ISSN 2358-8829
Conedu VII Congresso Nacional de Educação
Educação como (re)Existência: mudanças, conscientização e conhecimentos.
15, 16 e 17 de outubro de 2020
Centro Cultural de Exposições Ruth Cardoso - Maceió-AL

PROVAR PRA QUÊ? CONCEPÇÕES SOBRE A DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA

Paulo Henrique das Chagas Silva [1]
Anderson Jefty Rodrigues Silva [2]
Jeovano Pereira da Costa [3]
Levi Rodrigo Pinto de Sousa [4]

RESUMO

Demonstrar significa comprovar se determinada afirmação é verdadeira, e isso é o que faz com que a matemática continue avançando no tempo e se firmando como a ciência da exatidão, da certeza. O presente artigo tem como objetivo apresentar as diferentes concepções sobre a demonstração matemática, que vão desde a verificação de sua inserção no contexto da educação básica, até se é sempre possível demonstrar ou invalidar uma conjectura. Os questionamentos partiram da prática docente de um grupo de pesquisa que atua tanto na educação básica quanto no ensino superior e que, baseados em pesquisadores como Singh (2004) e Amado *et al.* (2015), argumentam sobre os mais diferentes aspectos da demonstração. Apresenta-se como resultados desta pesquisa a possibilidade de se utilizar a demonstração na sala de aula como um meio de promover a aprendizagem matemática; a utilização de elementos tecnológicos e digitais – computador, *softwares* e imagens – como auxiliares na visualização e abstração mas não, por si só, suficientes para promover o processo de demonstração; a apresentação das mais variadas técnicas de demonstração, bem como uma discussão sobre os Teoremas da Incompletude, de Kurt Gödel, e seu impacto na matemática.

Palavras-chave: Demonstração matemática, Educação Básica, Elementos Tecnológicos, Técnicas de Demonstração, Teoremas da Incompletude.

INTRODUÇÃO

A ideia de demonstração matemática ultrapassa todas as formas de se querer sistematizar o conhecimento matemático. Ela é organizada, imutável, direta e, acima de tudo, perfeita. Não existe método melhor de se afirmar alguma propriedade relativa aos números, ou então alguma relação exclusiva da geométrica Euclidiana, do que através de um Teorema. Quando validado, ele passa a declarar uma verdade universal – considerando os pressupostos nele contido – além de simplificar afirmações que de outro modo seriam exaustivas.

[1] Doutorando pelo Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, professor do Departamento de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, paulo.silva@ufersa.edu.br;
[2] Pós-graduando pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática para o Ensino Médio do Instituto Federal do Rio Grande do Norte - IFRN, andersonjefty2017@gmail.com;
[3] Pós-graduando pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática do Instituto Federal do Rio Grande do Norte - IFRN, jeovanocosta85@gmail.com;
[4] Mestrando pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, levirodrigops@gmail.com

Demonstrar significa, comprovar, validar alguma afirmação. Singh (2004) nos mostra uma definição simples e sucinta do que caracteriza uma demonstração:

> A ideia da demonstração matemática clássica começa com uma série de axiomas, declarações que julgamos serem verdadeiras ou que são verdades evidentes. Então, através da argumentação lógica, passo a passo, é possível chegar a uma conclusão. Se os axiomas estiverem corretos e a lógica for impecável, então a conclusão será inegável. Esta conclusão é o teorema. (SINGH, 2004, p. 41).

Uma demonstração mais complexa exige, além dos axiomas, o auxílio de outros teoremas dos quais ele é consequência. A construção da matemática é feita de forma semelhante à construção de um castelo de cartas. A base equivaleria aos axiomas, por isso, deve ser bem fundamentada; a primeira fileira erguida sobre essa base são os teoremas mais simples, demonstrados unicamente com o auxílio de alguns desses axiomas; a segunda camada é composta por teoremas que têm como base outros teoremas. De forma geral, quanto mais distante um teorema estiver da base axiomática, maior será sua relevância e mais difícil se dará a sua demonstração. O interessante é que, na matemática, esse castelo estará sempre bem fundamentado, fazendo com que ele nunca se desmorone.

Sendo assim, considerando a tese de que a demonstração é indispensável para a Matemática e, na conjectura de que ela também seja para a Educação Matemática, o artigo traz a problemática de discutir as diferentes concepções sobre a demonstração matemática, que vão desde a sua possibilidade de inserção na Educação Básica até se sempre é possível demonstrar ou invalidar uma conjectura.

Foram elencados alguns questionamentos que são pertinentes ao tema, através das experiências adquiridas pelos participantes de um grupo de pesquisa em Matemática e Educação Matemática. Questionamentos esses que nortearam as quatro perguntas que serão apresentadas nos resultados desse artigo.

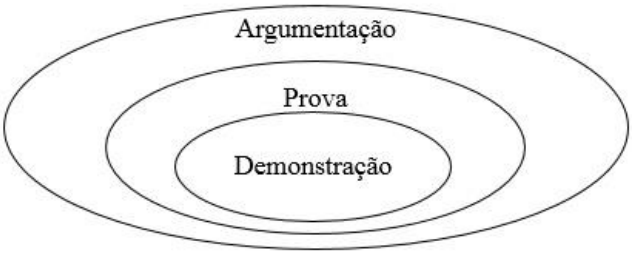
É, portanto, objetivo desta pesquisa apresentar a relevância da demonstração na Educação Básica, bem como discutir sobre o que os matemáticos enxergam como uma verdadeira demonstração.

Antes de tudo, é necessário diferenciar argumentação, prova e demonstração. Rodrigues (2012) vê a demonstração como um caso particular de argumentação, que tem o intuito de validar determinada afirmação através de uma justificativa própria de um domínio teórico, regidos por regras e convenções estabelecidas pela comunidade matemática. Amado *et al.*

(2015) *apud* Balacheff (2002) defendem que "a prova é como uma explicação aceite por uma comunidade, sendo reconhecida pela mesma como convincente. A demonstração, por seu lado, é o único tipo de prova aceite pelos matemáticos, respeitando regras dedutivas e indutivas que são trabalhadas sobre objetos matemáticos teóricos, usando uma linguagem formal e rigorosa."

Unindo tais definições, nota-se que a prova também é um tipo específico de argumentação, mais ampla que a demonstração, o qual esta também lhe é derivada. O diagrama a seguir (figura 1) apresenta com mais clareza tais relações:

Figura 1: Relações entre argumentação, prova e demonstração.



Fonte: Autoria própria.

Sobre a importância de um teorema, temos que a mesma se dá de acordo com o impacto que ele causará para o restante da Matemática. Na maioria das vezes, é demonstrando determinado teorema que abrimos as portas para a criação de um novo conjunto de teoremas, fazendo com que até exista a possibilidade de criação de um novo ramo da Matemática.

A demonstração Matemática é a ferramenta mais poderosa dessa ciência. A produção de material de valor nessa área muitas vezes é uma tarefa árdua e incerta, que faz com que o matemático caminhe para dentro de um túnel e não saiba se um dia irá sair de lá. A demonstração matemática é um túnel ainda mais escuro e difícil de se movimentar, é uma busca por algo que muitas vezes é inalcançável. É uma tarefa que muitos evitam por medo de terem suas carreiras manchadas pelo fracasso. Muitos problemas, alguns até então insolúveis, foram responsáveis por isso.

METODOLOGIA

A ideia do artigo partiu das discussões de um grupo de pesquisa em Matemática e Educação Matemática (criado em fevereiro de 2020) sobre como os estudantes encaram a demonstração matemática. O grupo é formado por pesquisadores que atuam tanto na Educação Básica como no Ensino Superior (os mesmos são os autores do presente artigo) e que, muitas vezes se questionavam e eram questionados sobre algumas concepções a respeito da demonstração.

Foi compartilhado, então, um arquivo no Google Drive com a finalidade de que os pesquisadores levantassem possíveis dúvidas que eles (ou seus alunos) tinham a respeito da demonstração matemática. Dentre as perguntas levantadas, após uma filtragem e aproximações de ideias, chegou-se a 4 questionamentos, que o presente artigo se debruça em tentar responder:

1) É possível falar de demonstração na educação básica?
2) Demonstrações por meio de imagens e/ou computador são válidas?
3) Quais são as técnicas de demonstração que existem?
4) É sempre possível demonstrar ou refutar uma conjectura?

Sendo assim, para responder a esses questionamentos e a elaboração do referencial teórico foi feito um mapeamento da discussão através da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, do Portal de Periódicos Capes e do Google Acadêmico, selecionando pesquisas arroladas a partir das palavras *demonstração matemática*, *prova matemática*, *demonstração e educação básica*, *teorema* e, destas, foram retidas as que tinham relação direta com o tema proposto. Além disso, foram utilizados revistas e livros impressos.

Portanto, a pesquisa se caracteriza como bibliográfica já que, de acordo com Gil (2010, p.29) “a pesquisa bibliográfica é elaborada com base em material já publicado. Tradicionalmente, esta modalidade de pesquisa inclui material impresso como livros, revistas, jornais, teses, dissertações e anais de eventos científicos”.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A seguir, o artigo propõe possíveis respostas para os 4 questionamentos levantados na metodologia.

É POSSÍVEL FALAR DE DEMONSTRAÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA?

A demonstração matemática vem ocupando um lugar de reduzida importância no currículo da Educação Básica. Na maioria das vezes, o primeiro contato que o aluno tem com ela se dá no ensino superior, especialmente em cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, ainda que diversos outros cursos (de Engenharia, por exemplo) possuam parte da sua grade curricular com disciplinas que permitem tal tipo de abordagem.

Um dos principais motivos que influenciam essa omissão na Educação Básica se dá pelo alto grau de abstração que determinados teoremas exigem para que se dê a sua demonstração, fazendo com que os professores levantem a hipótese de que os alunos *não estão preparados* *para isso.* Rodrigues (2012, p. 57) diz que estudos apontam que “a maioria dos professores não reserva tempo das suas aulas ao ensino da demonstração. Evidenciam ainda que a maioria dos docentes não encara a demonstração como sendo central na Educação Matemática, considerando-a adequada apenas a uma minoria de alunos.”

Por outro lado, Stylianides e Stylianides (2008) afirmam que a demonstração é considerada a base da compreensão em Matemática e é essencial para desenvolver, criar e comunicar o conhecimento matemático. Complementando isso, Amado *et al.* (2015) justifica que a sua introdução (da demonstração) tardia na sala de aula pode originar dificuldades na forma de pensar dedutivamente, tanto em tarefas que pressupõem raciocínio dedutivo quer noutras tarefas matemáticas.

Dentre os motivos que justificam a utilização da demonstração na sala de aula, o desenvolvimento do raciocínio e a compreensão da natureza da Matemática se destacam (Veloso, 1998). Esse autor ainda defende que é necessário que os alunos iniciem o Ensino Médio com uma certa experiência em atividades de investigação matemática; dentre elas, a de demonstrar.

Essas atividades acarretam, muitas vezes, na necessidade de validar resultados provenientes dos mais variados meios, que vão desde conjecturas até às observações. É necessário que as demonstrações na Educação Básica sejam precisas e permeadas de simbolismos, mas não excessivamente formais. “Assim, a demonstração deve assumir um carácter pedagógico, sendo também uma forma de educar os alunos para que estes se sintam cada vez mais seguros e motivados nas suas argumentações matemáticas.” (AMADO *et al*., 2015, p. 641)

Segundo De Villiers (2001), as funções da demonstração são: a verificação (convencimento), a explicação, a descoberta, a comunicação, o desafio intelectual e a sistematização. Dessas, focaremos nas duas primeiras.

Quando desempenha o papel de convencer, a demonstração está muito mais relacionada à investigação matemática e não se torna tão indispensável na sala de aula, já que os alunos, em geral, ficam facilmente convencidos.

É justamente quando desempenha a função de explicar que a inserção da demonstração nas aulas de Matemática é primordial, pois “uma demonstração que ajude a clarificar o motivo pelo qual um resultado é válido, ou não, contribui certamente para uma compreensão do mesmo.” (AMADO *et al*., 2015, p. 642)

A demonstração em sala de aula só tem significado quando responde as dúvidas apresentadas pelos alunos. Segundo Kline (1973) a necessidade de demonstrar só poderá emergir em situações em que os alunos têm incertezas quanto à verdade das proposições matemáticas.

Dito isso, aprender a demonstrar não pode ser visto como a finalidade do processo de ensino e aprendizagem. Muito pelo contrário, ela deve ser empregada com o intuito de promover esse processo. Deve ser um meio, não um fim. É tarefa do professor apresentar situações que favoreçam a aprendizagem dentro de contextos que possibilitem a argumentação, observação de padrões, discussão de ideias e formulação de conjecturas, elementos indispensáveis à demonstração matemática.

DEMONSTRAÇÕES POR MEIO DE IMAGENS E/OU COMPUTADOR SÃO VÁLIDAS?

Muito se questiona sobre o papel das imagens na demonstração matemática. Quando se trata da educação básica (principalmente), é comum que, ao ser questionado sobre o processo de solução de algum problema que teve como base alguma figura (um problema de geometria plana, por exemplo) o aluno diga “Mas professor, pela figura, esse segmento me pareceu congruente a esse” ou “Utilizei o Geogebra e vi que esse ângulo vale 60 graus”, dentre outros. Como base de argumentação, essas respostas são super válidas, mas quanto à demonstração propriamente dita? Uma figura é auto demonstrável?

O auxílio da figura é importante (e em problemas geométricos, é indispensável) no sentido de que permite ao indivíduo notar propriedades que lhes são evidenciadas por esse meio. Indo um pouco além, a utilização de *softwares* matemáticos, como o Geogebra, contribui para que a figura possa ser rotacionada, aumentada, medida e, assim, funcionar como subsídio para um encadeamento lógico de argumentações que culminam na demonstração. Ela auxilia no elevado grau de abstração que algumas demonstrações exigem.

Yang (2011) defende que os alunos devem começar pelas figuras, por entender os termos, os conceitos e os símbolos matemáticos para efetivamente perceberem o que se pretende demonstrar.

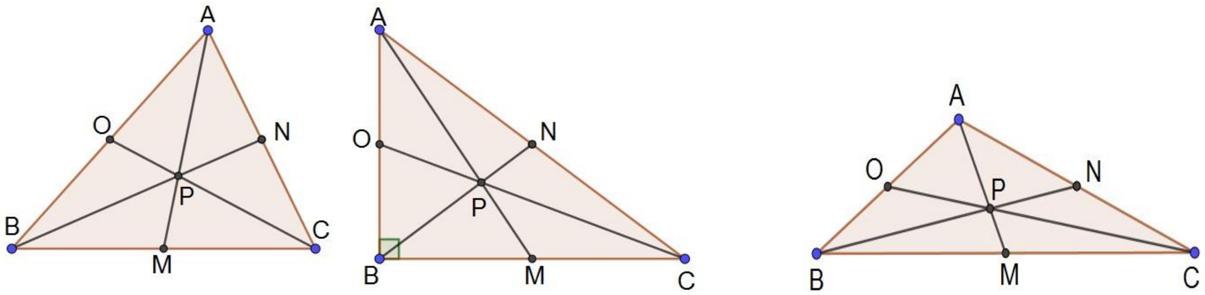
Consideremos, como exemplo, o seguinte teorema da geometria plana: *As três medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra. Esse ponto é chamado de baricentro.*

A imagem a seguir (Figura 2) foi feita no Geogebra. Ela mostra um triângulo acutângulo, um triângulo retângulo e um triângulo obtusângulo (as três possíveis classificações de um

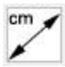
ISSN 2358-8829
Conedu VII Congresso Nacional de Educação
Educação como (re)Existência: mudanças, conscientização e conhecimentos.
15, 16 e 17 de outubro de 2020
Centro Cultural de Exposições Ruth Cardoso - Maceió-AL

triângulo, quanto aos ângulos). Mostra também as medianas desses triângulos e o baricentro (ponto P):

Figura 2: Baricentro dos triângulos acutângulo, retângulo e obtusângulo, respectivamente.



Fonte: Autoria própria.

Da figura, vemos que as três medianas se interceptam no ponto P – que é o baricentro do triângulo – e, através da função  , presente no geogebra, que determina o comprimento de segmentos, notamos que $\overline{AP} = 2\overline{PM}$, $\overline{BP} = 2\overline{PN}$ e $\overline{CP} = 2\overline{PO}$, para *esses* triângulos (isso é importante!). Todavia, o que obteríamos de conhecimento a partir daí? Qual justificativa ampara tais informações obtidas? Isso serve para qualquer triângulo? Essas perguntas apenas a imagem não tem condição de responder.

Amado *et al.* (2015, p. 640) diz que o computador (em referência a geometria dinâmica) “permite que os alunos experimentem e usem a sua intuição na descoberta e na formulação de conjeturas para que, numa fase posterior, construam processos demonstrativos com papel e lápis.” Ou seja, a imagem funciona como um excelente auxílio no processo de demonstração, pois ela expõem propriedades e particularidades que muitas vezes passaria despercebido pelo aluno. Entretanto, ela não substitui qualquer etapa de argumentação no processo de demonstração.

Em relação ao computador, nos últimos anos os mesmos vêm desempenhando um papel fundamental no processo de demonstração. Diversos cálculos que seriam impossíveis de serem realizados por um humano são feitos em questões de segundos. Algumas conjecturas foram sendo demonstradas, como é o caso do Teorema das Quatro Cores[5], e outras invalidadas, como a Conjectura de Euler[6]. Mas será que o uso do computador para demonstrar colocaria em xeque as “demonstrações formais?”

É importante considerar os seguintes fatos:

---

[5] Dado um mapa plano, dividido em regiões, quatro cores são suficientes para colori-lo de forma a que regiões vizinhas não partilhem a mesma cor.

[6] É dada pela igualdade $\sum_{i=1}^{n} a_i^k = b^k, n > k$.

1) A experimentação, em geral, precede a demonstração matemática: diversos matemáticos utilizaram figuras como base para demonstrar teoremas. O uso de régua e compasso na geometria, a observação de padrões na teoria dos números e a utilização do computador (mais recentemente) são ferramentas importantes, pois fornecem fortes evidências de que determinada conjectura está correta. A conjectura de Goldbach, por exemplo, afirma que *Todo número par maior que 2 pode ser escrito como uma soma de dois números primos* e já foi verificado, com o auxílio de computadores, que ela é válida para números pares tão grandes que ultrapassam os 17 algarismos. Entretanto, isso não constitui uma demonstração, já que os números pares são infinitos. A Matemática não trabalha com base na força bruta e não aceita como verdade absoluta evidências baseadas apenas na experimentação. Um bom exemplo do porquê desse cuidado é a conjectura do número primo superestimado, proposta por Gauss e que previa que a fórmula apresentada por ele para a "contagem" dos números primos até um certo n natural, ainda que bem fiel, parecia superestimar a quantidade exata de números primos, porém,

> J. E. Littlewood [...] mostrou que numa série suficientemente grande a fórmula de Gauss iria *subestimar* o número de primos. Em 1955, S. Skewes mostrou que isso aconteceria pouco antes de se chegar ao número $10^{10^{10.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000}}$. Este é um número além da imaginação e além de qualquer aplicação prática. (SINGH, 2004, p. 171)

2) Um dos objetivos da demonstração matemática é permitir que essa ciência avance: isso implica que a demonstração vai muito além da mera verificação de resultados. É o que se pode fazer a partir disso. "Há alguns anos o matemático Paul Halmos, observou, analogamente que, apesar da demonstração da conjectura das quatro cores, em 1976, por Appel e Haken, com o recurso de computadores, tê-lo convencido de que era verdadeira, ela não lhe proporcionou uma compreensão mais profunda das razões pelas quais é verdadeira." (SERRALHEIRO, 2007, p.31).

Com isso, é possível verificar que os cálculos por computador tanto podem serem usados como uma evidência favorável a determinada conjectura, não constituindo uma demonstração (fato 1), como podem, em alguns casos, demonstrá-la (fato 2). O que eles não conseguem é gerar conhecimento a partir disso. Deve haver um pesquisador por atrás disso tudo que compreenda essas informações e as utilize para o progresso e sistematização da Matemática.

QUAIS SÃO AS TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO QUE EXISTEM?

Lima, *et al.* (2012, p.8) afirmam que "Todas as proposições matemáticas são do tipo 'se P então Q'", ou seja, são da forma $P \Rightarrow Q$. Temos então uma proposição condicional. O valor lógico da condicional será falso – isto é, o teorema será inválido – somente quando o termo antecedente for verdadeiro e o consequente for falso, ou seja, quando a hipótese não garantir a validade da tese. Uma conjetura é uma afirmação baseada em suposições. Quando ela é demonstrada, passa a se chamar Teorema.

A seguir, estão dispostas as principais técnicas de demonstrações matemática:

1. **Demonstração exaustiva:** É o tipo de demonstração em que se verifica a validade da conjectura exaurindo todos os casos possíveis. Quando a conjectura é sobre uma coleção finita e pequena, esse é o tipo ideal de demonstração; mas não tem serventia alguma se a quantidade de casos for infinito. É da forma $P \Rightarrow Q$, para todos os casos possíveis.
2. **Demonstração direta:** É a demonstração mais tradicional. É feita supondo que a hipótese seja verdadeira e, a partir desta, demonstra-se a validade da tese. Também é da forma $P \Rightarrow Q$, a diferença é que não é necessário verificar caso a caso.
3. **Demonstração por contraposição:** Em alguns casos, a demonstração direta torna-se muito trabalhosa e complicada. Uma forma de diminuir essa dificuldade é demonstrar a conjectura usando a sua contrapositiva já que, em lógica matemática, a condicional e sua contrapositiva são equivalentes. A demonstração se dá da seguinte maneira: Considera-se a tese falsa e, a partir dela, demonstra-se que a hipótese também é falsa. É uma demonstração da forma $\sim Q \Longrightarrow \sim P$, onde o símbolo $\sim$ representa a negação da proposição dada.
4. **Demonstração por absurdo**: A técnica conhecida como *reductio ad absurdum*. Através de uma lógica impecável, se quisermos demonstrar que um teorema é verdadeiro começamos aceitando que ele seja falso, então se desenvolve argumentos baseados nisso e se, em algum momento for encontrada uma afirmação que não seja verdadeira, ou seja, uma contradição, mostra-se que aquilo que se supôs (que o teorema seja falso) é falso. Na lógica, negar a negação de uma proposição é o mesmo que afirmar que essa proposição é verdadeira. Então, o teorema só pode ser verdadeiro. É da forma $P \wedge \sim Q \Rightarrow$Absurdo. ($\wedge$ lê-se "e").

5. **Demonstração por indução:** Esse tipo de demonstração é a base de um eficiente método de prova de proposições referentes a números naturais. É geralmente usada quando se quer demonstrar que certa propriedade é válida para uma quantidade infinita de casos. Ela se dá em basicamente duas etapas: (a) mostre que a propriedade vale para o caso inicial. (b) mostre que se a propriedade é válida para um caso qualquer (k), então ela também é válida para o seu sucessor (k + 1).

É SEMPRE POSSÍVEL DEMONSTRAR OU REFUTAR UMA CONJECTURA?

A partir do final do século XIX os lógicos matemáticos começaram a inverter o processo da busca pelas demonstrações. O objetivo consistia em verificar como andava os fundamentos da Matemática, para assim poder reconstruí-la a partir de uma quantidade mínima de axiomas. Essa batalha foi liderada David Hilbert. Ele acreditava que "tudo na matemática poderia e deveria ser provado a partir dos axiomas básicos". (SINGH, 2004, p.150).

Se esse objetivo fosse alcançado, a Matemática seria considerada completa, ou seja, seria capaz de responder a cada pergunta individualmente. A Matemática seria, também, livre de contradições, isto é, uma afirmação considerada verdadeira por um método, deveria continuar sendo verdadeira por qualquer outro método.

A intenção de Hilbert era que, com a criação de uma Matemática consistente, todos os problemas não-resolvidos da área fossem solucionados. Nos próximos anos, a Matemática foi sendo reconstruída, diversos teoremas foram sendo demonstrados – entre eles, alguns dos propostos no Congresso de 1900. O sonho de Hilbert estava cada vez mais próximo de ser realizado, parecia não existir nada que impedisse que ele fosse concretizado.

"Então, em 1931, um matemático desconhecido, de 25 anos de idade, publicou um trabalho que iria destruir para sempre as esperanças de Hilbert. Kurt Gödel forçaria os matemáticos a aceitarem que sua ciência jamais poderá ser logicamente perfeita". (SINGH, 2004, p.151). Em outras palavras, Gödel tinha provado que a tarefa de criar uma Matemática consistente era impossível, ou seja, que nem tudo na Matemática poderia ser demonstrado.

Os Teoremas da Incompletude, como costumam serem chamados, é resumido por Silveira (2014) em basicamente duas declarações:

- **Teorema 1:** Qualquer teoria axiomática recursivamente enumerável e capaz de expressar algumas verdades básicas de aritmética não pode ser, ao mesmo tempo, *completa* e *consistente*. Ou seja, sempre há em uma teoria consistente proposições verdadeiras que não podem ser demonstradas nem negadas.

- **Teorema 2:** Uma teoria, recursivamente enumerável e capaz de expressar verdades básicas da aritmética e alguns enunciados da *teoria da prova*, pode provar sua própria consistência se, e somente se, for inconsistente.

Com esses dois teoremas, Gödel mostrara que a tentativa de Hilbert de tornar a Matemática completa e consistente era uma tarefa impossível. O primeiro teorema nos mostra a existência de problemas matemáticos que não se pode resolver, enquanto o segundo nos diz que nunca se saberá se vai haver alguma contradição, tomando como base a teoria axiomática.

Um bom paralelo relacionado ao primeiro teorema de Gödel pode ser encontrado avaliando a frase "Eu sou um mentiroso". É impossível classificá-la, através do seu valor lógico, como verdadeira ou falsa.

Os Teoremas de Gödel foram um marco na história da Matemática. A demonstração, uma ferramenta tão útil nessa área foi posta em descrédito pelo simples fato de que nem todo teorema poderia ser demonstrado nem negados. E o pior, não existem métodos para se saber quando se trata de tais casos. Ainda assim, os matemáticos continuam tentando. Teoremas vão sendo demonstrados, outros invalidados, e a Matemática vai caminhando para o mais próximo que ela pode chegar da completude.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo do artigo, foi evidenciado a importância da inserção da demonstração na Educação Básica como uma forma de desenvolver nos alunos o pensamento crítico, a organização de ideias e a capacidade de argumentação. O uso de imagens/softwares matemáticos permite que os mesmos observem padrões e propriedades que os auxiliem nos encadeamentos lógicos necessários para demonstrar determinada afirmação.

As discussões sobre a possibilidade de se demonstrar via computador, sobre as técnicas de demonstração e sobre os Teoremas da Incompletude auxiliaram no entendimento de que a demonstração é intrínseca à comunidade matemática e que ela vai bem além da verificação de um fato, do uso de um técnica e que, mesmo não sendo possível termos uma Matemática completa e consistente, ela é a ciência que está mais perto desse objetivo. É a demonstração que faz a Matemática sempre avançar, nunca retroceder.

Acredita-se que a conjectura de que a demonstração matemática também é indispensável para a Educação Matemática foi "demonstrada", e que os objetivos dessa pesquisa foram alcançados. No mais, as discussões e diferentes aspectos sobre demonstração aqui abordados abrem um leque de oportunidade para se discutir com maiores detalhes, em trabalhos futuros, os questionamentos aqui apresentados.

REFERÊNCIAS

AMADO, N.; SANCHEZ, J.; PINTO, J. A utilização do Geogebra na demonstração matemática em sala de aula: o estudo da reta de Euler. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 52, p. 637-657, ago. 2015.

DE VILLIERS, M. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 62, p. 31-36, Março/Abril. 2001.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010. 184p.

KLINE, M. **Why Johnny can't add:** the failure of the new math. New York: St. Martin's Press, 1973.

LIMA, E. L. **A matemática do Ensino Médio, volume 1.** 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

RODRIGUES, M. A integração curricular da demonstração. **Da Investigação às Práticas**, Lisboa (Portugal), v. 2, n. 2, p. 53-77, 2012.

SERRALHEIRO, T. D. **Formação de professores: conhecimentos, discursos e mudanças na prática de demonstrações.** Dissertação de mestrado, PUC/SP, 2007.

SILVEIRA, P. C. **Teoremas da Incompletude de Gödel.** Prezi. 06 abr. 2014. Disponível em: < https://prezi.com/rivwur-mwbsy/teoremas-da-incompletude-de-godel/> Acesso em: 20 jul. 2020.

SINGH, S. **O Último Teorema de Fermat:** A história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. 10. ed. Tradução: Jorge Luiz Calife. Rio de Janeiro; São Paulo: Record, 2004.

STYLIANIDES, G., STYLIANIDES, J. Proof in School Mathematics: Insights from Psychological Research into Students' Ability for Deductive Reasoning. **Mathematical Thinking and Learning**, Mahwah, New Jersey, v. 10, n.º 2, p. 103-133, Abril, 2008.

VELOSO, E. **Geometria** - Temas Actuais. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

YANG, K. Structures of Cognitive and Metacognitive Reading Strategy Use for Reading Comprehension of Geometry Proof. **Educational Studies in Mathematics,** Heidelberg, Germany, v. 80, n.º 3, p. 307-326, Setembro, 2011.