ISSN 2358-8829
Conedu VII Congresso Nacional de Educação
Educação como (re)Existência: mudanças, conscientização e conhecimentos.
15, 16 e 17 de outubro de 2020
Centro Cultural de Exposições Ruth Cardoso - Maceió-AL

MÉDIAS E O PRINCÍPIO DAS CASAS DOS POMBOS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Willa da Silva Medeiros[1]

INTRODUÇÃO

O conceito de média surge no 2º grau já na disciplina de Física, onde os alunos passam a estudar os conceitos de velocidade e aceleração média. Entretanto, a ideia do que seja média, mais precisamente a sua definição formal, ainda não fica clara nesse estágio, pois muitas vezes o aluno é instigado a aprender determinadas fórmulas que fornecem diretamente essas supostas médias com relação aos conceitos físicos em estudo. Já em matemática o conceito de média surge mais naturalmente em estatística, onde o aluno inicia-se no estudo das medidas de tendência central. Porém, mesmo nesse estágio, a concepção do conceito de média ainda é superficial, pois novamente esta ideia é maquiada por fórmulas que calculam diretamente a média procurada. Por exemplo, se perguntarmos a qualquer aluno, seja de ensino fundamental, seja de ensino médio, como se calcula a média aritmética de um conjunto de valores, ele certamente saberá responder e dirá que basta somar os valores e dividir pela quantidade deles. Mas ao ser indagado sobre o porquê de se fazer dessa forma, o aluno passa a mostrar dificuldades ou até mesmo desconhecimento total da resposta. Isso acontece com as demais médias também. Por que isso acontece? Uma resposta que parece ser mais adequada diz respeito a como esses conceitos são abordados, privilegiando fórmulas prontas para calcular os resultados e deixando de lado o entendimento conceitual da definição precisa do assunto.

Este tipo de atitude é prejudicial ao aprendizado do aluno, pois ela não dá oportunidade para que ele realmente entenda a definição e as características principais das médias, algo de fundamental importância para resolver uma classe muito mais ampla de problemas. O que se ver é um resumo desse estudo em um pequeno grupo de problemas que não estimula o aluno a explorar as aplicações. Sendo muitas vezes resolvidos sem ao menos saber o porquê do uso da média empregada.

[1] Mestrando do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – pela Universidade Federal Rural do Semi-árido - UFERSA, willa_medeiros@hotmail.com;

Neste contexto, o presente trabalho busca explorar de maneira mais eficiente o conceito de média, destacando a importância do mesmo para o aprendizado do aluno em matemática e o seu uso nas demais disciplinas. Nossa concepção de abordagem está pautada no problema sobre o modo como este conceito é tratado no ensino médio. Acreditamos que, num momento tão crítico quanto o atual estado do ensino e aprendizagem de matemática, é fundamental dá mais significado e relevância aos conteúdos estudados. Para isso, é necessário desenvolver uma metodologia que possibilite ao aluno modelar e resolver variados tipos de problemas de acordo com os estudos realizados. Desse modo, serão estudados vários tipos de médias por meio de resolução de problemas.

O estudo da Média Aritmética nos proporcionará analisar um interessante problema que deriva de uma propriedade característica da própria Média Aritmética, como visto em Lima et al.(2006): se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma lista de n números cuja média aritmética é $\overline{x}$, então ao menos um desses números é maior do que ou igual a $\overline{x}$. Tal problema é conhecido como *Principio das Casas dos Pombos* ou *Princípio das Gavetas de Dirichlet.* Este princípio se baseia na ideia trivial de que se queremos colocar uma determinada quantidade de objetos em gavetas, de modo que cada gaveta contenha ao menos um objeto, e se houver mais objetos do que gaveta, então haverá ao menos uma gaveta com mais de um objeto.

Esta ideia, embora tão óbvia, é uma importante técnica de demonstração de problemas complicados em teoria dos números (SANTOS, 2014). Os problemas abordados com o princípio das gavetas são de naturezas diversas, o que possibilita explorar a interdisciplinaridade. Descreveremos esse princípio como consequência do estudo sobre médias e abordaremos alguns problemas simples que podem ser estudados no ensino médio, como uma ótima ferramenta para trabalhar o raciocínio do aluno. Veremos que há muitos problemas elementares que podem ser resolvidos por meio de médias e o princípio das gavetas. Para tanto, nos apoiaremos nos trabalhos de Lima et al.(2006) e Santos (2014), citados anteriormente, e outros como: Muniz Júnior (2016), Stefffenon (2016), Pereira (2017), Stella (2004), dentre outros que versam sobre o tema aqui exposto.

Pretende-se com este trabalho apresentar a importância do entendimento do conceito de média na interpretação e resolução de problemas, não apenas em matemática, mas em outras disciplinas, como física, biologia e química, onde também se trabalha com a ideia de média. Como consequência de uma abordagem amparada na exploração correta das definições e dos resultados, espera-se que o aluno desenvolva uma aprendizagem mais sólida, rica e significativa. Que este estudo motive professores e alunos a explorar o entendimento dos conceitos em matemática, de modo a solidificar cada vez mais o ensino e a aprendizagem.

METODOLOGIA

O presente trabalho se desenvolverá a partir de pesquisas em livros, monografias, dissertações, etc., buscando desenvolver uma alternativa para o tratamento do conceito de médias no ensino médio por meio de resolução de problemas. Para isso, faremos uma busca na literatura por problemas matemáticos para cuja solução é necessário o uso dos conceitos abordados. Isso será feito com a intenção de explicar a maneira mais rica, em termos de entendimento e aprendizagem, de utilizar os vários tipos de médias e algumas de suas consequências. A resolução desses problemas será feita dando maior atenção ao uso correto das definições, e não a simples aplicação de uma fórmula. Portanto, a presente pesquisa se caracteriza como bibliográfica explicativa (GIL, 2002).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Mas afinal de contas, o que se entende por média? Calcula-se uma média sobre uma lista de valores. Segundo Lima et al.(2006, p.147), “uma média sobre uma lista de números é um valor que pode substituir todos os elementos da lista sem alterar uma certa característica da lista”. Neste caso, dependendo da característica a ser preservada pela lista, podem-se destacar quatro médias importantes: *Média Aritmética*, *Média Geométrica*, *Média Harmônica* e *Média Quadrática*. Cada uma dessas médias preserva uma característica importante. A Média Aritmética preserva a soma, a Média Geométrica preserva o produto, a Média Harmônica preserva a soma dos inversos e a Média Quadrática preserva a soma dos quadrados dos elementos de uma lista.

Denotando por $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os elementos que compõem a lista, podem se desenvolver fórmulas que calculam diretamente cada uma dessas médias. No entanto, é de fundamental importância enfatizar que tais fórmulas são bem desenvolvidas e justificadas quando é feito uso das características de cada média para tal fim. Portanto, ao resolver um problema sobre média é mais apropriado estudá-lo e concluir, de acordo com suas características, qual é a média correta que o modela, em vez de aplicar uma fórmula diretamente. Os exemplos a seguir discutem uma maneira mais eficiente e didática de pensar e resolver problemas envolvendo médias.

Problema 1 Um time de futebol marcou, nas cinco primeiras partidas de um campeonato, as seguintes quantidades de gols, respectivamente: 4, 3, 3, 2 e 1. Qual foi a média de gols desse time, por partida, nesses 5 jogos?

Resposta: Certamente não demoraríamos a responder que basta aplicar a Média Aritmética aos números 4, 3, 3, 2 e 1 para obter a resposta. E na realidade é só isso mesmo. Mas, por que a Média Aritmética? Por que não a Média Geométrica ou a Média Harmônica, por exemplo? Para responder essa pergunta, deve-se ter em mente a definição precisa de Média. Que média é requerida neste problema? Quer-se determinar um valor x, tal que, se em todos os jogos esse time marcasse x gols, então a quantidade de gols nestes 5 jogos seria a mesma (neste caso a característica preservada da lista (4, 3, 3, 2, 1) é a soma dos termos). Assim:

$$4+3+3+2+1 = x+x+x+x+x = 5x \Rightarrow x = \frac{4+3+3+2+1}{5} = \frac{13}{5} = 2{,}6.$$

A média desejada é a Média Aritmética dos valores 4, 3, 3, 2, 1, que é igual a 2,6.

Problema 2 (Extraído de Lima et al.(2006), página 149) Uma empresa aumentou sua produção durante o primeiro bimestre do ano passado. Em janeiro e em fevereiro, as taxas de aumento foram de 21% e 8%, respectivamente. Qual foi a taxa média de aumento mensal nesse bimestre?

Resposta: Qual a média desejada no problema? Quer-se determinar uma *taxa média de aumento mensal*. Ou seja, denotando por *t* essa taxa média, ela deve ser interpretada da seguinte forma: se em janeiro e fevereiro a taxa de aumento fosse *t*, então o aumento bimestral seria o mesmo. Neste caso, é preciso determinar qual foi o aumento bimestral correspondente. Se esta empresa fabricava x unidades de certo produto, então em janeiro ela passou a fabricar $x + 21\%$ de x, que significa $x + 0{,}21x = 1{,}21x$. Essa quantidade aumentou de 8% em fevereiro. Logo, passou a $1{,}21x + 0{,}08 \cdot 1{,}21x$, que corresponde a $1{,}08 \cdot 1{,}21x = 1{,}3068x$. O aumento bimestral foi de $0{,}3068 = 30{,}68\%$.

Assim, fazendo os mesmos cálculos, só que com a taxa t, é possível verificar que o aumento bimestral nesse caso seria $x(1+t)(1+t) = x(1+t)^2$. Portanto, como esse aumento deve ser igual a $30{,}68\%$, teremos:

$$(1+t)^2 = 1{,}3068 = 1{,}08 \cdot 1{,}21.$$

$$\Rightarrow 1+t = \sqrt{1{,}08 \cdot 1{,}21} \Rightarrow t = \sqrt{1{,}08 \cdot 1{,}21} - 1 \cong 14{,}31\%.$$

A igualdade $1+t=\sqrt{1{,}08\cdot 1{,}21}$ nos diz que a taxa média de aumento mensal, acrescido de uma unidade, é igual a Média Geométrica dos valores $1{,}21=1+21\%$ e $1{,}08=1+8\%$. Portanto, a média procurada é a Média Geométrica.

Problema 3 Se a Média Aritmética dos valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é $\bar{x}$, então ao menos um dos x_i´s é maior do que ou igual a $\bar{x}$. Como consequência disso, temos o Principio das Casas dos Pombos (também conhecido como Princípio das Gavetas de Dirichlet): se temos p pombos para serem colocados em m casas, de modo que não fiquem casas vazias, e se $p>m$, então em pelo menos uma casa haverá mais de um pombo.

Prova: Se todos os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fossem menores do que $\bar{x}$, então teríamos $x_i<\bar{x}, para\ i=1,2,3,\ldots,n$. Logo, $x_1+x_2+\cdots+x_n<\bar{x}+\bar{x}+\cdots+\bar{x}=n\cdot\bar{x}$. Daí,

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}<\bar{x}\Rightarrow\bar{x}<\bar{x}$$

o que é um absurdo. Logo, ao menos um dos x_i´s é maior do que ou igual a $\bar{x}$. Agora consideremos que $x_1, x_2, \ldots, x_m$ são as quantidades de pombos em cada uma das m casas, respectivamente. Logo, se $\bar{x}$ é a Média Aritmética desses valores, então

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}.$$

Ora, $x_1+x_2+\cdots+x_m=p$. Logo, $\bar{x}=\frac{p}{m}$. Como $p>m$, segue que $\frac{p}{m}>1$. Do que provamos anteriormente, ao menos um dos valores $x_1, x_2, \ldots, x_m$ é maior do que ou igual a $\bar{x}=\frac{p}{m}>1$. Portanto, pelo menos um dos x_i´$s>1$. Isso quer dizer que em ao menos uma casa haverá mais de um pombo. Como queríamos demonstrar.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho buscou, a partir da resolução de problemas, explorar a definição precisa de média, não recorrendo a fórmulas para sua utilização, e o princípio das casas dos pombos como consequência principal da Média Aritmética. Desta forma, se propõe um estudo desses conceitos de maneira a entender o significado de cada um, suas características principais e como isso pode ser usado para resolver problemas. Ver-se, desse modo, que o conhecimento do conceito de média, com destaque às médias Aritmética e Geométrica, possibilita resolver uma ampla gama de problemas, sem correr o perigo de erro, caso que poderia ocorrer ao ser fazer uso incorreto de uma fórmula.

No âmbito do Ensino Médio, os conceitos aqui tratados podem ser bastante explorados, pois são ideias simples, porém fundamentais para a resolução de problemas relacionados à ideia de média e o Principio das Casas dos Pombos.

Deseja-se que o aqui exposto abra um leque de possibilidades para a exploração e desenvolvimento de trabalhos voltados para o estudo das médias e suas aplicações, bem como a inclusão do princípio das casas dos pombos no currículo escolar como método de resolução de problemas. São inúmeras as possibilidades para o desenvolvimento de propostas com esse intuito. Podem ser produzidos artigos, monografias, dissertações, tratando de possibilidades para uma melhor maneira de abordar essas ideias nas aulas de matemática, tendo como objetivo principal a melhoria do ensino e desenvolvimento do conhecimento do aluno.

Palavras-chave: Ensino de matemática. Médias. Aplicações. Resolução de problemas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FERREIRA, Luiz da Silva. **Uma Abordagem Sobre Médias e Suas Aplicações no Ensino Médio**, 2017. 45f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2017.

GIL, Antonio Carlos. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4 ed. São Paulo: ATLAS S.A., 2002.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio, v 2**. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MUNIZ JÚNIOR, Carlos Alberto. **Matemática Discreta: Médias e Princípio das Gavetas**, 2016. 56f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2016.

STEFFENON, Rogério Ricardo. **Belos Problemas: Indução e o Princípio das Gavetas de Dirichlet**. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2016.

STELLA, Cristiane Aparecida. O Conceito de Média: Problemas de Construção x Problemas Tradicionais. **VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, São Paulo, p. 1-15, 2004.

SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à Teoria dos Números**. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.