PROPOSTA DE RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS ENVOLVENDO EQUAÇÕES DE 2° GRAU

Autor Anne Helen de Souza Figueirêdo; Co-autor Priscila Micaelle Cavalcanti Lima da Silva; Co-autor José André Gomes Ferreira; Orientador Cícero da Silva Pereira

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba

anneheleny@hotmail.com

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba

priscilaifpb@gmail.com

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba

andregomesferreira56@hotmail.com

Universidade Estadual da Paraíba

cspmat@gmail.com

RESUMO

Este estudo traz uma variedade de procedimentos para resolver problemas de equações do segundo grau, visto que nossa inquietação tem em comum a forma que nos foi ensinado para encontrar as raízes de uma equação quadrática qualquer. Acreditamos que aprender a encontrar soluções para equações de 2° grau apenas através da álgebra empobrece o significado daquilo que o enunciado está propondo. Temos como objetivo levar para a sala de aula uma nova explanação e comparar os resultados obtidos mediante uma abordagem algébrica e geométrica, para que possamos relacionar e constatar quais as potencialidades e fragilidades apresentadas por cada um destes ramos da matemática. A tese é que existem métodos mais fáceis de resolver tais problemas sem perda de significado do mesmo, assim como acreditamos que muitos professores não conhecem os métodos geométricos para encontrar a raiz de uma equação, como, por exemplo, o método utilizado por Al-Khwarizmi, sobre este matemático falaremos no decorrer do artigo. Para alcançar os objetivos propostos, fez-se necessário uma pesquisa bibliográfica sobre história da matemática, especificamente sobre equações de segundo grau e sobre os países onde surgiram os primeiros indícios de problemas com equações quadráticas. O presente artigo se encontra em andamento tendo como justificativa, o fato de que o conteúdo Equações quadráticas já foi ensinado nas turmas do ensino fundamental II, mais precisamente nas turmas de 9° ano no segundo bimestre letivo nas escolas estaduais localizadas em Campina Grande – PB. Com isto, apresentamos neste estudo nossos resultados bibliográficos que servirão para nortear os próximos passos.

Palavras-chave: Equação quadrática, História da matemática, Abordagem geométrica.

PROPOSTA DE RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS ENVOLVENDO EQUAÇÕES DE 2° GRAU

I. INTRODUÇÃO

É comum ouvirmos que um dos métodos mais utilizados para a resolução de uma equação quadrática é a fórmula de Bhaskara[1]. Mas, essa fórmula não é assim chamada em outros países. No presente artigo, o tema foi adotado devido à curiosidade em conhecer sobre a origem da equação quadrática, a relação entre Bhaskara e a fórmula geral da equação de 2° grau e também o interesse em aprender outras formas de resoluções de problemas acerca de equações quadráticas. Os primeiros passos a serem dados foram a leitura e análise de literaturas com o objetivo de encontrar o maior número possível de respostas aos questionamentos levantados. Nossa proposta é levar para a sala de aula uma inovação na abordagem sobre equações quadráticas e comparar a relação ensino-aprendizagem entre alunos e professores.

II. METODOLOGIA

O procedimento utilizado para coleta de dados será a pesquisa bibliográfica sobre a origem da equação de segundo grau em livros que abordam a história da matemática. Faremos uso de literaturas que contenham sugestões de ensino para que os estudantes possam melhor relacionar os conteúdos estudados em sala de aula com a realidade do cotidiano em que vivem. As leituras foram categorizadas da seguinte forma:

2.1 – Aspecto histórico com problemas de equação do 2° grau;
2.2 – Diferentes casos de equações quadráticas;
2.3 – Resolução de problemas;
2.4 – Aplicação no ensino.

III. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Aspecto histórico com problemas de equação do 2° grau

Diversas literaturas falam que os babilônicos, chineses, hindus, gregos e árabes deram contribuição para a solução de vários casos de uma equação quadrática. Isto porque até meados de 830 d.C., os matemáticos não tinham descobertos uma fórmula que resolvesse a equação geral de segundo grau. Os primeiros indícios de equações quadráticas foram encontrados em registros deixados por povos antigos datados antes de Cristo. Tais registros constam impressos em tabletes, ossos, carapaças de tartarugas e papiros.

No Egito não há muitos registros sobre equações de segundo grau, o que se sabe é que foram encontrados dois papiros no qual um deles tinha registros de exercícios do tipo $ax^2 = b$. Sabe-se que

[1] Nos livros consultados para leitura, a grafia do nome Bhaskara se difere um pouco, encontramos por exemplo, Bháskara, Bhãskara e Bhaskara, este último adotaremos em nosso artigo.

os egípcios se interessavam apenas em estudos que refletissem ganhos para os problemas práticos do dia a dia, se dedicaram por exemplos em problemas de equações de primeiro grau, de aritmética, cálculo de volume e outros. O mesmo pode-se dizer com relação à China, pois fontes chinesas com exercícios de equação de grau 2 foram encontradas, porém, não se sabe ao certo quem escreveu e nem o período da publicação das mesmas.

A maior concentração de problemas de equações quadráticas foi encontrada na Grécia, diga-se de passagem, apenas os sacerdotes tinham o privilégio de estudar matemática por lá. Em referências de história da matemática, verifica-se que os gregos dominavam a técnica de resolução de raízes quadráticas de números incomensuráveis.

Quanto à mesopotâmia, os indícios de problemas de equações de segundo grau levam a crer que os babilônicos estavam interessados em saber qual a relação entre a área de um retângulo e o perímetro. Estes povos dominavam os diversos problemas que envolviam equações, pois eles podiam somar um mesmo termo a ambos os lados das equações para eliminar fatores ou remover frações, uma vez que conheciam algumas soluções para problemas que envolvem fatoração. Como não atribuíam letras para representar o termo desconhecido, costumavam somar “comprimento” com “área” ou “área” com “volume”, estas seriam as designações para os termos desconhecidos.

Na Índia, a equação quadrática ganha nova roupagem, pois alguns matemáticos introduziram a utilização do número zero e também dos sinais negativos, ambos não eram considerados até então pelos países afora.

Diferentes casos de equações quadráticas

Na Índia um matemático chamado Brahmagupta que viveu por aproximadamente 67 anos, ficou conhecido por sua famosa obra *Brahmasphuta Siddhanta*, onde dedicou uma parte para apresentar tipos de equações quadráticas, como podemos ver:

- Quadrados mais raízes são iguais a números $(ax^2 + bx = c)$.

- Quadrados mais números são iguais a raízes $(ax^2 + b = cx)$.

- Quadrados são iguais a raízes e números $(ax^2 = bx + c)$.

Segundo registros, é possível afirmar que o número zero assim como os números negativos, foram encontrados pela primeira vez em sua obra onde constam soluções gerais para equações de segundo grau.

Ainda na Índia, outro matemático escreveu sobre os casos de equações de grau dois, de nome Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi (viveu entre 780-850), dedicou sua vida aos estudos sobre astronomia, geografia, aritmética e álgebra. Em seu livro de título *Al-Kitãb al muhtasar fi hisãb al-jabr wa-l-muqãbala*, cuja tradução se aproxima de *Livro condensado de cálculos a partir da transposição de um termo a outro (al-jabr) e comparação (al- muqãbala)*, classificou as equações em 6 casos, incluindo os três primeiros casos citados na obra de Brahmagupta, vejamos os demais casos:

- Quadrados iguais a raízes $(ax^2 = bx)$.

- Quadrados iguais a números $(ax^2 = c)$.

- Raízes iguais a números $(bx = c)$.

A seguir, veremos como os povos resolviam problemas envolvendo estes casos.

Resolução de problemas

A forma como os problemas acerca de equações quadráticas eram resolvidos difere-se entre os povos. Nesta seção, apresentaremos os métodos utilizados por alguns destes povos, uma vez que não foi possível encontrar em bibliografias sobre o tema, os procedimentos usados pelos egípcios e chineses para resolver questões sobre estas equações.

Visto que os babilônicos apresentavam um conhecimento maior sobre a álgebra do que em relação à geometria, era comum lançar mão da escrita para resolver as questões. Podemos ver isto no problema abaixo encontrado numa tabuleta de código BM 13901[2]:

Eu somei a área e o lado de um quadrado e o resultado é $\frac{3}{4}$.

Note que este enunciado se encaixa perfeitamente no caso em que quadrados mais raízes são iguais a números, traduzindo para a nossa álgebra, teríamos: $x^2 + x = \frac{3}{4}$.

Solução:

1° Passo:	Eu somei a área e o lado de um quadrado e o resultado é $\frac{3}{4}$

[2] Os tabletes encontrados foram registrados através de sigla, seguido de uma numeração, neste tablete que se encontra no museu de Londres consta 24 problemas matemáticos, alguns deles envolvem equações quadráticas.

2° Passo:	Tome o coeficiente = 1
3° Passo:	Divida o coeficiente pela metade, o resultado é $\frac{1}{4}$
4° Passo:	A $\frac{1}{4}$ acrescente $\frac{3}{4}$ e o resultado é 1
5° Passo:	A raiz quadrada de 1 é 1
6° Passo:	$\frac{1}{2}$ que foi multiplicado, deve ser subtraído de 1, e o resultado é $\frac{1}{2}$
7° Passo:	$\frac{1}{2}$ é o valor do lado do quadrado, que é dado pela fórmula: X = x = $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$

Devido à escassez de registros, pouco se sabe sobre a matemática hindu. Algumas literaturas afirmam que existia uma relação entre a Índia e a Arábia no que se refere à matemática. Um dos responsáveis por essa ligação é Al-Khwarizmi que em seu livro *De número hindorum* que significa *Sobre a arte hindu de calcular* traz uma explanação sobre a notação numérica hindu, este trabalho foi reconhecido anos depois fazendo com que Al-Khwarizmi recebesse por engano honrarias da criação de uma nova numeração. Em sua obra, apresentou três exemplos resolvidos de equações quadráticas, a seguir apresentaremos dois destes três exemplos:

Exemplo 1

Um quadrado mais dez raízes do mesmo é igual a trinta e nove. Qual é o quadrado?

Traduzindo para a forma algébrica, teremos $x^2 + 10x = 39$. Perceba que este problema é do mesmo caso que apresentamos anteriormente. Vamos à solução dada por Al-Khwarizmi:

"*Tome a metade do número de raízes, obtendo cinco. Isto é multiplicado por si mesmo – o produto será vinte e cinco. Adicione isto a trinta e nove – a soma é sessenta e quatro. Tome então a raiz quadrada disto, que é igual a oito, e subtraia disto a metade do número de raízes que é cinco. A diferença é três. Esta é a raiz do quadrado procurado – e o próprio quadrado é nove*."

Se escrevermos na forma algébrica atual, teremos o seguinte:

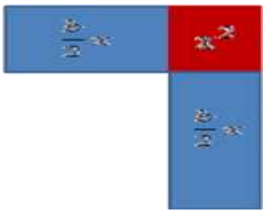
$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

Fazendo os cálculos, teremos:

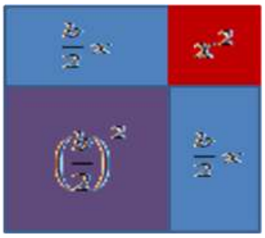
$$x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2} \ \therefore \ x = 3$$

Este mesmo problema pode ser resolvido geometricamente da seguinte forma:

Considerando a equação $x^2 + 10x = 39$, temos que $b = 10$. Desenhe um quadrado de área x^2 e dois retângulos de área $\frac{b}{2}x$. Agora agrupe-os de modo que seja possível completar o espaço com um quadrado maior, neste caso de área $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.



Até aqui temos $x^2 + 10x$. De acordo com a equação, a somas dessas áreas é 39.



A área do quadrado maior é $\left(\frac{10}{2}\right)^2$, ou seja, 25. A área da figura é igual a 39 + 25 , ou seja, 64. Logo, seus lados mede 8. Sendo assim, $\frac{b}{2} + x = 8$, logo $x = 3$ que é o mesmo resultado encontrado pela fórmula dada acima.

Exemplo 2

Um quadrado mais 21 unidades é igual a 10 raízes. Qual é o quadrado?

Escrevendo algebricamente: $x^2 + 21 = 10x$

Solução dada por Al-Khwarizmi:

"*Tome primeiro a metade do número de raízes, que aqui é 5, e que elevada ao quadrado dá 25. De 25 subtraia as 21 unidades. Isto dá 4, que tem 2 como raiz quadrada. Da metade das raízes, aqui 5, subtraia-se esta raiz quadrada, obtendo 3 como a raiz, e o próprio quadrado é 9. Se quiser,* *pode adicionar a raiz quadrada (a 5). Terá então 7 como a raíz, e 49 como o próprio quadrado ... este exemplo fornece duas raízes, algo que não encontramos anteriormente".*

Escrevendo algebricamente:

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Fazendo os cálculos, teremos:

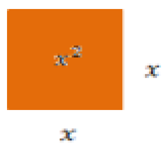
$$x = \frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} \therefore x = 7 \text{ e } x = 3$$

Ainda falando sobre Al-Khwarizmi, consta em algumas literaturas que ele tenha desenvolvido o método do completamento do quadrado para resolver problemas de equações quadráticas do tipo $ax^2 + bx = c$, um exemplo disso será apresentado mais a frente.

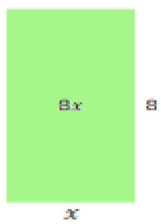
"*Já dissemos o bastante no que se refere aos vários tipos de equações. Agora, porém, é necessário que demonstremos geometricamente a verdade dos mesmos problemas que explicamos com números."* (GUELLI, 2009, p. 30)

Seja a equação $x^2 + 8x = 48$, sua solução é construída da seguinte forma:

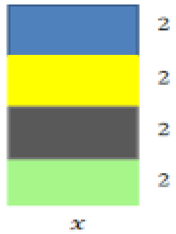
- Primeiro passo: construir um quadrado de área x^2.



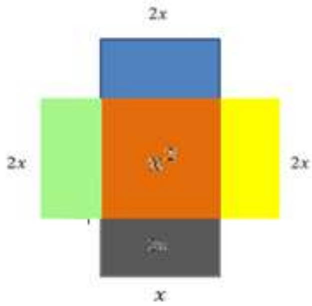
- Segundo passo: Construir um retângulo de área 8x.



- Terceiro passo: Dividir este retângulo em 4 retângulos de mesma área.



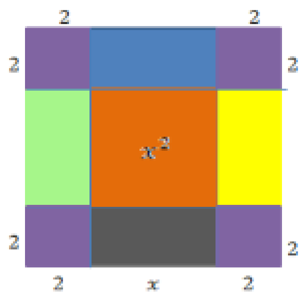
- Quarto passo: Agrupar cada um destes retângulos sobre os lados do quadrado de área x^2.



Com isso, pode-se concluir que a área da figura formada é $x^2 + 4 \cdot 2x =$

$x^2 + 8x$, de acordo com a equação, esta área mede 48. Vamos ao quinto passo.

- Quinto passo: Completar o quadrado.



Temos que a área desse quadrado é igual a: $48 + 4 \cdot (2 \cdot 2) = 48 + 16 = 64$.

Logo, o lado do quadrado mede 8, pois $\sqrt{64} = 8$.

- Sexto e último passo: Finalmente determinamos o valor de x :

  $2 + x + 2 = 8$

  $x = 4$

Note que, através deste método foi encontrado apenas uma raiz, caso fosse utilizado por exemplo, a fórmula de resolução de uma equação de segundo grau, mais conhecida no Brasil como fórmula de Bháskara, encontraríamos duas respostas, uma positiva e uma negativa, porém, por se tratar de áreas, desprezaríamos o valor negativo para x.

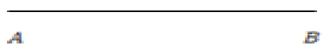
Os gregos também resolviam problemas de equações de segundo grau através de procedimentos geométricos. Mostraremos a seguir um exemplo resolvido de acordo com Euclides de Alexandria.

“*... e se do lado vezes uma constante subtrairmos a área do quadrado, o resultado será uma constante determinada*”.

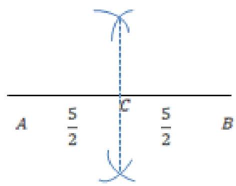
Escrevendo na notação algébrica atual, temos: $ax - x^2 = b$.

Para facilitar a compreensão da resolução, adotaremos a seguinte equação: $5x - x^2 = 4$.

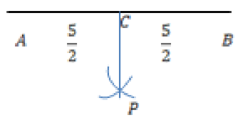
Para a construção geométrica, devemos primeiramente traçar o segmento $\overline{AB}$ de comprimento 5.



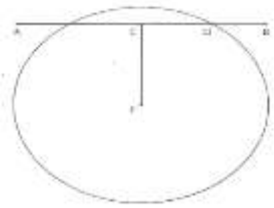
Agora, dividimos $\overline{AB}$ ao meio.



Traçamos um segmento $\overline{CP}$ perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, cujo comprimento é a raiz quadrada do valor que está no segundo membro da equação, nesse caso, $\sqrt{4} = 2$.

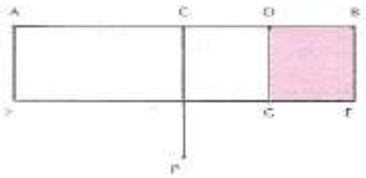


Na sequência, desenhamos uma circunferência com centro em P, onde o raio tem a mesma medida que o segmento $\overline{CB}$: a circunferência corta o segmento $\overline{AB}$ no ponto D.

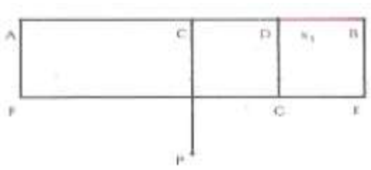


Construímos então o retângulo ABEF, de forma que DB = BE.

Completamos o quadrado DBEG.



A área do quadrado é dada por x_1^2, onde x_1é uma das raízes da equação, ou seja, o comprimento do lado do quadrado DBEG é uma das raízes da equação dada.



Aplicação no ensino

Com base nos exemplos mostrados anteriormente, pode-se perceber que estas equações dispensam o uso da fórmula geral para a resolução de uma equação quadrática, sendo assim, é possível e até rico propor em sala de aula uma nova abordagem sobre o conteúdo Equações de 2° grau, de forma que os alunos compreendam algébrica e geometricamente o que estão fazendo, dando um novo significado ao que hoje virou repetição mecânica. Neste sentido, caminhamos no norte dos Parâmetros Curriculares Nacionais, terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental de Matemática (1998, Pág. 41):

> É importante destacar que as situações de aprendizagem precisam ser centradas na construção de significados, na elaboração de estratégias e na resolução de problemas, em que o aluno desenvolve processos importantes

como intuição, analogia, indução e dedução, e não atividades voltadas para a memorização, desprovidas de compreensão ou de um trabalho que privilegie uma formalização precoce dos conceitos.

RESULTADOS PARCIAIS

Nos estudos realizados, encontram-se dois matemáticos de nomes Bhaskara I (600-680) e Bhaskara II (1114-1191). Sobre o primeiro, quase não tem informações, sabe-se que ele tem alguma relação com a equação $ax^2 + bx = y^2$, mais conhecida como equação de Pell e que conseguiu fazer uma aproximação para a função trigonométrica seno. Bhaskara II conseguiu resolver esta equação, mas não havia demonstrado seus resultados. Este último tem seu nome associado com a fórmula geral da equação de 2° grau, porém seu trabalho não foi além daquilo que seus antecessores teriam feito antes.

Em referências que tratam da equação quadrática, verifica-se que a notação da equação variava de acordo com os países e muitas vezes eram expressas de forma complicada. Foi quando François Viète (1540-1603) um jurista francês, utilizou letras para representar valores conhecidos e desconhecidos, diferenciando as incógnitas através de vogais. Sua criação lhe rendeu o título de Pai da álgebra simbólica, uma vez que o sistema de símbolos muito facilitava na resolução de problemas.

IV. CONSIDERAÇÕES PARCIAIS

Pudemos concluir que na Antiguidade os problemas sobre equações quadráticas tinham, na maioria das vezes, relação entre área e perímetro. Não se sabe ainda o motivo pelo qual o Brasil adotou a expressão “fórmula de Bhaskara”, mas um fato de grande notoriedade é que não devemos atribuir crédito apenas a Bhaskara, este resolveu problemas já existentes de equações de segundo grau e alguns da famosa equação de Pell, mas também outros matemáticos deram sua contribuição e dedicação.

Nenhum exemplo do que chamamos de demonstração foi encontrado naquela época. Em contrapartida, constam registros de várias equações específicas e também o passo a passo de como proceder para resolver cada um dos problemas. Falando em resoluções de problemas envolvendo equações de 2° grau, constata-se uma variedade de procedimentos que dispensam o uso da fórmula geral $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Alguns procedimentos são de difícil compreensão, mas existem outros que podem ser aplicado em sala de aula para a verificação da aprendizagem acerca deste conteúdo.

A origem da equação de 2° grau é uma história muito rica que envolve muitas culturas, povos e conhecimentos. Tais conhecimentos representam as várias formas de como ensinar equações quadráticas de uma maneira diferente da tradicional, contribuindo para sua ressignificação.

V. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GUELLI, Oscar. **Contando a história da matemática:** História da equação do 2° grau. 10. ed. São Paulo: Ática, 2009. 55 p.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática uma breve história**. 5. ed. São Paulo: Lf Editorial, 2014. 540 p.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. 504 p.

Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Matemática. Ensino Fundamental. Terceiro e quarto ciclos. Brasília : MEC/SEF, 1998.

SILVA, Cibelle Celestino et al (Org.). **Estudos de História e Filosofia das Ciencias:** Subsídios para aplicação no ensino. São Paulo: Livraria da Física, 2006. 381 p.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática**. 5. ed. Campinas: Unicamp, 2011. 780 p.

Disponível em: <http://www.pucrs.br/edipucrs/erematsul/comunicacoes/26KAMILACELESTINO.pdf>. Acesso em 08 / 09 / 2016.

.