c)	0%	69%	31%
Questão 2 d)	0%	54%	46%
Questão 3	62%	38%	0%
Questão 4	31%	61%	8%

Fonte: Próprio autor, 2015.

Os alunos do 2º ano D se mostraram, apesar de já estarem no Ensino Médio, ainda deficientes com relação à visualização, componente do pensamento geométrico, visto que a base neste nível geométrico se caracteriza pela identificação das formas por meio de sua aparência. Sendo assim, muitos alunos desta turma não conseguiram relacionar a forma planificada com a forma espacial dos Sólidos de Platão. E a maioria deles fez associações equivocadas entre o tetraedro e o octaedro quando visualizados em diferentes perspectivas.

Como proposta para esta turma foram planejadas três Sequências Didáticas totalizando 13 aulas de 45 minutos, organizadas com base na visualização dos sólidos de Platão com o Poly Pro, respectivamente baseadas nos Níveis 0, 1 e 2 do modelo de Van Hiele. Neste artigo apresentaremos algumas dessas atividades, especificamente aquelas que são realizadas com o uso do software.

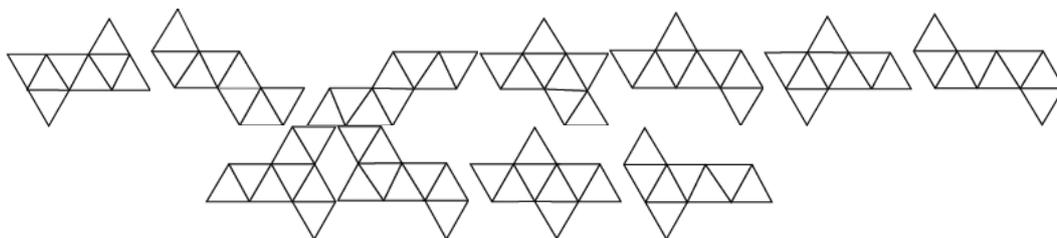
A Sequência Didática 1 (4 horas/aula) foi construída com base na apresentação do Poly Pro e no *Nível 0* do modelo de Van Hiele, abordando a visualização dos Poliedros Platônicos no Poly Pro, buscando implementar atividades com o

uso do software que levem os alunos a desenvolver a habilidade de fazer agrupamentos em classes de formas com base na visualização da aparência das formas, visando assim preparar os alunos para o *Nível 1* do modelo de Van Hiele. Uma das questões desta Sequência se encontra a seguir:

- 1) Agora, explore o Poly Pro fazendo o uso de algumas ferramentas, para descobrir mais sobre os Sólidos de Platão.

A Sequência Didática 2 (4 horas/aula) foi desenvolvida com base no *Nível 1* do modelo de Van Hiele, com a aplicação de atividades escritas e práticas, embasadas nas explicações do professor com o Poly Pro e na exploração do software pelos discentes. O intuito central da Sequência Didática 2 consiste no desenvolvimento de atividades que levem os alunos a encontrar as propriedades que justificam geometricamente as conclusões obtidas por eles na Sequência Didática 1, preparando os educandos para o *Nível 2* do modelo de Van Hiele. Uma das questões da Sequência Didática 2 se encontra a seguir:

- 1) Observe as diversas planificações abaixo.



- a) Encontre no Poly Pro ao menos uma planificação desta e simule no software o processo de obtenção do sólido pela ferramenta “animação”.

Finalmente, a Sequência Didática 3 (5 horas/aulas) está pautada no *Nível 2* do modelo de Van Hiele, onde procuramos estabelecer como ponto principal o desenvolvimento de atividades escritas baseadas nas explicações do professor com o Poly Pro e na exploração do software pelos alunos, procurando fixar relações entre as propriedades das diferentes classes, preparando os alunos para o *Nível 3* do modelo de Van Hiele. Temos a seguir uma das questões da Sequência Didática 3:

- 1) Observe a seguir as imagens extraídas do Poly Pro.

Figura 4



- a) Quais as propriedades que elas têm em comum com relação às formas geométricas de suas faces e ao número de arestas em cada vértice de cada poliedro? Use o Poly Pro para auxiliá-lo nesta tarefa.

## Conclusões

Diante do cenário apresentado nesta pesquisa, propomos o desenvolvimento de três Sequências Didáticas utilizando como ferramenta básica o Poly Pro e adotando como padrão teórico o desenvolvimento do pensamento geométrico conforme o modelo de Van Hiele.

Desta forma, o processo de ensino e aprendizagem dos Sólidos de Platão como também da Geometria será facilitado e enriquecido, promovendo a superação das dificuldades dos alunos com relação à compreensão dos Poliedros Platônicos identificadas nesta pesquisa e evitando que os mesmos erros constatados e quantificados na análise da já mencionada pesquisa, ocorridos em proporções preocupantes e inaceitáveis para uma turma de 2º ano do Ensino Médio, voltem a se repetir, já que este software nos oferece amplas possibilidades de visualização e de manipulação dos objetos geométricos.

## Referências

RÊGO, Rogério Gaudencio, RÊGO Rômulo Marinho; VIEIRA, Kleber Mendes. **Laboratório de Ensino de Geometria**. Campina, SP: Autores Associados, 2012.

WALLE, John A. Van de. **Matemática do Ensino Fundamental**: formação de Professores e aplicação em sala de aula. Tradução Paulo Henrique Colonese. 6ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.