COMO O VELHO ARQUIMEDES ENCONTROU O COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA: UM FEITO FASCINANTE DE 24 SÉCULOS!

Amanda de Araújo Queiroz [1]
Fábio Lima de Oliveira [2]
Pedro Henrique Alves Guedes [3]
Daniel Cordeiro de Morais Filho [4]

RESUMO

Evidências históricas mostram que os primeiros povos a usarem o conceito de comprimento da circunferência foram os egípcios e os babilônicos, cerca de 1800 a.C. Embora não haja registro escrito do uso de π, já existiam fórmulas aproximadas para o cálculo da circunferência. A fórmula do comprimento da circunferência foi provada pela primeira vez por Arquimedes (287-212 a.C.), baseando-se no estudo de aproximações, começado por Eudoxo (400-347 a.C.). Este trabalho tem como objetivo mostrar como obtém-se a fórmula do comprimento da circunferência a partir de procedimentos da época em que foi descoberta, fazendo uso de uma linguagem matemática moderna, trazendo um novo olhar sobre algo que foi descoberto há tantos séculos. Nesse novo olhar encontram-se ferramentas da Análise Matemática que os professores tem acesso e aparecem de forma velada em nossos argumentos. Neste artigo, apresentamos de maneira construtiva os conceitos e assuntos em geral, e esperamos criar possibilidades para que professores do ensino básico possam utilizar e compreender novas abordagens sobre o tema em questão, apresentado no ensino fundamental e médio. Dessa forma, é voltado especialmente a professores de Matemática do ensino básico. Este trabalho é fruto de uma atividade do Grupo PET-Matemática-UFCG, foi orientado pelo tutor Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho. Para a construção deste trabalho, o tutor propôs a demonstração de alguns teoremas e resultados, e a partir desses teoremas, chegamos no resultado que é a fórmula do comprimento da circunferência, descoberta por Arquimedes há 24 séculos.

Palavras-chave: Comprimento, Circunferência, Arquimedes, Matemática.

INTRODUÇÃO

O artigo 26° da Lei n° 9.394 de 1996 (LDB), indica que os currículos devem abranger a aprendizagem da área da matemática em caráter obrigatório, e relacioná-la ao mundo físico, natural, à realidade social e política. Mais atualmente, visando garantir ao

[1] Graduanda do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, amanda.araujoqueiroz91@gmail.com; parcialmente financiada pelo PET/FNDE/MEC;
[2] Graduando pelo Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, fabiolimaoliveira99@gmail.com; parcialmente financiado pelo PET/FNDE/MEC;
[3] Graduado pelo Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, pedrohenrique.alvesguedes@gmail.com; parcialmente financiado pelo PET/FNDE/MEC;
[4] Professor Orientador: Doutor, Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, demoraisfilho@gmail.com; parcialmente financiado pelo PET/FNDE/MEC.

cidadão um ensino de qualidade, a Base Nacional Comum Curricular foi elaborada com o intuito de estabelecer não apenas o conhecimento básico, mas o essencial para a formação integral do cidadão (BRASIL, 2017).

A abordagem para os conteúdos de Matemática deve conter: contextualização, interdisciplinaridade, estratégias dinâmicas, interativas e colaborativas, metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas capazes de trabalhar com as necessidades de diferentes grupos de alunos, suas famílias, cultura de origem, suas comunidades e grupos de socialização (FALCÃO, 2019).

No entanto, o ensino de Matemática na educação básica tem sido abusivamente direcionado às resoluções de problemas contextualizados nos últimos anos (MATTOS, 2020). O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) transparece bem este fato nas diversas áreas do conhecimento, inclusive nas ciências exatas.

É comum, no meio escolar e acadêmico, encontrar pesquisadores e professores relatando cada vez mais, as dificuldades e deficiências existentes no que diz respeito aos fundamentos lógicos apresentados pelo modelo atual de educação. Além disso, muitos conteúdos importantes para o ensino básico são apresentados de uma única forma, em diversos livros e trabalhos, dificultando o trabalho de professores e o aprendizado de alunos.

Em vista do que expomos anteriormente, trabalhamos com conceitos da educação básica bastante conhecidos e utilizados, que possam satisfazer a curiosidade de diferentes grupos e ser inteligível para professores e alunos dessa fase de ensino. Nossa proposta tem uma parte técnica para a qual utilizamos explicações geométricas que possam ser melhor compreendidas e utilizadas em trabalhos extraclasse.

As diferentes transposições de representações de conceitos de aproximação numérica para aproximações (limites) de figuras geométricas, permite ao professor um amplo uso do que vamos expor, a ser trabalhado segundo seu critério e a realidade de suas turmas. Esperamos contribuir no enriquecimento dos leitores, especialmente dos professores, dando solidez e uma nova alternativa para o trabalho com este conteúdo.

METODOLOGIA

O trabalho foi elaborado como atividade do Grupo PET-Matemática-UFCG sob orientação do Professor Tutor Daniel Cordeiro de Morais Filho. Para a construção deste trabalho, o tutor propôs a demonstração de alguns teoremas e resultados encontrados no livro "*Journey into mathematics: An Introduction to proofs*" de Joseph J. Rotman, e a partir desses teoremas, fizemos uma transposição geométrica e compreensível, chegando no resultado que é uma demonstração, de forma nova e, até onde nos consta, não encontrada em trabalhos nacionais, do comprimento da circunferência, descoberta por Arquimedes há 24 séculos.

REFERENCIAL TEÓRICO

Evidências históricas mostram que os primeiros povos a usarem o conceito de comprimento da circunferência foram os egípcios e os babilônicos, por volta de 1800 a.C. (EVES, 2004; PITOMBEIRA e ROQUE, 2012). Embora não haja registro escrito do uso de π, já existiam fórmulas de cálculo para circunferência (EVES, 2004).

A fórmula do comprimento da circunferência (dada por $c = 2\pi r$) foi provada pela primeira vez por Arquimedes (287 – 212 a.C.) (J. ROTMAN, 2007). Neste trabalho, objetivamos provar essa fórmula utilizando a construção feita por Arquimedes, com uma abordagem moderna, que comprova a necessidade de conhecimentos de Análise Matemática na Reta, para a formação do licenciado. Além dessa necessidade, podemos perceber a importância e transpor alguns conceitos de Análise, de maneira geométrica, evidenciando o resultado intuitivo destes.

Provavelmente, o primeiro estudo bem-sucedido de aproximação, ou de limite, foi feito por Eudoxo (400-347 a.C.) (J. ROTMAN, 2007) que enunciou esse estudo no Método das Proporções, que pode ser encontrado no livro "Os Elementos" de Euclides.

Para entender esse método é necessário buscar alguns aspectos históricos da época. Os gregos sabiam comparar figuras poligonais. Todo polígono podia ser transformado num quadrado equivalente. Essa operação era chamada de quadratura (EVES, 2004).

Fazer a quadratura de uma figura plana significava construir um quadrado equivalente à figura dada. Os gregos sabiam fazer também a quadratura de certos tipos de lúnulas (figuras limitadas por dois arcos circulares de raios diferentes) mas não tinham um método para comparar figuras quaisquer (curvilíneas ou não) em geral (PITOMBEIRA e ROQUE, 2012).

Antífon, o sofista (480 a.C. – 410 a.C.), havia antecipado a ideia de que com múltiplas duplicações do número de lados de um polígono regular inscrito, a diferença entre o círculo e o polígono poderia exaurir-se (EVES, 2004). Assim, poderia ser construído um quadrado de área igual à área do círculo.

Eudoxo sugeriu uma abordagem que permitia comparar figuras curvas com figuras poligonais. Este método está na Proposição I do livro X de Euclides, que depois se tornou o Método de Exaustão de Eudoxo.

> Sendo expostas duas magnitudes desiguais, caso da maior seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, alguma magnitude será deixada, a qual será menor do que a menor magnitude exposta (EUCLIDES, 2009, p. 354).

A partir desse estudo, Arquimedes encontrou a área e o comprimento do círculo. A suposição básica assumida por Eudoxo, bastante aceitável, é que a sequência $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \cdots$ possui termos tão pequenos quanto se deseje (J. ROTMAN, 2007).

Com base nesses estudos, temos como objetivo a demonstração, explorando aspectos analíticos e geométricos, do seguinte teorema:

Teorema Principal: Se um círculo de raio r e comprimento c. Se Δ é um triângulo retângulo com catetos medindo r e c, então

$$area(C) = area\ (\Delta).$$

A seguir listaremos alguns resultados que serão muito importantes para a demonstração desse Teorema (J. ROTMAN, 2007). Esses resultados são apresentados usando a ideia de limite de sequência, mas possuem interpretações geométricas simples de serem explicadas. As demonstrações mais rigorosas podem ser vistas na formação básica de um futuro professor (LIMA, 2019).

Proposição 1: Seja A um número positivo. A sequência $\frac{1}{2}A, \frac{1}{4}A, \cdots, \left(\frac{1}{2}\right)^n A, \cdots$ possui *termos pequenos*; ou seja, para todo número positivo E, existe um inteiro n tal que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n A < E.$$

Definição 1: Seja A um número positivo. Uma sequência crescente de números positivos $k_1 < k_2 < \cdots < A$ se aproxima de A por baixo, denotaremos $\boldsymbol{k_n \nearrow A}$, se

$$A - k_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n A, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Definição 2: Seja A um número positivo. Uma sequência decrescente de números positivos $K_1 > K_2 > \cdots > A$ se aproxima de A por cima, denotaremos $\boldsymbol{K_m} \searrow \boldsymbol{A}$, se

$$K_m - A < \left(\tfrac{1}{2}\right)^m K_1, \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Teorema 1: Seja A um número positivo.

i. Considere $k_1 < k_2 < \cdots < A$ uma sequência crescente. Se $A - k_1 < \frac{1}{2}A$, e para todo $n \geq 1$, $A - k_{n+1} < \frac{1}{2}(A - k_n)$, então $k_n \nearrow A$.

ii. Considere $K_1 > K_2 > \cdots > A$ uma sequência decrescente. Se $K_1 - A < \frac{1}{2}K_1$, e para todo $m \geq 1$, $K_{m+1} - A < \frac{1}{2}(K_m - A)$, então $K_m \searrow A$.

Teorema 2: Sejam A e B números positivos.

i. Se $B < A$, e $k_n \nearrow A$, então existe n_0 tal que $B < k_n$, para $n \geq n_0$.

ii. Se $B > A$, e $K_m \searrow A$, então existe m_0 tal que $B > K_m$, para $m \geq m_0$.

Definição 3: Seja α uma curva que une dois pontos A e B. Dizemos que α é côncava em relação ao segmento AB, se toda corda CD, onde C e D são pontos em α, encontra-se dentro da região delimitada por α e AB.

Princípio da concavidade (Arquimedes): Seja α a curva que une os pontos A e B que seja côncava em relação a AB. Se β é outra curva côncava que une os pontos A e B que se encontra na região delimitada por α e AB então:

$$Comprimento\ (\alpha) > Comprimento\ (\beta).$$

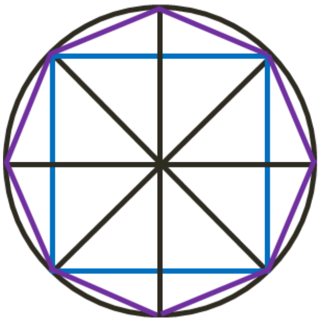
RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para provar a fórmula do comprimento da circunferência precisaremos do fato de que as áreas dos polígonos inscritos a uma circunferência C se aproximam da área de C por baixo. Precisaremos ainda, do fato de que as áreas dos polígonos circunscritos a C se aproximam da área de C por cima.

Aproximação da área da circunferência via polígonos inscritos

Seja C uma circunferência de raio r, e seja P_1 um quadrado inscrito em C (Figura 1). Ao "cortarmos" todos os lados do quadrado em seus pontos médios, intersectamos C em 4 pontos, a partir deles, e dos vértices de P_1, conseguimos inscrever um octógono regular, ao qual chamaremos de P_2. Se repetirmos este processo, construiremos uma sequência de polígonos regulares $P_1, P_2, P_3, \cdots$ inscritos em C, cada um com 2^{n+1} lados. Após essa construção, prossigamos para alguns resultados:

Figura 1 - Polígonos inscritos a uma circunferência.



Fonte: Próprio autor.

Teorema 3: Considere a sequência $area(P_1), area(P_2), \cdots$ formada pelas áreas dos polígonos P_n, com 2^{n+1} lados, inscritos a C. Temos que essa sequência se aproxima por baixo da área da circunferência C, ou seja $area(P_n) \nearrow area(C)$.

Demonstração: Podemos notar que $area(P_n) < area(C)$, para todo $n \geq 1$, pois cada polígono P_n está inscrito em C. Além disso a sequência é crescente, pois P_{n+1} contém P_n. Assim, iremos checar se esta sequência obedece aos critérios do Teorema 1(i):

Considere $area(P_1) < area(P_2) < \cdots$ uma sequência crescente. Se

$$area(C) - area(P_1) < \frac{1}{2} area(C), \tag{1}$$

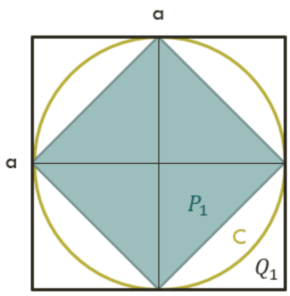
e para todo $n \geq 1$

$$area(C) - area(P_{n+1}) < \frac{1}{2}(area(C) - area(P_n)), \tag{2}$$

então $area(P_n) \nearrow area(C)$ e daí, encerraremos a demonstração.

Considere o quadrilátero Q_1, circunscrito a uma circunferência C, de aresta medindo a, e o quadrilátero P_1, inscrito em C, construído a partir dos pontos médios das arestas de Q_1 (Figura 2). Começaremos mostrando que $area(P_1) = \frac{1}{2} area(Q_1)$.

Figura 2 – P_1 mede metade da área de Q_1



Fonte: Próprio autor.

Observe que o lado do quadrado P_1 é a hipotenusa do triângulo retângulo, cujos catetos medem $\frac{1}{2}a$. Daí, pelo Teorema de Pitágoras, o quadrado do lado de P_1 mede

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2=\frac{1}{2}a^2.$$

Mas, o quadrado do lado de P_1 é exatamente a área de P_1, logo

$$area(P_1)=\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{2}area(Q_1),$$

como queríamos mostrar. Observe ainda que

$$2area(P_1)=area(Q_1)>area(C)$$

$$\Rightarrow\ \ area(P_1)>\frac{1}{2}area(C)$$

$$\Rightarrow area(C)-area(P_1)<area(C)-\frac{1}{2}area(C)=\frac{1}{2}area(C).$$

Assim, conseguimos provar (1), que é o primeiro critério do Teorema 1(i),

$$area(C)-area(P_1)<\frac{1}{2}area(C).$$

Agora, provaremos (2). Antes de prosseguirmos com a demonstração, analisemos quem é $area(C)-area(P_n)$ geometricamente.

Seja CB um lado do polígono P_n de 2^{n+1} lados, e seja CE e EB os lados de P_{n+1} (Figura 3). Em cada uma dessas 2^{n+1} regiões, considere uma réplica da região delimitada por CB e pelo arco que liga os pontos C e B passando por E.

Considere Z_n a região delimitada por $DE,\ DB$ e pelo arco que liga os pontos E e B. Podemos afirmar que existem duas cópias de Z_n exteriormente a cada aresta de P_n (Figura 4).

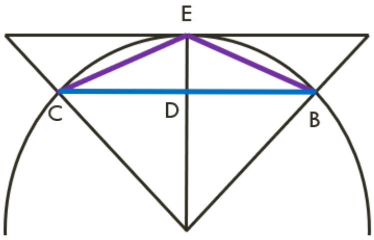
Logo,

$$\begin{aligned}area(C)-area(P_n)&=2^{n+1}[2.area(Z_n)]\\&=2^{n+2}area(Z_n).\end{aligned}$$

De maneira similar, $area(C)-area(P_{n+1})=2^{n+2}area(Z_{n+1})$, onde Z_{n+1} é a região delimitada por EB, e pelo arco que liga de E até B (Figura 5).

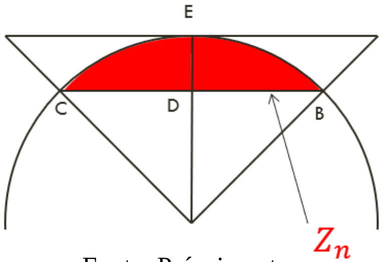
Então, mostrar que

Figura 3 – Lados de polígonos inscritos a uma circunferência



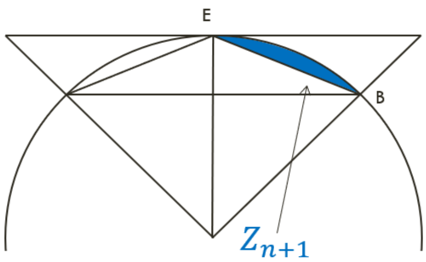
Fonte: Próprio autor.

Figura 4 - Região delimitada por $DE,\ DB$ e pelo arco que liga os pontos



Fonte: Próprio autor.

Figura 5 - Região delimitada por EB, e pelo arco que liga de E até B



Fonte: Próprio autor.

$$area(Z_{n+1}) < \frac{1}{2} area(Z_n)$$

é suficiente para garantir que

$$area(C) - area(P_{n+1}) < \frac{1}{2}[area(C) - area(P_n)], \qquad (3)$$

pois

$$area(C) - area(P_{n+1}) = 2^{n+2} area(Z_{n+1}) < \frac{1}{2} 2^{n+2} area(Z_n)$$

$$= \frac{1}{2}[area(C) - area(P_n)].$$

Assim, conseguiremos cumprir o segundo critério do Teorema 1(i).

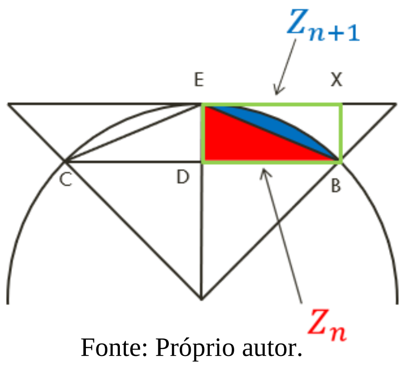
Sejam $BDEX$ um retângulo de vértices B, D, E e X e BDE um triângulo de vértices B, D e E, (Figura 6) podemos observar que

$$area(Z_n) < area(BDEX) = 2area(\Delta BDE).$$

Logo, $\frac{1}{2} area(Z_n) < area(\Delta BDE)$.

Então

Figura 6 – Área de (Z_{n+1}) é menor que metade da área de (Z_n)



Fonte: Próprio autor.

$$area(Z_n) = area(Z_{n+1}) + \ area(\Delta BDE) > area(Z_{n+1}) + \frac{1}{2} area(Z_n). \qquad (4)$$

Subtraindo $\frac{1}{2} area(Z_n)$ de ambos os lados de (4), obtemos

$$\frac{1}{2} area(Z_n) > area(Z_{n+1})$$

e, por (3), concluímos que a sequência formada pelas áreas dos polígonos P_n, com 2^{n+1} lados, inscritos a C, obedece aos critérios do Teorema 1 (i), ou seja, se aproxima por baixo da área da circunferência C. ■

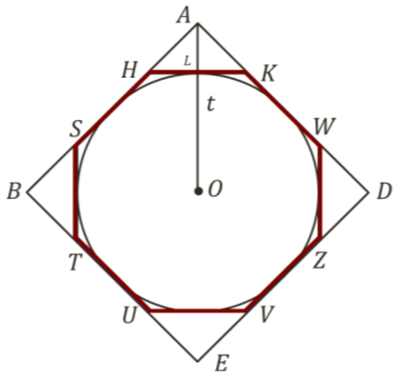
Aproximação da área da circunferência via polígonos circunscritos

Agora, vamos analisar o caso em que a área dos polígonos se aproxima da área da circunferência por cima.

Considere o círculo C, de centro em O (Figura 7). Considere, também, um quadrado Q_1 circunscrito a C, onde os lados desse quadrado são tangentes a C. Traçando um segmento t do centro O até o vértice A de Q_1, que intersecta o círculo no ponto L. Agora, traçamos a reta tangente a C que passa por L, obtendo os pontos H e K.

Repetindo este processo para os outros vértices de Q_1, conseguimos construir Q_2, a partir dos "cantos" formados por Q_1. Assim, obtemos 8 lados: HK, ST, UV, WZ, além dos lados remanescentes de Q_1, que são HS, TU, VZ, KW. Perceba que o lado HK de Q_2 é tangente a C no ponto L, e forma o triângulo ΔAHK a partir de Q_1.

Figura 7 - Polígonos circunscritos a uma circunferência.



Fonte: Próprio autor.

Essa construção pode ser repetida. Considerando um polígono circunscrito Q_n com 2^{n+1} lados, podemos construir Q_{n+1} conectando cada vértice da mesma forma que obtemos Q_2 a partir de Q_1.

Tal construção nos auxilia a demonstrar o próximo teorema (**Teorema 4**), que se dá de forma bem parecida a do Teorema 3, utilizando, dessa vez, o Teorema 1(ii), com as devidas adaptações, já que envolve aproximação por cima. Assim iremos suprimir tal demonstração, que pode ser encontrada em J. Rotman (2007).

Teorema 4: Considere a sequência $area(Q_1)$, $area(Q_2), \cdots$ formada pelas áreas dos polígonos Q_n circunscritos a C. Temos que essa sequência se aproxima por cima da área da circunferência C, ou seja $area(Q_n) \searrow area(C)$.

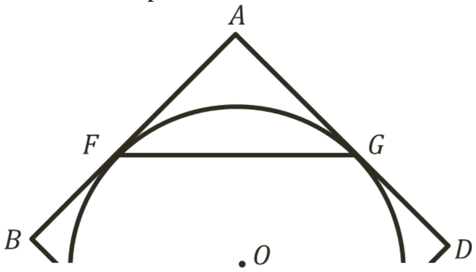
Área da circunferência

Antes de partirmos para o resultado principal deste trabalho, precisamos ainda do seguinte resultado:

Lema: Se q_n denota o perímetro do polígono circunscrito Q_n, então $q_n > c$, onde c é o comprimento da circunferência.

Demonstração: O perímetro de Q_n consiste em pares de arestas (AF é uma parte da aresta AB, AG é parte da aresta AD), cada uma tangente a C a partir de um vértice de Q_n (Figura 8). Note que $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF}$ e que as duas arestas AF e AG formam uma curva côncava em relação a FG.

Figura 8 - Perímetro de *Qn* é maior que o perímetro de *C*



Fonte: Próprio autor.

Além disso, temos um arco α (remanescente de C) que liga os pontos F e G, que está dentro da curva côncava. Logo, pelo princípio da concavidade, temos

$$\overline{FA} + \overline{AG} > comprimento\ (\alpha).$$

Repetindo esse processo para o resto das arestas de Q_n, obtemos $q_n > c$.

■

Finalmente, chegamos ao Teorema Principal:

Teorema 5 (Teorema Principal): Seja C um círculo de raio r e comprimento c. Se Δ é um triângulo retângulo com catetos medindo r e c, então

$$area(C) = area\ (\Delta).$$

Demonstração: Suponha que $area(\Delta) = \frac{1}{2}rc \neq area(C)$. Então,

$$\frac{1}{2}rc < area(C) \text{ ou } \frac{1}{2}rc > area(C).$$

Se $\frac{1}{2}rc < area(C)$, então existem polígonos P_l de 2^{l+1} lados, inscritos em C, e pelo Teorema 3, $area(P_l) \nearrow area(C)$. E, consequentemente, pelo Teorema 2(i) teremos um polígono P_l, para algum l, tal que

$$\frac{1}{2}rc < area(P_l). \qquad (5)$$

Observe, ainda, que podemos dividir P_l em 2^{l+1} triângulos isósceles (Figura 9), cada um com base b e altura h. Dessa forma,

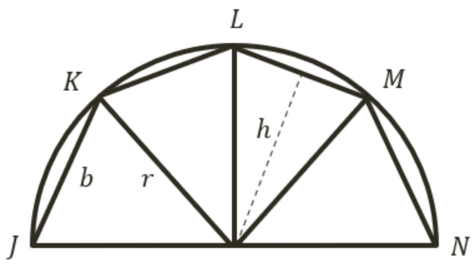
$$area(P_l) = 2^{l+1}\left(\frac{1}{2}h.b\right).$$

Mas, o perímetro p_l de P_l é dado por $2^{l+1}.b$, então:

$$area(P_l) = \frac{1}{2}h.p_l.$$

Como $h < r$ (pois r é a hipotenusa do triângulo retângulo que tem h como cateto), e $p_l < c$, temos

Figura 9 – Polígono P_l dividido em 2^{l+1} triângulos isósceles



Fonte: Próprio autor.

$$area(P_l) < \frac{1}{2}rc,$$

o que contraria (5).

Agora, suponha que $\frac{1}{2}rc > area(C)$. Assim, obtemos polígonos Q_n circunscritos a C onde a $area(Q_n) \searrow area(C)$, pelo Teorema 1. Logo pelo Teorema 2 temos um polígono Q_n de modo que

$$\frac{1}{2}rc > area(Q_n). \tag{6}$$

De forma análoga ao caso anterior, dividimos Q_n em 2^{n+1} partes, de modo que

$$area(Q_n) = \frac{1}{2}rq_n,$$

onde q_n é o perímetro de Q_n e r a altura dos triângulos isósceles. Porém, pelo Lema anterior, temos $q_n > c$. Logo,

$$\frac{1}{2}rc < area(Q_n),$$

contrariando (6).

Portanto, só podemos concluir que $area(C) = area\,(\Delta)$. Sabendo que $area(C) = \pi r^2$, e $area\,(\Delta) = \frac{1}{2}rc$, chegamos a

$$c = 2\pi r,$$

obtendo assim, a fórmula do comprimento da circunferência.

■

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A trajetória adotada pela educação básica nos últimos anos tem levado as discussões conceituais para o segundo plano da sala de aula. As aulas são curtas, os professores correm para dar conta de todo o conteúdo planejado, a forma como os temas têm aparecido no ENEM, este período de pandemia e o formato remoto das aulas, entre muitos outros fatores, podem ter levado os professores a deixarem aulas mais conceituais de lado.

Aulas apenas com problemas contextualizados, apesar de serem muito importantes, não devem ser o único formato adotado pelos professores no processo de ensino-aprendizagem e assim como citado no início deste trabalho, diversas são as abordagens que podem ser utilizadas para trabalhar com os conteúdos matemáticos.

Queremos então salientar a importância das discussões teóricas (sempre adequadas ao nível dos envolvidos) a cerca de determinado tema, das definições, postulados e teoremas de relevância para a estruturação de um determinado tema na matemática. Esperamos ter contribuído com uma nova visão deste tema, possibilitando uma abordagem diferente da tradicional para este conteúdo. Que o artigo possa instigar professores e alunos, e que possa acrescentar em suas aulas, além de enriquecer culturalmente sobre um ponto de vista mais abrangente do tema escolhido.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **LDB -** Lei nº 9.394/1996. Brasília: MEC, 1996.

CARVALHO, Sônia Pinto de. **A área e o perímetro de um círculo**. 1° Colóquio da Região Sudeste, abr. 2011. Disponível em: <https://www.sbm.org.br/docs/coloquios/SE-1.02.pdf.> Acesso em: 25 maio 2020.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Rio Claro: Unesp. Tradução de Irineu Bicudo. 2009.

EVES, Howard. **Introdução a história da matemática**. 1. ed. Campinas: Unicamp, 2004.

FALCÃO, Giselle Couto. Ensino da matemática convergente com a BNCC 2017. **CoInspiração - Revista dos professores que ensinam matemática**, Mato Grosso, v. 2, n. 1, p. 69-94, jan./jun. 2019. Disponível em: <http://sbemmatogrosso.com.br/publicacoes/index.php/coinspiracao/article/view/50/55> Acesso em: 02 ago. 2021.

J. ROTMAN, Joseph. **Journey into mathematics**: An Introduction to proofs. 1. ed. Mineola, New York: Dover Publications, 2007. 346 p.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**, v. 1. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

MATTOS, Bruno Donadelli Trajano. Um olhar analítico sobre o teorema de Tales e à área do círculo. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**. v. 18, jul. 2020. Disponível em:<https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v18a03-um-olhar-analitico-sobre-o-teorema.pdf> Acesso em: 02 ago. 2021.

PITOMBEIRA, João Bosco; ROQUE, Tatiana Marins. **Tópicos de história da matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.