OS NÚMEROS TRANSREAIS, A TRANSMATEMÁTICA E A DIVISÃO POR ZERO EM DISCIPLINAS OPTATIVAS NAS LICENCIATURAS EM MATEMÁTICA E EM FÍSICA

Tiago Soares dos Reis

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro
tiago.reis@ifrj.edu.br

Resumo: Este texto relata a experiência de se ministrar disciplinas optativas sobre os números transreais e a transmatemática a estudantes das licenciaturas em matemática e em física. A transmatemática é a reunião de todos os assuntos desenvolvidos a partir dos números transreais, seja utilizando-os ou motivando-se neles. Os números transreais são uma extensão dos números reais que permitem a divisão por zero. Eles foram criados pelo cientista da computação James Anderson com o objetivo de serem aplicados à computação. Desde então, diversos aspectos da transmatemática têm sido desenvolvidos, como por exemplo: o cálculo transreal, propondo uma topologia e uma métrica ao espaço transreal e definindo derivada e integral de funções neste domínio; os números transcomplexos, com sua topologia, métrica e funções elementares; e aplicações dos números transreais na lógica, com a semântica total, o modelo transreal para o espaço dos mundos possíveis e o modelo transreal para o espaço das proposições. Esses tópicos da transmatemática foram introduzidos a estudantes de graduação por meio de disciplinas optativas semestrais entre os anos de 2014 e 2017. Este texto faz uma breve explanação sobre o que são os números transreais, apresentando a motivação e a forma com a qual foram estabelecidos e explicando como se dá sua aritmética. O texto ainda relata os objetivos de se propor disciplinas sobre os números transreais e a transmatemática a estudantes de graduação; expõe os tópicos estudados nas disciplinas em cada semestre; comenta a recepção, por parte dos estudantes, dos temas propostos; e apresenta as impressões do professor regente da disciplina.
Palavras-chave: números transreais, transmatemática, divisão por zero.

1. Introdução

O objetivo deste texto é relatar as experiências vividas pelo presente autor ao ministrar disciplinas optativas sobre transmatemática e números transreais nos cursos de Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Física do IFRJ (Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro) campus Volta Redonda entre os anos de 2014 e 2017.

Os **números transreais** são um conjunto numérico, uma extensão dos números reais, que possuem uma estrutura aritmética capaz de admitir a divisão por zero. Este novo conjunto foi criado do fim dos anos 1990 para o início dos anos 2000 pelo professor e doutor em ciência da computação britânico James Anderson (ANDERSON, 1997, 2005). Anderson, na qualidade de pesquisador em computação, percebeu que os computadores têm uma limitação de processamento devido a não totalidade da aritmética sob a qual operam. Os computadores utilizam os números reais e tais números não possuem uma aritmética total. Isto é, não se pode efetuar as quatro operações aritméticas básicas entre quaisquer números reais. Existe uma restrição. Como é sabido, a divisão por zero não é permitida. Diante de tal questão, James Anderson propôs um novo conjunto que deveria conter os números reais e permitir a divisão por zero.

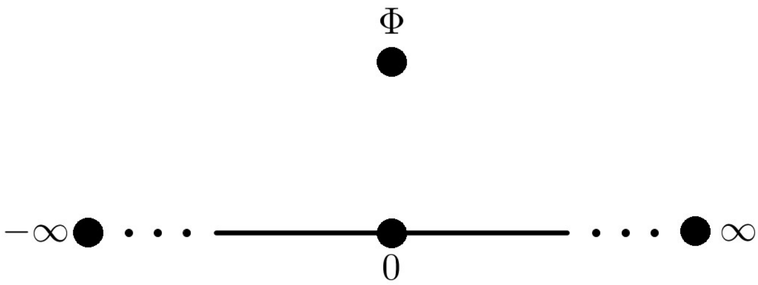
Desde sua criação, diversas pesquisas têm sido feitas sobre, ou aplicando, o conjunto dos números transreais. O primeiro assunto pesquisado foi, é claro, a criação e a programação de computadores utilizando os números transreais (ANDERSON, 2002, 2006, 2011, 2014, 2015). Um cálculo diferencial e integral, junto a uma topologia, transreal tem sido desenvolvido (ANDERSON e REIS, 2014) (REIS e ANDERSON, 2014a, 2015a, 2015b). Também são estudadas aplicações dos números transreais na lógica (ANDERSON e GOMIDE, 2014) (GOMIDE, 2013) (GOMIDE, REIS e ANDERSON, 2015) (REIS, 2015). Algumas revisões bibliográficas foram feitas, comparando os números transreais a outras estruturas matemáticas, como os números transfinitos de Cantor (GOMIDE e REIS, 2013) e a *Arithmetica Universalis* de Newton (ANDERSON e REIS, 2015) e, ainda, uma discussão sobre as novidades que os transreais trazem à matemática (REIS e KUBRUSLY, 2015). Uma demonstração de consistência da aritmética transreal é dada no memso texto onde se propõe o conceito da estrutura algébrica transcorpo (REIS, GOMIDE e ANDERSON, 2016). Além disso, são propostos os números transcomplexos, uma topologia e extensões das funções elementares a este domínio (REIS e ANDERSON, 2014b, 2016, 2017). Esse aglomerado de conteúdos advindos dos números transreais é chamado de **transmatemática**.

O presente autor pesquisa a transmatemática desde o doutoramento e o interesse no tema o fez propor disciplinas optativas sobre o mesmo a estudantes de graduação. Este texto relata a experiência de ministrar tais disciplinas, a recepção e o aprendizado dos estudantes e as impressões deste professor.

2. Os Números Transreais e a Divisão por Zero

Como se sabe, a divisão por zero não é possível no âmbito dos números reais (ou complexos) segundo a definição usual de divisão. James Anderson propôs que, além dos números reais, existam três números, a saber, **menos infinito**, **infinito** e ***nullity***, denotados respectivamente, por $-\infty$, ∞ e Φ. Anderson afirmou que menos infinito é o resultado de qualquer número real negativo dividido por zero, isto é, $-\infty = \frac{k}{0}$ se $k < 0$; infinito é o resultado de qualquer número real positivo dividido por zero, isto é, $\infty = \frac{k}{0}$ se $k > 0$; e, finalmente, *nullity* é o resultado de zero dividido por zero, $\Phi = \frac{0}{0}$. O conjunto dos números transreais é denotado por $\mathbb{R}^T$ e é formado pelos números reais unidos aos três novos elementos citados, $\mathbb{R}^T = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty, \Phi\}$ (ANDERSON, 2005). A Figura 1 mostra uma imagem da reta transreal.

Figura 1− Reta transreal.



Anderson propôs este novo sistema de números de forma axiomática. Ele não propôs um significado para os novos números, nem uma definição para a divisão por zero. Ele não construiu o novo conjunto a partir dos números ou objetos já conhecidos, não propôs um modelo para os números transreais baseado em números já estabelecidos. Em (ANDERSON, VÖLKER e ADAMS, 2007) pode-se encontrar a lista com os trinta e dois axiomas que estabelecem o conjunto dos números transreais e sua aritmética. Destacamos aqui os axiomas que dão os resultados das quatro operações aritméticas básicas entre quaisquer números transreais. A numeração original é mantida.

[A4] Adição por *Nullity*: $\Phi + a = \Phi$

[A5] Adição por Infinito: $a + \infty = \infty$: $a \neq -\infty, \Phi$

[A6] Subtração como Soma pelo Oposto: $a - b = a + (-b)$

[A7] Bijetividade do Oposto: $-(-a) = a$

[A8] Inverso Aditivo: $a - a = 0$: $a \neq \pm\infty, \Phi$

[A9] Oposto de *Nullity*: $-\Phi = \Phi$

[A10] Subtração de Infinito não Nula: $a - \infty = -\infty$: $a \neq \infty, \Phi$

[A11] Subtração de Infinito por infinito: $\infty - \infty = \Phi$

[A15] Multiplicação por *Nullity*: $\Phi \times a = \Phi$

[A16] Infinito vezes zero: $\infty \times 0 = \Phi$

[A17] Divisão: $a \div b = a \times (b^{-1})$

[A18] Elemento Inverso da Multiplicação: $a \div a = 1$: $a \neq 0, \pm\infty, \Phi$

[A19] Bijetividade do Recíproco: $(a^{-1})^{-1} = a$: $a \neq -\infty$

[A20] Recíproco de zero: $0^{-1} = \infty$

[A21] Recíproco do Oposto do Infinito: $(-\infty)^{-1} = 0$

[A22] Recíproco do *Nullity*: $\Phi^{-1} = \Phi$

[A23] Positivo: $\infty \times a = \infty \Leftrightarrow a > 0$

[A24] Negativo: $\infty \times a = -\infty \Leftrightarrow 0 > a$

Note que alguns dos resultados axiomatizados por Anderson respeitam a aritmética usual dos limites. Por exemplo: $\infty + \infty = \infty$, $\infty + a = \infty$ para todo a real, $\infty \times \infty = \infty$, $\infty \times (-\infty) = -\infty$, $\infty \times a = \infty$ para todo a real positivo e $\infty \times a = -\infty$ para todo a real negativo.

3. As Disciplinas Optativas

Sobre os objetivos

Um dos objetivos de se ministrar disciplinas sobre os números transreais e a transmatemática foi, simplesmente, o de divulgar essa nova área de estudos e poder, até, despertar o interesse dos estudantes em se aprofundar no assunto.

Um outro objetivo tem a ver com o fato de que, em geral, os conteúdos de matemática estudados num curso de graduação são assuntos desenvolvidos há pelo menos cem anos, sendo que alguns são de mais de mil anos atrás. Este fato passa, aos estudantes, a impressão de que a matemática é uma área já pronta e acabada. Este autor teve esta impressão durante seu curso de graduação e percebe que os estudantes, em geral, também a têm. Desta forma, com conhecimento da existência da, recém criada, transmatemática, o estudante pode perceber, vivenciando, que a matemática é uma área ainda em desenvolvimento. É claro que, a transmatemática não é o único assunto em desenvolvimento na matemática, mas é um bom tema a ser apresentado para estudantes de licenciatura, pois possui tópicos cujos pré-requisitos são disciplinas de graduação, diferentemente de alguns temas que são adequados apenas a estudantes de pós-graduação, quiçá a doutores já formados.

A simplicidade de alguns tópicos da transmatemática permite falar de outros dois objetivos. Um é o de os estudantes estudarem o assunto no momento em que ele está ainda em desenvolvimento. Não apenas tomar conhecimento da transmatemática, mas conhecer e perceber os estados de evolução pelos quais ela passa. Conhecer os resultados já obtidos, as tentativas infrutíferas e as expectativas, conjecturas, isto é, resultados esperados, mas que ainda carecem de verificação, demonstração. A transmatemática passa ainda por um momento de estabilização, de consolidação. Mesmo os seus propositores ainda não têm clareza no que diz respeito a algumas definições, algumas convenções. Isto é comum a assuntos que surgem. Outros tópicos da matemática passaram por períodos de normatização, onde diferentes definições, explicações ou significados foram sugeridos a determinados objetos, até que o tempo e o próprio desenvolvimento da teoria mostraram o melhor, ou único possível, caminho a seguir. Isto se deu, por exemplo, com os números negativos, irracionais e complexos. As disciplinas optativas proporcionaram muitos momentos de discussões, não foram feitas apenas de exposições das informações e resultados, mas de comentários sobre como estava o estado de desenvolvimento exato de determinados tópicos, sobre o que já se havia conseguido, sobre as idéias que se tinha a desenvolver e sobre os caminhos e obstáculos na busca dos resultados esperados. O fato de uma parte da transmatemática ter sido desenvolvida na pesquisa de doutorado deste autor proporcionou tais discussões nas aulas.

O outro objetivo, diretamente ligado ao anterior, foi o de mostrar aos estudantes a simplicidade e os caminhos, os "rascunhos", os detalhes por detrás dos resultados estabelecidos. É comum o fato de estudantes de matemática terem dificuldades em determinados conteúdos, pois eles entendem, por exemplo, uma demonstração ou cálculo feito, mas não fazem ideia de como se chega a tal demonstração ou cálculo. Isto é, entendem o procedimento feito, mas julgam que não teriam a ideia de adotar aquele artifício, não sabem como o professor ou o autor do livro pôde pensar em tal caminho. Falas do tipo são comuns: "Professor(a), entendi o que o(a) senhor(a) fez, mas eu não conseguiria fazer. Não teria a ideia de tentar por esse caminho". Podem existir diversos motivos que geram tal percepção nos estudantes, mas um deles é o fato de, em geral, os livros e os professores não mostrarem as tentativas que "deram errado", em outras palavras, os caminhos experimentados que não chegaram ao resultado; e também não mostrarem os "rascunhos", as contas e argumentações que são feitas por detrás do resultado pronto.

Por exemplo, James Anderson estabelece a aritmética transreal através de axiomas. Podemos nos perguntar por que ele postula que $\infty + \infty = \infty$ ou por que $\Phi + a = \Phi$ para qualquer a real. A igualdade $\infty + \infty = \infty$ pode, como dissemos, ter sido motivada na aritmética dos limites, mas por que postular que $\Phi + a = \Phi$ para qualquer a real? Foi uma escolha arbitrária? Esta escolha foi motivada em algum resultado conhecido? Em algum "rascunho"? Em outras tentativas que "não deram certo"? Em resultados esperados?

Sobre o que motivou os resultados da aritmética transreal

O tópico desta seção foi apresentado aos estudantes no início da disciplina optativa em todos os semestres em que foi ministrada. Em que James Anderson motivou seus axiomas? Vejamos como se dá a aritmética transreal quando os números transreais reais são vistos na forma fracionária. Primeiro, note que, como $\mathbb{R}^T = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty, \Phi\}$ e $\frac{k}{0} = -\infty$ para todo $k < 0$, $\frac{k}{0} = \infty$ para todo $k > 0$ e $\frac{0}{0} = \Phi$, segue que

$$\mathbb{R}^T = \left\{\frac{x}{y};\ x, y \in \mathbb{R}\ e\ y \geq 0\right\}.$$

Agora, observe que as equivalências $\frac{k}{0} = \frac{-1}{0}$ se, e só se, k é negativo; $\frac{k}{0} = \frac{1}{0}$ se, e só se, k é positivo; e $\frac{k}{0} = \frac{0}{0}$ se, e só se, k é igual a zero; vêm da regra: duas frações entre números reais $\frac{x}{y}$ e $\frac{w}{z}$, onde $y, z \geq 0$, são equivalentes se, e só se, existe um número real $\alpha > 0$ tal que $x = \alpha w$ e $y = \alpha z$. Esta equivalência explica porque são necessários apenas três novos elementos para se permitir frações de denominador zero. Continuando, note que os resultados da adição vêm da regra:

$$\frac{x}{y} + \frac{w}{z} = \begin{cases} \dfrac{2x}{y}, & \dfrac{x}{y} = \dfrac{w}{z} \\ \dfrac{xz + wy}{yz}, & \dfrac{x}{y} \neq \dfrac{w}{z} \end{cases}.$$

Veja, por exemplo, a adição por infinito, onde a é um número real qualquer: $\infty + a = \frac{1}{0} + \frac{a}{1} = \frac{1\times1+a\times0}{0\times1} = \frac{1}{0} = \infty$; $\infty + (-\infty) = \frac{1}{0} + \frac{-1}{0} = \frac{1\times0+(-1)\times0}{0\times0} = \frac{0}{0} = \Phi$; $\infty + \infty = \frac{1}{0} + \frac{1}{0} = \frac{2\times1}{0} = \frac{2}{0} = \frac{1}{0} = \infty$ e $\infty + \Phi = \frac{1}{0} + \frac{0}{0} = \frac{1\times0+0\times0}{0\times0} = \frac{0}{0} = \Phi$. Como outro exemplo, a adição por *nullity*: $\Phi + a = \frac{0}{0} + \frac{a}{1} = \frac{0\times1+a\times0}{0\times1} = \frac{0}{0} = \Phi$. Os resultados da multiplicação vêm da regra:

$$\frac{x}{y} \times \frac{w}{z} = \frac{xw}{yz}.$$

Por exemplo, denotando a um número real negativo e b um número real positivo quaisquer: $\infty \times a = \frac{1}{0} \times \frac{a}{1} = \frac{1\times a}{0\times1} = \frac{a}{0} = \frac{-1}{0} = -\infty$; $\infty \times 0 = \frac{1}{0} \times \frac{0}{1} = \frac{1\times0}{0\times1} = \frac{0}{0} = \Phi$; $\infty \times b = \frac{1}{0} \times \frac{b}{1} = \frac{1\times b}{0\times1} = \frac{b}{0} = \frac{1}{0} = \infty$; $\infty \times (-\infty) = \frac{1}{0} \times \frac{-1}{0} = \frac{1\times(-1)}{0\times0} = \frac{-1}{0} = -\infty$; $\infty \times \infty = \frac{1}{0} \times \frac{1}{0} = \frac{1\times1}{0\times0} = \frac{1}{0} = \infty$ e $\infty \times \Phi = \frac{1}{0} \times \frac{0}{0} = \frac{1\times0}{0\times0} = \frac{0}{0} = \Phi$. Ou a multiplicação por *nullity*: $\Phi \times a = \frac{0}{0} \times \frac{a}{1} = \frac{0\times a}{0\times1} = \frac{0}{0} = \Phi$, onde a é um número real qualquer. Cálculos análogos mostram que a subtração e a divisão vêm das regras:

$$\frac{x}{y}-\frac{w}{z}=\frac{x}{y}+\frac{-w}{z} \text{ e}$$

$$\frac{x}{y}\div\frac{w}{z}=\begin{cases}\dfrac{x}{y}\times\dfrac{z}{w}\,, & w\geq 0\\ \dfrac{x}{y}\times\dfrac{-z}{-w}, & w<0\end{cases},$$

respectivamente. Ou seja, a aritmética axiomatizada por Anderson respeita regras análogas às regras das operações aritméticas entre frações usuais.

Do ponto de vista conceitual, Anderson não define a divisão por zero e nem o que é um número transreal. É claro que, segundo a definição usual de divisão nos números reais, uma fração com denominador zero não tem sentido algum. Entretanto, o que Anderson fez foi considerar as frações e suas regras de operações de forma sintática, isto é, abstraiu o significado das frações, olhou para elas apenas como pares de números reais em posições bem definidas. Fazendo desse jeito, Anderson se inspirou na aritmética das frações para estabelecer o conjunto dos números transreais por meio axiomático. Do ponto de vista construtivista, pode-se questionar a concepção de James Anderson, entretanto à luz do formalismo, não há problema em sua apresentação, uma vez que seus axiomas são consistentes.

Como dito, o assunto acima foi apresentado aos estudantes das disciplinas e contribuiu bastante para assimilação e entendimento do conteúdo. Quando os estudantes percebiam que a aritmética axiomatizada por Anderson era análoga a aritmética usual entre frações, eles aceitavam com maior facilidade a proposta de um conjunto numérico que permite a divisão por zero. Mais do que isso, eles ficavam surpresos com a naturalidade de se chegar a um conjunto que permita a divisão por zero por meio da generalização das frações e regras operatórias usuais.

É claro que mesmo estas regras, análogas as usuais, não dão um sentido contextual à divisão por zero. Tal divisão permanece um conceito, digamos, “um tanto abstrato”, mas uma proposta de interpretação contextual aos números transreais e sua aritmética, como citado, já foi dada. Para não alongar o presente texto, a leitura do trabalho é recomendada (REIS e KUBRUSLY, 2015).

É importante enfatizar que, é claro, as equações $\Phi\times a=\frac{0}{0}\times\frac{a}{1}=\frac{0\times a}{0\times 1}=\frac{0}{0}=\Phi$, por exemplo, não demonstram que *nullity* multiplicado por qualquer número real é igual a *nullity*. Esta regra operatória foi imposta por meio de um axioma. As equações acima apenas ilustram que a axiomática de Anderson respeita regras análogas às usuais. O leitor preocupado com o rigor e a consistência da aritmética transreal pode consultar o texto onde o conjunto dos números transreais é construído a partir dos números reais (REIS, GOMIDE e ANDERSON, 2016). Neste texto, um conjunto dos números transreais é obtido com, exatamente, os mesmos resultados propostos por James Anderson. A diferença é que os números transreais e sua aritmética são definidos a partir de objetos e operações já conhecidas, não por meio de axiomas, e aí, sim, os resultados são obtidos por demonstrações. Essa construção demonstra a consistência da aritmética transreal.

Sobre os conteúdos abordados

As disciplinas optativas foram ministradas semestralmente entre os anos de 2014 e 2017, com exceção do primeiro semestre de 2015. Ainda se está ministrando a disciplina no corrente segundo semestre de 2017 e pretende-se continuar ministrando-a nos próximos.

No primeiro semestre de 2014, o foco foi na introdução à transmatemática através do entendimento geral dos números transreais. Foi estudado o desenvolvimento histórico do conceito de número e feitas comparações entre os números transreais e outras categorias de números que passaram por momentos de afirmação, como por exemplo, os números negativos, irracionais, imaginários e infinitesimais.

No segundo semestre de 2014, o foco foi na apresentação das aplicações dos números transreais na lógica. Apresentando-se o conceito de semântica total, o modelo transreal para o espaço dos mundos possíveis e o modelo transreal para o espaço das proposições.

No segundo semestre de 2015, o estudo foi do cálculo transreal. Onde foram apresentados: uma topologia e uma métrica para o espaço transreal, definições para derivada e integral de funções transreais e alguns resultados acerca da derivada e da integral.

No primeiro semestre de 2016, a disciplina foi ministrada em parceria com um professor de filosofia. Os objetivos neste semestre foram: conhecer como se deu o desenvolvimento do conceito de número; compreender a proposta do novo conjunto; conhecer as principais correntes filosóficas para fundamentação da matemática: logicismo, formalismo, construtivismo, intuicionismo e pragmatismo; e pensar filosoficamente o surgimento dos números transreais.

No segundo semestre de 2016, o estudo foi voltado às funções elementares no domínio transreal: polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

E, no primeiro semestre de 2017, os números, a topologia e as funções transcomplexas foram estudas.

Sobre as impressões do professor

Ainda não foi feita uma pesquisa formal, qualitativa, sobre a opinião dos estudantes que cursam estas disciplinas optativas. Entretanto, o que este professor pôde perceber é que, no geral, os estudantes se mostram interessados e até entusiasmados em cursar as disciplinas. Sobretudo, por se tratar de um assunto que desperta curiosidade, por propor uma operação que, usualmente, é proibida na matemática. Os estudantes ficam, em geral, surpresos com a possibilidade da divisão por zero.

O conhecimento dos números transreais ajuda os estudantes a entender melhor conteúdos tradicionais, uma vez que eles percebem que a matemática está em evolução e notam que os conteúdos que eles estudam também passaram por processos de construção, de discussão, de discordância e de consolidação. Percebem que matemática não é mágica, que os conteúdos não são concebidos prontos, mas que são construídos a partir de ideias preliminares. O estudo da transmatemática ajuda na compreensão da relação entre o desenvolvimento da matemática e as demandas das sociedades ao longo da história. A apresentação de um novo conjunto numérico, advindo de necessidades recentes, ajuda a desmistificar a ideia de que a matemática é uma ciência pronta e acabada, permitindo que os estudantes percebam que o saber matemático é uma construção contínua da sociedade. As disciplinas enriquecem a formação dos professores de matemática e de física.

Os estudantes também se mostram venturosos, pois, ainda que como expectadores, participam da criação e desenvolvimento de uma nova área na matemática. De alguma forma, também se sentem valorizados por terem tais disciplinas em seu curso de graduação.

Cabe comentar que três estudantes manifestaram interesse em fazer seus trabalhos de conclusão de curso sobre a transmatemática, um estudante da Licenciatura em Física e dois da Licenciatura em Matemática. Um dos estudantes da matemática já iniciou os trabalhos de pesquisa. Seu objetivo é introduzir a nova teoria a estudantes de ensino médio. O principal objetivo do trabalho é fazer com que, com a apresentação dos números transreais, os estudantes do ensino básico vejam que a matemática não é estática, mas está em desenvolvimento e que eles possam entender melhor os outros conjuntos numéricos estudados, observando que, a cada momento, novos conjuntos são criados com o objetivo de resolver problemas que os conjuntos antigos não resolviam. Esse contato com os estudantes será buscado através de aulas ministradas pelo licenciando. Será avaliada a receptividade dos estudantes com exercícios sobre os números transreais e questionários de opinião. Este estudante da licenciatura também é bolsista em um projeto de iniciação científica, sobre a transmatemática, orientado pelo presente autor.

4. Referências

ANDERSON, J. A. D. W. Representing geometrical knowledge. Philosophical Transactions of the Royal Society B, v. 352, p. 1129-1140, 1997.

ANDERSON, J. A. D. W. Exact numerical computation of the rational general linear transformations. Vision Geometry XI Proceedings of the SPIE, v. 4794, p. 22-28, 2002.

ANDERSON, J. A. D. W. Perspex machine II: Visualisation. Vision Geometry XIII Proceedings of the SPIE, v. 5675, p. 100-111, 2005.

ANDERSON, J. A. D. W. Perspex machine VII: The universal perspex machine. Vision Geometry XIV Proceedings of the SPIE, v. 6066, p. 1-17, 2006.

ANDERSON, J. A. D. W. Evolutionary and Revolutionary Effects of Transcomputation. In: 2nd IMA CONFRENCE ON MATHEMATICS IN DEFENCE, 2011. Shrivenham. Anais... Defence Academy of the United Kingdom, 2011.

ANDERSON, J. A. D. W. Trans-Floating-Point Arithmetic Removes Nine Quadrillion Redundancies From 64-bit IEEE 754 Floating-Point Arithmetic. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCE AND APPLICATIONS, 2014. San Francisco. Anais... International Association of Engineers, 2014. p. 80-85.

ANDERSON, J. A. D. W. Transmathematical Basis of Infinitely Scalable Pipeline Machines. In: Slawomir Koziel; Leifur Leifsson; Michael Lees; Valeria V. Krzhizhanovskaya; Jack Dongarra; Peter M.A. Sloot (oRG.). International Conference On Computational Science, ICCS 2015 Computational Science at the Gates of Nature, Procedia Computer Science. Elsevier, 2015, vol. 51, p. 1828-1837.

ANDERSON, J. A. D. W.; GOMIDE, W. Transreal arithmetic as a consistent basis for paraconsistent logics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCE AND APPLICATIONS, 2014. San Francisco. Anais... International Association of Engineers, 2014. p. 103-108.

ANDERSON, J. A. D. W.; REIS, T. S. dos. Transreal limits expose category errors in IEEE 754 floating-point arithmetic and in mathematics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCE AND APPLICATIONS, 2014. San Francisco. Anais... International Association of Engineers, 2014. p. 86-91.

ANDERSON, J. A. D. W.; REIS, T. S. dos. Transreal Newtonian Physics Operates at Singularities. Synesis, v. 7, n. 2, p. 58-81, 2015.

ANDERSON, J. A. D. W.; VÖLKER, N.; ADAMS A. A. Perspex Machine VIII: Axioms of transreal arithmetic. Vision Geometry XV Proceedings of the SPIE. v. 6499, p. 649903.1-649903.12, 2007.

GOMIDE, W. O Princípio de Não-contradição e Sua Tradução Para a Aritmética Transreal. Investigação Filosófica, v. 4, n. 1, artigo digital 4, 2013.

GOMIDE, W; REIS, T. S. dos. Números Transreais: Sobre a Noção de Distância. Synesis, v. 5, n. 2, p. 197-210, 2013.

GOMIDE, W; REIS, T. S. dos; ANDERSON, J. A. D. W. Transreal Logical Space of All Propositions. In: Haeng Kon Kim; Mayhar A. Amouzegar; Sio-Iong Ao. (Org.). Transactions on Engineering Technologies, World Congress on Engineering and Computer Science. London: Springer, 2015, p. 227-242.

REIS, T. S. dos. Transmatemática. 2015. 124 f. Tese (Doutorado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia) - Programa de Pós-graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

REIS, T. S. dos; ANDERSON, J. A. D. W. Transdifferential and transintegral calculus. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCE AND APPLICATIONS, 2014. San Francisco. Anais... International Association of Engineers, 2014a. p. 92-96.

REIS, T. S. dos; ANDERSON, J. A. D. W. Construction of the transcomplex numbers from the complex numbers. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCE AND APPLICATIONS, 2014. San Francisco. Anais... International Association of Engineers, 2014b. 97-12.

REIS, T. S. dos; ANDERSON, J. A. D. W. Transreal Calculus. IAENG International Journal of Applied Mathematics, v. 45, n. 1, p. 51-63, 2015a.

REIS, T. S. dos; ANDERSON, J. A. D. W. Transreal Limits and Elementary Functions. In: Haeng Kon Kim; Mahyar A. Amouzegar; Sio-long Ao. (Org.). Transactions on Engineering Technologies, World Congress on Engineering and Computer Science 2014. London: Springer, 2015b, p. 209-225.

REIS, Tiago. S. dos; ANDERSON, James. A. D. W. Transcomplex topology and elementary functions In: World Congress on Engineering, 2016, Londres. Proceedings of the World Congress on Engineering 2016, p.164 - 169.

REIS, Tiago. S. dos; ANDERSON, James. A. D. W. Transcomplex Numbers: Properties, Topology and Functions. IAENG Engineering Letters, v. 25, n. 1, 90-103, 2017.

REIS, T. S. dos; GOMIDE, W.; ANDERSON, J. A. D. W. Construction of the Transreal Numbers and Algebraic Transfields. IAENG International Journal of Applied Mathematics, v. 46, n. 1, 11-23, 2016.

REIS, T. S. dos; KUBRUSLY, R. Divisão por zero e o desenvolvimento dos números transreais. Synesis, v. 7, n. 1, p. 139-154, 2015.