RACIONAIS x IRRACIONAIS: UMA COMPARAÇÃO PROBABILÍSTICA COMO FERRAMENTA PEDAGÓGICA.

Jaques Silveira Lopes[1]; Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes[2]

[1] *Universidade Federal do Rio Grande do Norte; jaques@ccet.ufrn.br*
[2] *Universidade Federal do Rio Grande do Norte; gabriela@ccet.ufrn.br*

Resumo: Neste artigo temos a intenção de exibir uma importante aplicação da Teoria de Probabilidade que pode ser utilizada em sala de aula no Ensino Médio, pois leva ao reconhecimento da representatividade do conjunto dos números irracionais como subconjunto dos números reais, a saber: dar uma interessante característica da medida probabilística do conjunto dos números irracionais. Para tal, mostraremos que é zero a probabilidade de se escolher um número do intervalo [0, 1] e este número ser racional. Consequentemente temos que é de cem por cento a probabilidade de se escolher um número do intervalo [0, 1] e este número ser irracional. Esse fato, que pode surpreender num primeiro momento, é apresentado aos alunos dos anos finais da educação básica como uma eficaz ferramenta para o entendimento de dois importantes conceitos: a medida de Probabilidade e o conjunto dos números irracionais. Historicamente, a existência e a caracterização dos números irracionais foram temas que demandaram muito esforço de grandes matemáticos. Apesar de ser antiga a convivência com os números irracionais, somente há pouco mais de cem anos é que esses números foram sistematizados, com um melhor entendimento do conjunto dos números reais. Entretanto, ainda na Educação Básica é fundamental que o aluno tenha a capacidade de entender e identificar números racionais e números irracionais. Mesmo que, sabidamente a ideia de número irracional não seja muito intuitiva. Neste sentido, com pouca dose de formalismo matemático, contribuímos para a aprendizagem dos irracionais através de uma modelagem probabilística. Além disso, quando se estuda o conjunto dos números racionais e se constrói o conhecimento da densidade desse conjunto em relação ao conjunto dos números reais, ou seja, que entre dois reais há uma infinidade de racionais, fica parecendo não haver mais lugar na reta numérica para algum tipo de número além dos racionais. Com o resultado, aqui apresentado, jogamos luz nessa discussão. Fazemos uso de algumas noções da Teoria de Conjuntos e simples conceitos probabilísticos. Primeiramente apresentamos alguns aspectos históricos relacionados à Teoria de Probabilidade e à Teoria de Conjuntos, onde destacamos a tentativa de George Cantor de enumerar os números reais. Neste contexto comentamos sobre a origem de alguns números irracionais. Depois apresentamos a enumerabilidade do conjunto dos números racionais e fazemos a pergunta: Qual é probabilidade de se escolher, ao acaso, um número no intervalo fechado com extremidades 0 e 1 e ele ser um número racional ? Para responder a essa pergunta definimos um espaço de probabilidade, cuja medida de probabilidade é dada em termos dos comprimentos dos intervalos, de modo que o resultado segue da enumerabilidade dos racionais conjuntamente com o fato de que o comprimento de um intervalo degenerado ser zero.
Palavras-chave: Números irracionais, Números racionais, Probabilidade.

Introdução

Números naturais recebem esta denominação justamente por surgirem de uma necessidade concreta do nosso mundo real, cotidiano: a contagem. Assim, a introdução desses números é encarada pelos professores e seus alunos de forma bastante tranquila. A partir daí é feita a reunião destes números como elementos de um conjunto, em que estão definidas as operações algébricas de soma e multiplicação, além de uma relação de ordem.

Do ponto de vista estrutural, a necessidade de "inverter" operações de adição e multiplicação é um dos pontos motivadores para a extensão do conjunto dos números naturais, concebendo-se assim, os conjuntos dos números inteiros e dos racionais. Em uma perspectiva concreta a introdução dos racionais pode ser desencadeada pela necessidade de dividir um inteiro, donde nasce a percepção de que uma porção pode ter tamanho inferior a unidade (isto é o sentido de fração). Deste modo notamos que, enquanto os naturais estão relacionados a processos de contagem, os racionais atendem a processos que envolvem medida.

Quando pensamos na extensão dos números racionais para os números reais, nos deparamos, inevitavelmente, com uma situação merecedora de um cuidado muito maior. Inicialmente as motivações desta extensão também eram baseadas em processos que envolviam medidas, entretanto não é, fundamentalmente, conveniente encarar o surgimento destes números simplesmente para suprir necessidades das operações algébricas. Neste contexto surge também a noção de número irracional. Conjunto que, não vem sendo, satisfatoriamente, abordado na Educação Básica. Por outro lado, situações concretas que motivem a construção do conjunto dos números reais normalmente não são encontradas em livros didáticos. Assim, os professores se limitam apenas a levar aos alunos a necessidade da existência de tais números, como no caso da diagonal do quadrado de lado 1, que mede $\sqrt{2}$. Entretanto, eles ocultam que $\sqrt{2}$ é apenas um símbolo para representar uma sequência infinita específica de algarismos. As ideias de Moreira e Ferreira (2009) corroboram com este nosso entendimento em relação à temática da introdução dos conjuntos numéricos:

> As extensões formais dos conjuntos numéricos também não atendem, a nosso ver, às necessidades de formação do professor para o trabalho com extensões a serem construídas na Educação Básica. No caso da educação escolar, não se trata de simplesmente construir um modelo abstrato de estrutura (previamente "conhecida") da qual se deseja garantir a existência formal. Ao contrário, trata-se de trabalhar pedagogicamente, junto a crianças e adolescentes sem muita experiência com a formalização dos conceitos matemáticos, o complexo processo de negociação de uma (genuinamente) nova noção de número, incluindo a discussão das necessidades que levam a isso, o desenvolvimento progressivo de um olhar critico para a "velha" noção, simultaneamente ao reconhecimento e à internalização do papel dos novos números. (MOREIRA e FERREIRA 2009, p. 53)

Na Educação Básica é dado um tratamento com enfoque principal voltado para as operações (os números são objetos que podem ser somados e multiplicados, segundo regras pré-estabelecidas). Não se trabalha como os subconjuntos dos números racionais e dos números irracionais se complementam no conjunto dos números reais, e qual a representatividade que cada um tem em relação ao conjunto dos números reais. E a Teoria da Probabilidade pode ser muito útil neste momento e na formação de professores. Em Lopes

(1998) podemos encontrar uma discussão sobre a introdução da Teoria da Probabilidade e os conceitos de Estatística na Educação Básica.

A Teoria da Probabilidade, a qual se situa na resolução dos problemas associados aos fenômenos aleatórios (ou seja, aqueles que não são determinísticos) é de suma importância no desenvolvimento e compreensão de situações teóricas e cotidianas, sobretudo em situações que necessitamos tomar decisões. Isso acontece porque as conclusões obtidas nos processos inferenciais são baseadas em dados aleatoriamente escolhidos, consequentemente, sempre admitem determinada margem de incerteza. Por isso, a Teoria de Probabilidade se constitui numa essencial ferramenta, o que impõe que noções básicas em relação à probabilidade devem ser estudadas desde a Educação Básica, para que os alunos possam compreender melhor o mundo que os cercam. Esse aspecto já está bem destacado no PCN (Parâmetros Curriculares Nacional).

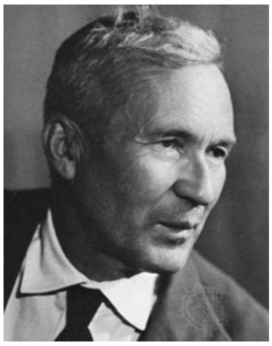
Como mencionado, a Teoria de Probabilidade é responsável pela criação de modelos que servem para o estudo dos experimentos ou fenômenos aleatórios, que representam grande parte das situações cotidianas. No tocante a sua origem, como descrito por Moreira e Salsa (2008), sabe-se que esse conhecimento matemático começou a ser estudado a partir do século XVI, com o matemático, astrólogo e médico, Gerolamo Cardano (1501–1576). Ele, que também era jogador de jogos de azar, escreveu, por volta de 1550, a obra *Liber de Ludo Aleae* (que em tradução livre significa, O livro dos jogos de azar), a qual é tida como o primeiro manual organizado que traz algumas noções de probabilidade. Nesse livro, o autor desenvolve cálculos de expectativas acerca de jogos de dados. No entanto, o estudo sistemático de probabilidade começou em 1654, quando Antoine Gombaud, também conhecido como Chevalier de Méré, um jogador francês, escreveu ao matemático Blaise Pascal (1623-1662) fazendo várias perguntas sobre as probabilidades de se ganhar no jogo de dados e outros jogos de azar. Perguntas do tipo: *O que é mais provável, rolar um "seis" em quatro jogadas de um dado ou rolar um "duplo seis" em 24 jogadas com dois dados?* (CRILLY, 2017). Pascal então escreveu a outro matemático francês, Pierre de Fermat (1607–1665), expondo as perguntas feitas por Chevalier de Méré.

> Conhecido como pai da Teoria dos Números moderna o francês, Pierre de Fermat (1607-1665), nasceu em Toulouse. Escolheu o direito como profissão e perseguiu a Matemática apenas como um amador. Desenvolveu a análise algébrica, com base nas obras de Viète e desenvolveu importantes trabalhos na geometria analítica e óptica. É considerado fundador da teoria dos números moderna seguindo a tradição diofantina. Seus dois maiores desafios na Matemática, em 1657-8, levaram a extensa correspondência com Wallis, Brouncker e Frenicle. Correspondências estas que podem ser encontradas em *Commercium epistolicum de quaestionibus quibusdam mathematicis nuper habitum* de 1658. (LOPES, 2016).

A partir dessa situação, a correspondência entre os matemáticos Pascal e Fermat mostra que eles aprofundaram seus estudos sobre probabilidades e chegaram a definir conceitos como expectativa, chance e média, muito embora não tenham publicado seus estudos.

Ainda no século XVII, no ano de 1657, o matemático holandês Christian Hiygens (1629 – 1695) publicou o livro *O Raciocínio nos Jogos de Dados*, o qual continha contribuições importantes ao estudo das probabilidades. Nesse mesmo século, o matemático suíço Jacques Bernoulli (1654–1705) propôs um teorema em que afirmava que a probabilidade de um evento ocorrer tende a um valor constante quando o número de ensaios desse evento tende ao infinito. Depois de Bernoulli, Abraham De Moivre (1667–1751) publicou o livro *A Doutrina do Azar*, dando valiosa contribuição para o estudo das probabilidades através de suas análises em relação aos de jogos de azar. Posteriormente, no século XIX, o matemático Pierre Simon Laplace (1749–1827) sistematizou uma estrutura de raciocínio e um conjunto de definições importantes nessa área e expôs seu trabalho com a publicação do seu livro *Teoria Analítica das Probabilidades* (1812). O matemático alemão Gauss (1777-1855) desenvolveu, a partir de estudos sobre a distribuição do erro de medidas físicas, um modelo probabilístico de grande importância e utilização na estatística, o modelo normal, também conhecido como a curva de Gauss. No século XX, Andrei Nikolayevich Kolmogorov (1903–1987), um dos mais influentes matemáticos russos do século passado, desenvolveu, a partir da teoria dos conjuntos, a moderna teoria matemática da probabilidade, dando-lhe um tratamento axiomático, pilares da formalização dos teoremas que sustentam o corpo teórico da probabilidade. Os estudos teóricos do cálculo de probabilidades rendeu sua primeira publicação em 1929: General *Theory de Measure and Probability Theory*. Esse livro, muito importante ao Cálculo das Probabilidades, expõe a formulação de um conjunto de princípios conhecidos como a axiomática de Kolmogorov (1933).

Figura 1: Andrei Nikolayevich Kolmogorov



https://www.britannica.com/biography/Andrey-Nikolayevich-Kolmogorov

Metodologia

Primeiramente apresentamos alguns fatos históricos relacionados à Teoria de Conjuntos, onde destacamos a tentativa do Alemão George Cantor (1845-1918) de enumerar os números reais.

A moderna teoria dos conjuntos começou com George Cantor, ele fez uma tentativa real de classificar as coleções infinitas. Cantor em 1883 com o trabalho "Sobre Conjuntos Lineares" trata o infinito como um ente matemático definido. Cantor disse que era possível estabelecer uma correspondência entre duas coleções infinitas, mesmo que uma seja apenas parte da outra. Ele afirmava que duas coleções (finitas ou infinitas) são equivalentes ou tem a mesma potência se pudermos comparar elemento por elemento.

Figura 2: George Cantor

www.pucrs.br/famat/statweb/historia/daestatistica/biografias/**Cantor**.htm

Cantor designa o símbolo **a** como a potência do conjunto dos números naturais, e disse que qualquer conjunto que possua a potência **a** será chamado de enumerável. Cantor queria mostrar que qualquer coleção infinita poderia ser arranjada numa hierarquia e, portanto, ser enumerada. Essa era sua idéia nas primeiras etapas de sua obra, enumerar os números reais, tentativa de "contar o contínuo." Em 1874 Cantor verificou que era impossível arranjar todos os números reais numa sequência enumerável, assim a teoria de Cantor afirma que o conjunto dos números reais é não enumerável. De acordo com Schechter (2000), David Hilbert (1862-1943) certa vez disse**:** *"Ninguém nos tirará do paraíso criado para nós por Cantor."* Posteriormente, como destaca Sooyoung (2010), Hilbert descreveu o trabalho de Cantor como "*o melhor produto de um gênio matemático e uma das realizações supremas da atividade humana puramente intelectual*" .

Depois apresentamos a enumerabilidade do conjunto dos números racionais e fazemos a seguinte pergunta: *Qual é probabilidade de se escolher, ao acaso, um número no* *intervalo* $[0, 1]$ *e ele ser um número racional ?*

Para responder a pergunta acima definiremos um espaço de probabilidade, cuja medida de probabilidade, sobre o espaço amostral $S = [0, 1]$, é $P(A) = \frac{comp(A)}{comp(S)}$, $A \subset S$. E a probabilidade zero do conjunto $Q \cap [0,1]$ é mostrada de maneira natural, usando a enumerabilidade deste conjunto e a σ-aditividade da função de probabilidade.

Discussão e Resultados

Na segunda metade do Ensino Médio as noções de funções já estão bem consolidadas, de maneira que podemos apresentar o seguinte conceito:

Definição de Conjunto Enumerável**:** Um conjunto X diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : N \to X$. Neste segundo caso, X diz-se infinito enumerável. E pondo-se $x_1 = f(1), x_2 = f(2), \cdots, x_n = f(n)$, ... tem-se: Cada bijeção $f : N \to X$ chama-se uma enumeração (dos elementos) de X. De uma maneira mais simples, dizemos que um conjunto é enumerável se ele pode ser colocado em lista, ou seja, que seus elementos são listáveis.

Um exemplo que pode ser colocado: $\begin{array}{l} f : N \to P \quad , \; P = n^{os} \; pares \\ n \mapsto f(n) = 2n \end{array}$

De maneira que, atendendo a definição, o conjunto P dos naturais pares é infinito enumerável.

Na sequência podemos apresentar o importante fato de que o Conjunto dos Números Racionais é enumerável. Aqui é importante dizer que Z (conjunto dos inteiros é enumerável), pela existência da bijeção

$$\begin{array}{l} f : N \to Z \\ n \mapsto f(n) = \dfrac{-n+1}{2} \; se \; x \; for \; ímpar \\ n \mapsto f(n) = \dfrac{n}{2} \; se \; n \; for \; par \end{array}$$

Uma nota importante é que podemos aproveitar esse momento para enfatizar os conceitos de funções injetoras, funções sobrejetoras, números pares e números ímpares.

A partir daí, temos que o produto cartesiano $Z \times Z^*$ também é enumerável, pois o produto de conjuntos enumeráveis é enumerável. Como a função definida por $f(m,n) = \frac{m}{n}$ é sobrejetiva, temos que Q (conjunto dos números racionais) é enumerável.

Outra forma bastante comum de mostrar a enumerabilidade dos racionais pode ser apresentada por Figueiredo (1996). Seja A um subconjunto de um conjunto enumerável, então A é finito ou enumerável. O conjunto Q^+ dos racionais positivos é enumerável. Demonstraremos que o conjunto F de todos os $\frac{p}{q}$, $p, q \in N$ é enumerável. Como $Q^+ \subset F \; e \; Q^+$ não é finito, segue do que foi dito acima que Q^+ é enumerável. Para ver se F é enumerável, basta observar a tabela abaixo. E seguindo as setas, obtém-se uma ordenação do conjunto F.

Figura 3: Esquema para Enumerabilidade dos Racionais

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & \rightarrow & \frac{1}{6} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \frac{2}{5} & & \frac{2}{6} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & & \frac{3}{6} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & & \frac{4}{6} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
\frac{5}{1} & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{5} & & \frac{5}{6} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Observações: (1) A união de um conjunto finito A com um conjunto enumerável B é enumerável. De fato, sejam $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ e $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$, então $A \cup B$ é enumerável, pois podemos definir como $f(n) = \begin{cases} a_n, & se \quad 1 \le n \le p \\ b_n, & se \quad p+1 \le n \end{cases}$.

(2) A união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável. De fato, sejam $A = \{a_1, a_2, \cdots\}$ e $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$, os dois conjuntos enumeráveis. Então $A \cup B$ é enumerável, porque podemos definir a bijeção:

$$f(n) = \begin{cases} a_p & se \quad n = 2p \\ b_p & se \quad n = 2p-1 \end{cases}$$

E das observações (1) e (2), além do fato que Q^{+} é enumerável , segue que o conjunto Q dos números racionais é enumerável.

Na sequência apresentamos a definição de Espaço de Probabilidade: Seja E: experimento aleatório. S: espaço amostral associado a E (Conj. de todos os possíveis resultados de E). Além disso, consideramos $\Im$ a classe de subconjuntos de S como a classe de eventos de S.

Assim, definimos P : medida de probabilidade sobre $(S, \Im)$, ou seja,

$\mathrm{P} : \Im \to [0,1]$ é uma função conjunto tal que

(i) $\forall A \in \Im$, $\mathrm{P}(A) \geq 0$;

(ii) $\mathrm{P}(S) = 1$;

(iii) $A_1, A_2, \cdots \in \Im$, $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_j).$$

Dizemos, então, que (S, $\Im$, P) é um espaço de probabilidade.

Indo ao Cálculo da Probabilidade de se escolher aleatoriamente um número no intervalo [0, 1] e ele ser Racional:

Dado o espaço amostral $S = [0,1]$, seja $P(A) = \dfrac{comp(A)}{comp(S)}$, $A \subset S$.

Como $Q \cap [0,1] \subset Q$, temos que

$$\begin{aligned} P(Q \cap [0,1]) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} r_i\right), \quad r_i \in Q \cap [0,1] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(\{r_i\}) \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

De modo que fica faltando apenas o cálculo da probabilidade de cada evento simples $\{r_i\}$.

Sabendo que o comprimento de um intervalo fechado, mesmo que no caso degenerado, é dado por $comp([a, b]) = b - a$, temos que:

$$P(\{r_i\}) = \frac{comp(\{r_i\})}{comp(S)} = \frac{r_i - r_i}{1 - 0} = \frac{0}{1} = 0$$

Consequentemente, voltando em (I), temos que $\sum_{i=1}^{\infty} P(\{r_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0$.

Concluímos ser zero a probabilidade de se escolher aleatoriamente um número no intervalo [0, 1] e ele ser Racional.

Exibimos então uma importante aplicação da Teoria de Probabilidade que pode ser utilizada em sala de aula no Ensino Médio, porque proporciona o reconhecimento da medida do conjunto dos números irracionais como subconjunto dos números reais. Mostramos que é zero a probabilidade de se escolher um número do intervalo [0, 1] e este número ser racional. Consequentemente, como $\{Q \cap [0,1]\} \cup \{Q^C \cap [0,1]\} = [0,1]$, temos que é de cem por cento a probabilidade de se escolher um número do intervalo [0, 1] e este número ser irracional. Onde usamos Q^C para representar o conjunto dos números irracionais.

Conclusões

Com nosso artigo atendemos ao disposto no PCNEM - Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2000), no que diz respeito às noções de Probabilidade que devem ser apresentadas aos alunos. Realçamos a importância de estudar probabilidade e chance, e de que a partir desses conhecimentos os alunos podem entender conceitos e palavras relacionadas à chance, incerteza e probabilidade, que aparecem na nossa vida cotidiana, particularmente nos meios de comunicação. Esses importantes conceitos abarcam a compreensão de que a probabilidade é uma medida da certeza, que os modelos são úteis para simular eventos, para estimar probabilidades, e que algumas vezes nossas intuições são incorretas e podem nos levar a uma conclusão equivocada no que se refere à probabilidade e à chance. Nas situações e nas experiências em que existe o caráter aleatório, os estudantes necessitam aprender a descrevê-las em termos de eventualidades, associá-las a um conjunto de eventos elementares e representá-las de forma de um modelo. Os alunos precisam também dominar a linguagem de eventos, levantar hipóteses de equiprobabilidade, associar a estatística dos resultados observados e as frequências dos eventos correspondentes, e utilizar a estatística de tais frequências para estimar a probabilidade de um evento dado.

Além disso, contribuímos para o melhor conhecimento dos números racionais e dos números irracionais. Nesse sentido, o aluno terá a condição de perceber a existência de diversos tipos de números (números naturais, negativos, racionais e irracionais), assim como de seus diferentes significados. Além de, também, quando estudam algumas das questões que compõem a história do desenvolvimento desses conjuntos numéricos.

Referências

ÁVILA, G. S. S.; *Introdução à análise matemática*, 1 ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher LTDA 1995.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília: MEC, 2000.

CRILLY, T. *50 Ideias de Matemática que você precisa conhecer*. São Paulo: Planeta, 2017.

FIGUEIREDO, D. G. *Análise I*, 2ª. ed. R.J. L.T.C. Editoras 1996.

LOPES, C. E. *A probabilidade e a estatística no Ensino Fundamental: uma análise curricular*. Campinas: Faculdade de Educação da Unicamp, 1998. 125 p. Dissertação (Mestrado em Educação).

LOPES, G. L. O. *A Criatividade Matemática De John Wallis Na Obra Arithmetica Infinitorum: Contribuições Para Ensino De Cálculo Diferencial E Integral Na Licenciatura Em Matemática.* Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Educação, UFRN, 2017.

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, M. M. C. *O que é número real? OS números reais na formação do professor da Educação Básica*. In: CURY, H. N.; VIANNA, C. R. (Org) Formação do Professor de Matemática: reflexões e propostas. Santa Cruz do Sul: IPR, 2009, p. 49-94.

MOREIRA, J. A.; SALSA, I. S.: *Probabilidade e estatística* – Natal, RN : EDUFRN, 2008.

SCHECHTER, B. *My Brain is Open: The Mathematical Journeys of Paul Erdos.* SIMON & SCHUSTER, 2000.

SOOYOUNG, C. *Academic Genealogy of Mathematicians*, World scientific pub, 2010.