AS AGULHAS DE BUFFON – UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE

Rodrigo Marques Faustino da Silva [1]
Otacilia Meira de Freitas Neta Beserra [2]
Fábio Lima de Oliveira [3]
Amanda de Araújo Queiroz [4]
Daniela da Silva Enéas [5]

RESUMO

Na Matemática são formuladas diversas teorias que possuem implicações tecnológicas importantíssimas para a vida humana, sendo algumas advindas de situações inusitadas. Neste trabalho é apresentado o problema proposto pelo Conde de Buffon (1707-1788) conhecido como o “Problema das Agulhas de Buffon”, cuja resolução por meio da teoria de probabilidade acarreta duas aplicações tecnológicas e uma forma de estimar a famosa constante π. A partir do desenvolvimento desse problema, é exposta uma proposta metodológica a fim de que os professores possam ampliar a gama de aplicações a serem trabalhadas no ensino de probabilidade. Esse trabalho foi desenvolvido em duas etapas, uma por meio da pesquisa matemática sobre o “Problema das Agulhas de Buffon” realizada no Workshop Didático-Pedagógico realizado pelo grupo PET-Matemática da UFCG e complementada com a aplicação desse problema no Ensino Básico por meio dos petianos egressos. Dessa forma, espera-se que os leitores conheçam esse problema, vislumbrem-se com as aplicações e fiquem motivados a apresentá-las em sala de aula por meio das metodologias Investigação Matemática e Projeto de Pesquisa.

Palavras-chave: Agulhas de Buffon; Probabilidade; Proposta Metodológica; Geometria; Tomografia computadorizada.

INTRODUÇÃO

No século XVIII, segundo Paes (2015), o matemático e naturalista francês George-Louis Leclerc (1707-1788), o Conde de Buffon, realizava estudos sobre probabilidade, os quais chamavam a atenção de todos devido à abordagem geométrica dos problemas feita por ele. Em maio de 1733, o Conde de Buffon submeteu à

[1] Mestrando pelo Curso de Matemática pela Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, rodriigosilv@gmail.com
[2] Graduada pelo Curso de Matemática (Lic) da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, otaciliameira@hotmail.com
[3] Graduando pelo Curso de Matemática (Lic) da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, fabiolimaoliveira99@gmail.com;
[4] Graduanda pelo Curso de Matemática (Lic) da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, amanda.araujoqueiroz91@gmail.com;
[5] Professor orientador: Mestra pelo Curso de Matemática pela Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, autorprincipal@email.com.

Acedémie Royale des Sciences um artigo que conteria um problema de probabilidade geométrica conhecido atualmente como Problema das Agulhas de Buffon.

Apesar da palavra agulha não evidenciar a grande relevância que há no problema, o Problema das Agulhas de Buffon possui duas aplicações tecnológicas bastante inusitadas. Neste trabalho, exibiremos duas aplicações tecnológicas desse problema e também uma forma de estimar a constante π.

As agulhas de Buffon se apresentam como uma aplicação inesperada da probabilidade geométrica o qual, a partir de uma curiosa pergunta, pôde-se desenvolver a Tomografia computadorizada que salvou muitas vidas.

METODOLOGIA

Esse trabalho foi desenvolvido em duas etapas, uma por meio da pesquisa matemática sobre o “Problema das agulhas de Buffon” realizada no Workshop Didático-Pedagógico realizado pelo grupo PET-Matemática da UFCG e complementada com a aplicação desse problema no Ensino Básico por meio dos petianos egressos.

A pesquisa sobre a solução probabilística e as aplicações do problema das agulhas de Buffon foi apresentado no III Encontro Nacional de Ciência e Tecnologia da UEPB e a complementação com uma proposta metodológica foi realizada por meio de pesquisas bibliográficas e discussões entre os autores.

Nestas discussões foram expostas a importância do uso das competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular, como também o uso das metodologias ativas Projeto e Investigação Matemática e o uso de ferramentas computacionais, a saber Wolframalpha, a fim de calcular área de figuras não-poligonais.

REFERENCIAL TEÓRICO

A abordagem teórico-metodológica utilizada para desenvolvimento das aulas que sugerimos é a Investigação Científica, pois como afirma Varizo (2007, *apud* MAGALHÕES, ROCHA E VARIZO, 2016), a investigação matemática oferece a oportunidade ao aluno ter uma experiência semelhante a do investigador, o que motiva o aluno a estudar Matemática, tendo a visão do que é fazer Matemática.

E por esta motivo, é interessante que o professor aplique essa metodologia em sala de aula, mesmo que de maneira simples, como na aplicação de um exercício, fazendo com que o aluno seja protagonista do seu aprendizado, pois como afirma Magalhões, Rocha e Varizo (2016, p. 2):

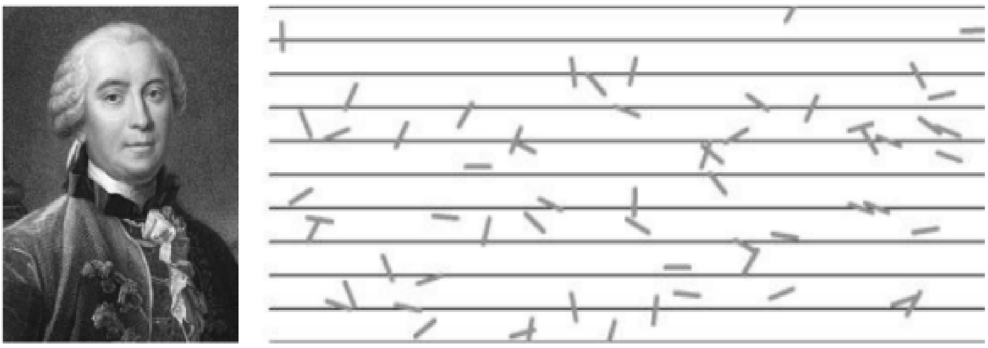
> As atividades de investigação matemática devem estar presentes na prática do professor em momentos que ele considerar adequados, por exemplo, uma vez por semana ou quinzenalmente. Faz-se indispensável que tais atividades estejam inseridas no currículo e que o professor possa articulá-las com outras que, necessariamente, terão que existir na sala de aula.

Neste sentido, a seguir é enunciado e resolvido o Problema das Agulhas de Buffon. Após isso, é apresentado uma maneira de aplicá-lo em sala de aula utilizando a metodologia da investigação matemática.

O problema das Agulhas de Buffon pode ser enunciado como:

PROBLEMA: Considere um plano com retas paralelas com espaçamento d. Lança-se uma agulha de comprimento l nesse plano. Qual é a probabilidade de a agulha cruzar uma dessas retas?

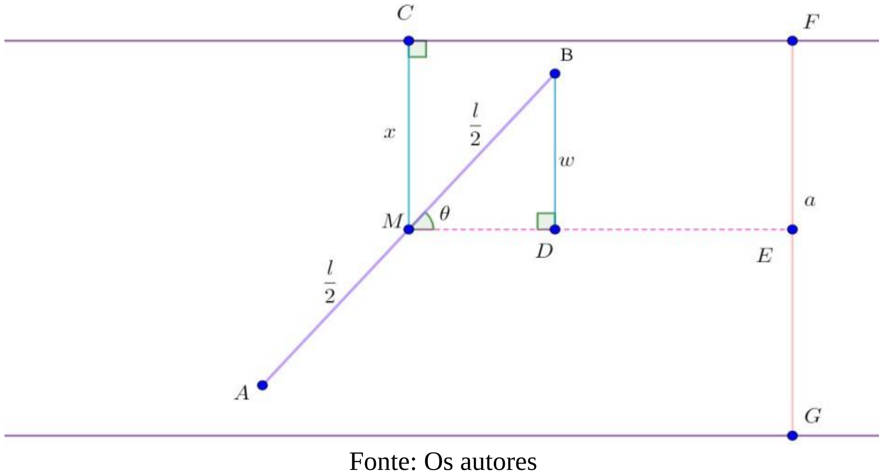
Figura 1 – O conde de Buffon e a representação do problema das agulhas de Buffon



Fonte: Behrends (2014)

Modelemos o problema geometricamente como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Modelação geométrica do problema das Agulhas de Buffon



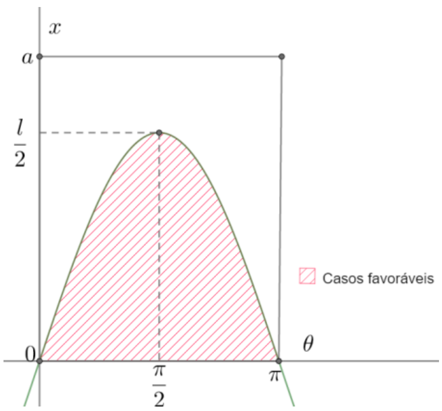
Fonte: Os autores

Na Figura 2, o segmento $\overline{AB}$ representa a agulha, M é o ponto médio de $\overline{AB}$, a representa a distância entre as retas paralelas e x representa a menor distância do ponto M a uma das restas paralelas. Consideremos também o segmento $\overline{MD}$, paralelo à reta $\overline{CF}$, e $\overline{BD}$, perpendicular à $\overline{MD}$, cuja medida é w. Por fim, θ é o ângulo. Vejamos que

$$sen\theta = \frac{w}{\frac{l}{2}} \Rightarrow w = \frac{l}{2} sen\theta.$$

Para que a agulha toque uma das retas paralelas, é necessário que x seja menor do que w. Como x é a menor distância do ponto M a uma das retas, segue que $x \in [0, \frac{a}{2}]$ Observemos que $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Assim, consideremos um sistema cartesiano com variáveis θ e x, como apresentado na Figura 3.

Figura 3 – Sistema cartesiano com variáveis θ e x e representação dos casos totais e favoráveis do problema das Agulhas de Buffon



Fonte: Os autores

Dessa forma, todos os casos possíveis podem ser representados pela área A_t do retângulo $ABCD$ e os casos favoráveis estão representados pela área A_f sob o gráfico da função w. Assim,

$$A_t = \pi \cdot \frac{a}{2}.$$

$$A_f = \int_0^{\pi} w \, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{l}{2} sen\theta \, d\theta = l.$$

Dessa forma, a probabilidade será

$$p = \frac{A_f}{A_t} = \frac{l}{\pi \cdot \frac{a}{2}} = \frac{2l}{a\pi} \Rightarrow$$

$$p = \frac{2l}{a\pi}. \qquad (I)$$

Estimando π

Note que, em (I), é evidenciado uma constante famosa, o π. Ao estimar a probabilidade experimentalmente lançando agulhas na malha, contabilizando a quantidade de agulhas que tocaram nas linhas e, em seguida, dividindo essa quantidade pelo total de agulhas lançadas, poderemos obter uma aproximação para π da seguinte forma

$$\pi = \frac{2l}{ap} \ .$$

Em particular, no caso em que $a = 2l$. Teremos a bela relação

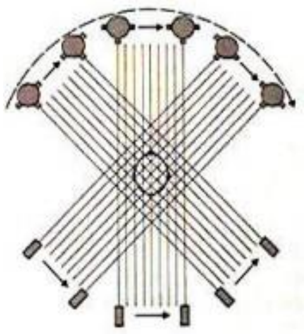
$$\pi = \frac{1}{p}.$$

Nessa última igualdade, é mostrada uma relação entre o número π e um evento da fenômeno probabilístico da natureza.

Tomografia computadorizada

Uma incrível aplicação do problema pode ser encontrada na tomografia computadorizada, como pode ser visto em Silva (2014). Neste caso, em vez de lançarmos o objeto no feixe, lançaremos o feixe no objeto, como mostra a Figura 4, e obteremos a probabilidade de o feixe intersectar o objeto experimentalmente.

Figura 4 – Feixes lançados sobre um objeto



Fonte: Silva (2014)

Dessa forma, o comprimento do objeto é dado por

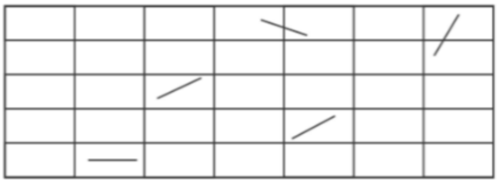
$$l = \frac{pa\pi}{2}.$$

Tendo em vista essa lógica, em 1979, o Bioquímico e Físico nuclear Allan MacLeod Comarck e o engenheiro eletricista Godfrey Newbold Housenfield ganharam conjunta- mente o prêmio Nobel da Medicina por aplicar feixes de raios x em tumores e conseguir projetar o tumor no computador. E foi assim que as agulhas fizeram surgir a tomografia computadorizada.

A medição do escoamento de uma Bacia Hidrográfica

Segundo Moraes (2014), a generalização de Laplace do Problema das Agulhas de Buffon, mostrada na Figura 5, é uma ferramenta eficaz para determinar a medição do escoamento de uma Bacia Hidrográfica.

Figura 5 – Generalização de Laplace do problema das Agulhas de Buffon



Fonte: Moraes (2014)

Nesse caso, a probabilidade é dada por

$$P = \frac{2L(D_1 + D_2)}{\pi D_1 D_2}.$$

Onde D_1 e D_2 são as medidas dos lados do retângulo e L é o comprimento do escoa- mento da Bacia Hidrográfica. Dessa forma, considerando o escoamento da bacia hidrográfica como L da equação anterior, podemos estimar o valor do comprimento do escoamentoda Bacia Hidrográfica ao calcular experimentalmente a probabilidade, como pode ser vistoa seguir:

$$L = \frac{P\pi D_1 D_2}{2(D_1 + D_2)}.$$

E, assim, obtém-se uma forma para que as agulhas nos ajudem a medir o escoamento das bacias hidrográficas.

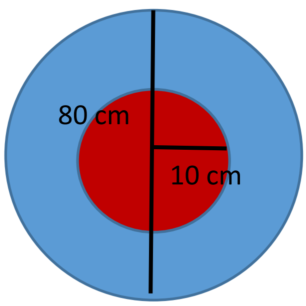
RESULTADOS E DISCUSSÃO

Proposta Metodológica:

1ª Aula: Explorar exemplos no estudo de Probabilidade que envolvem espaço amostral contínuo:

Exemplo 1: Carla deseja lançar um dardo em um alvo circular com 80 cm de diâmetro, em que há um disco circular, no centro, com 10 cm de raio. Sabendo que ela acertou o alvo, qual a probabilidade de que ela tenha acertado o disco central?

Figura 6 – Alvo circular

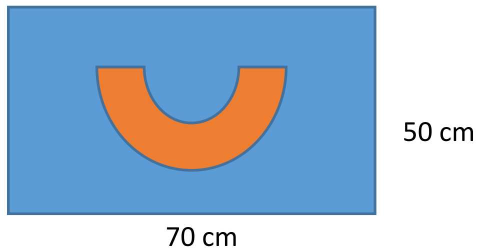


Fonte – Os autores

Para calcularmos a probabilidade, nesse caso, basta dividirmos a área do disco menor, pela área do disco maior. É importante fazer os alunos observarem que nesse caso, é possível encontrar a probabilidade, posto que é sabido como calcular a área das figuras em questão.

Exemplo 2: Qual a probabilidade de Carla atingir a área laranja, da figura a seguir.

Figura 7 – Área laranja



Fonte – Os autores

Perceba que, nesta situação, embora possamos calcular a área de maneira mais rápida, a área da figura maior, para encontrar a área da figura laranja, teremos um problema no sentido de não haver fórmulas estudadas no ensino básico, que nos possibilite determinar a área.

Para isto, introduzimos de maneira rápida, a ideia por trás da ferramenta matemática Integral, que serve para determinar área sob curvas. Essa ferramenta é estudada no ensino superior, mas por meio de softwares, podemos obter o valor de certas integrais, que nos darão o valor de áreas como a que aparece na Figura 2. Uma das ferramentas úteis no cálculo de integrais é chamada "WolframAlpha", que pode ser explorada na primeira aula.

Assim, são desenvolvidas as seguintes competências da Base Nacional Comum Curricular:

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

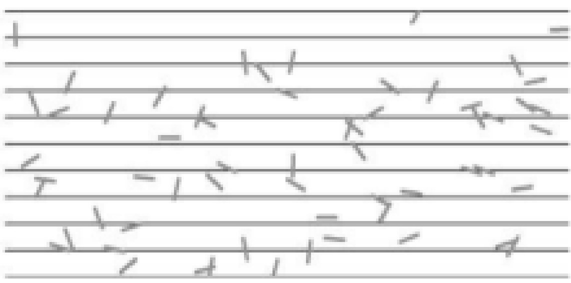
Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

2ª Aula: Enunciar o problema e desafiar os alunos a avaliar quais são os fatores que influenciam na agulha tocar as linhas.

Nessa etapa, o professor modela o problema junto dos alunos e resolve-o. Além disso, deve ser suscitado nos alunos indagações a respeito de parâmetros que influenciam na resolução do problema: Comprimento da agulha, distância entre as linhas e posição da agulha (Angulação), entre outros.

Aqui, o professor pode separar a turma em grupo de 4 alunos para que façam um protótipo de malhas e agulhas, e assim realizar o experimento.

Figura 8 – Protótipo de malhas e agulhas



Fonte – Os autores

Assim, são desenvolvidas as seguintes competências da Base Nacional Comum Curricular:

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

3ª Aula: Os alunos são convidados a estimar a probabilidade por meio da experimentação e, em seguida, os alunos estimarão o valor de π.

Isso pode ser feito da seguinte forma: os alunos lançam as agulhas na malha, contabilizam a quantidade de agulhas que toquem as linhas e, por fim, dividindo essa quantidade pelo número de agulhas lançadas, isso dará o valor da probabilidade $\boldsymbol{p}$. Já que l é o comprimento da agulha e a é a distância entre as retas paralelas da malha, pode-se estimar π, através da relação:

$$\pi = \frac{2l}{ap}.$$

Assim, são desenvolvidas as seguintes competências da Base Nacional Comum Curricular:

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

4ª Aula: Nessa etapa, é finalizado o projeto ao ser apresentado duas aplicações do problema das agulhas de Buffon.

Aplicações 1: Medição do escoamento de uma Bacia Hidrográfica

Aplicação 2: Tomografia computadorizada

Assim, são desenvolvidas as seguintes competências da Base Nacional Comum Curricular:

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por mais que a ciência não mostre a aplicação imediata do que está sendo estudado, ela poderá trazer implicações que são de extrema importância para a sociedade. Dessa forma, a curiosidade juntamente com a criatividade é ainda o melhor caminho para desenvolver a ciência. Nesta perspectiva, é de suma importância aplicar a metodologia investigação matemática no Ensino Básico a fim de que os adolescentes descubram que a ciência juntamente com a curiosidade, mesmo tendo questionamentos aparentemente inúteis, podem acarretar em enormes evoluções tecnológicas e até salvar vidas, assim como aconteceu com as agulhas de Buffon.

Assim, essa proposta metodológica traz a oportunidade de fascinar-se com a ciência e a de contemplar três lindas aplicações da probabilidade. Esperamos que os professores apliquem tal proposta e enviem um feedback para os autores a fim de que aperfeiçoemos tal projeto.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao PET-Matemática-UFCG que tanto contribuiu na formação de cada um dos integrantes, em especial, ao professor Daniel Cordeiro.

REFERÊNCIAS

BAPTISTA, C. R. **Inclusão e escolarização:** múltiplas perspectivas. 2 ed. Porto Alegre: Mediação, 2006.

BEHRENDS, E.; BUESCU, J. Terá Buffon realmente lançado agulhas?. **Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática**, 2014. Disponível em: <https://revistas.rcaap.pt/boletimspm/article/view/6808>. Acesso em: 27 set. 2021.

BRASIL. Conselho Nacional da Educação. Câmera de Educação Básica. Resolução nº 2, de 11 de setembro de 2001. **Diretrizes Nacionais para Educação Especial na Educação Básica**. Diário Oficial da União, Brasília, 14 de setembro de 2001. Seção IE, p. 39-40. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CEB0201.pdf>. Acesso em: 06 set. 2021.

CASTRO, P. A.; ALVES, C. O. S. Formação Docente e Práticas Pedagógicas Inclusivas**. e-Mosaicos**, v. 7, n. 16, p. 3-25, 2018.

MAGALHÃES, A. P. A. S.; ROCHA, L. P.; VARIZO, Z. C. M. **A Investigação Matemática Como Estratégia De Ensino E Aprendizagem Da Matemática**. XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/4873_3348_ID.pdf>. Acesso em: 03 nov. 2021

MORAES, José Agissander Oliveira de. **Probabilidade Geométrica e Aplicações**. 2014. Dissertação (PROFMAT) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Goiás Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia, 2014.

PAES, A. Z. et al. **O problema das Agulhas de Buffon**. Instituto de Física - Universidade São Paulo, São Paulo, 2015. Disponível em: <http://wiki.stoa.usp.br/images/archive/5/5a/20150702010351!MEFE_O_problema_das_Agulhas_de_Buffon.pdf>. Acesso em: 12 out. 2021.

SILVA, A. K. G. **Probabilidade Geométrica:** Generalizações do problemada Agulha de Buffon e aplicações. 2014. Dissertação (Mestrado profissional) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Ceará Centro de Ciências, Fortaleza, 2014.