TRIPLOS PITAGÓRICOS: UMA ABORDAGEM NO ENSINO BÁSICO

Pedro Vítor dos Santos Barbosa [1]
Josefa Itailma da Rocha [2]

RESUMO

Dentre os teoremas apresentados na Matemática do ensino básico, o Teorema de Pitágoras, que relaciona a medida dos lados dos catetos com a medida da hipotenusa, é certamente um dos mais conhecidos. Porém, os números inteiros que satisfazem tal relação, os triplos pitagóricos, não são trabalhados nessa etapa da educação. Neste trabalho, foram apresentadas observações e propriedades acerca dos triplos Pitagóricos e de sua construção. Ademais, foi desenvolvida uma série de atividades voltadas para o ensino básico, visando a formação de uma sequência didática que possa ser aplicada em sala de aula. Este trabalho foi desenvolvido através de uma iniciação científica do Grupo PET Matemática e Estatística – UFCG. O principal objetivo é viabilizar o estudo dos triplos Pitagóricos para alunos dos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio, além de apresentar resultados que possam ser construídos algebricamente, gerando motivação e discussão em sala de aula.

Palavras-chave: Triplos Pitagóricos, Sequência didática, Investigação matemática.

INTRODUÇÃO

O estudo da Matemática é extremamente amplo, por isso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017) determina os principais conteúdos a serem abordados no ensino básico brasileiro. Esses são organizados como objetos de conhecimentos e habilidades. Este trabalho propõe-se a auxiliar no desenvolvimento das habilidades (EF09MA13) e (EF09MA14) da BNCC que consistem em:

> (EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
> (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Essas habilidades são, comumente, abordadas apenas com o ensino do Teorema de Pitágoras, este que é um dos resultados matemáticos mais conhecidos até fora do meio acadêmico. Porém, existem alguns outros resultados e ferramentas englobados nesse tópico que são cabíveis de serem lecionados nos anos finais do ensino fundamental.

No presente trabalho, o enfoque deu-se nos triplos pitagóricos e algumas de suas propriedades e relações com os triângulos retângulos, onde objetivou-se o ensino através de

---

[1]Graduando do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande –UFCG pedrovt91@gmail.com; parcialmente financiado pelo PET/FNDE/MEC.
[2] Professora Orientadora: Doutora, Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, itailma@mat.ufcg.edu.br.

exemplos e desafios de tais propriedades, lei de formação, entre outras aplicações. Este conteúdo foi disposto em etapas, visando desenvolver uma sequência didática que gere uma lógica sequencial para ser aplicada em sala de aula, possibilitando melhorias no aprendizado dos alunos.

METODOLOGIA

O trabalho foi desenvolvido por meio de iniciação científica atrelada ao PET – Matemática e Estatística – UFCG com orientação da professora Josefa Itailma da Rocha. Inicialmente foi desenvolvido um estudo mais detalhado sobre os triplos pitagóricos e suas propriedades. Além disso, foram analisadas também formas de abordagem para com o ensino básico, desenvolvendo exemplos e desafios onde os alunos pudessem gerar seus próprios resultados.

REFERENCIAL TEÓRICO

Quando tratamos de geometria, uma das figuras mais trabalhadas pelos alunos de ensino fundamental e médio é o triângulo retângulo, de qual são estudadas diversas relações métricas. Uma das relações mais conhecidas é o famoso Teorema de Pitágoras, enunciado formalmente da seguinte maneira:

Teorema de Pitágoras: num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Ou seja, dado um triângulo retângulo de hipotenusa de medida c e catetos medindo a e b, tem-se

$$a^2 + b^2 = c^2$$

A equação acima é amplamente conhecida pelos alunos por meio do referido teorema, mas existe ainda a possibilidade de aprofundamento de resultados e propriedades provenientes dessa relação que podem ser abordados sem muitas dificuldades ainda no ensino básico. Um desses resultados trata dos triplos pitagóricos, assunto esse que é foco do presente artigo.

Definição 1: Um triplo de números naturais (x, y, z) chama-se um **triplo Pitagórico** se

$$x^2 + y^2 = z^2$$

O triplo (x, y, z) chama-se **primitivo** se $mdc(x, y, z) = 1$, ou seja, se x, y e z não têm divisores em comum diferentes de 1.

Exemplo 1: $(4, 3, 5)$, $(12, 5, 13)$, $(8, 6, 10)$ e $(24, 10, 26)$ são triplos Pitagóricos, sendo os dois primeiros triplos Pitagóricos primitivos.

Dado um triplo Pitagórico (x_1, y_1, z_1) primitivo e qualquer $n > 1 \in \mathbb{N}$, (nx_1, ny_1, nz_1) é também um triplo Pitagórico, mas nesse caso são **não primitivos**. Assim é possível obter infinitos triplos Pitagóricos não primitivos a partir de um primitivo. Reciprocamente, é também possível construir um triplo Pitagórico primitivo por meio de um não primitivo. De fato, sejam (x, y, z) um triplo Pitagórico e $d = mdc(x, y, z)$. Considere $x_1 = \frac{x}{d}$, $y_1 = \frac{y}{d}$, $z_1 = \frac{z}{d}$, então $mdc(x_1, y_1, z_1) = 1$ e $x_1^2 + y_1^2 = \left(\frac{x}{d}\right)^2 + \left(\frac{y}{d}\right)^2 = \frac{(x^2+y^2)}{d^2} = \left(\frac{z}{d}\right)^2 = z_1^2$, mostrando que (x_1, y_1, z_1) é um triplo Pitagórico primitivo. Além disso, temos $(x, y, z) = (dx_1, dy_1, dz_1)$.

Dessa forma, concluímos que todos os triplos Pitagóricos são gerados a partir dos primitivos. Tendo isso em vista, restringiremos o foco dos próximos resultados a esses. Nosso objetivo é apresentar uma condição necessária e suficiente para que um triplo Pitagórico (x, y, z) seja primitivo. Para isso, vamos precisar das seguintes observações.

Observação 1: Em um triplo Pitagórico primitivo (x, y, z), os termos x, y, z são relativamente primos dois a dois, ou seja,

$$mdc(x, y) = mdc(y, z) = mdc(x, z) = 1 .$$

Perceba que se $d = mdc(x, y) > 1$, então existe um divisor primo p de d. Logo, p divide x e p divide y, daí temos que p divide $x^2 + y^2 = z^2$, então p divide z. Assim temos a contradição, pois $p \leq mdc(x, y, z) = 1$. Logo, $mdc(x, y) = 1$. Os dois outros casos são demonstrados de forma análoga.

Δ

Observação 2: Se (x, y, z) é um triplo Pitagórico primitivo, então de x e y, somente um destes é par e o outro é ímpar, assim como z. De fato, suponha que x e y são pares, ou seja, $x = 2k$ e $y = 2l$, com $k, l \in \mathbb{N}$. Então,

$$z^2 = x^2 + y^2 = 4k^2 + 4l^2 = 2(2k^2 + 2l^2)$$

assim, 2 é um divisor comum de x, y e z, o que não pode ocorrer, uma vez que $mdc(x, y, z) = 1$.

Suponha agora que x e y são ambos ímpares, ou seja, $x = 2k + 1$ e $y = 2l + 1$, com $k, l \in \mathbb{N}$. Assim, $x^2 = 4k' + 1 \, e \, y^2 = 4l' + 1$, com $k' = k^2 + k$ e $l' = l^2 + l$. Como $z^2 = x^2 + y^2$ é a soma de dois números ímpares, segue que z^2 é par. Porém

$$z^2 = x^2 + y^2 = 4k' + 1 + 4l' + 1 = 4(k' + l') + 2.$$

que não é a forma de um número par ao quadrado[3]. Logo, x e y não podem ser ambos ímpares. Portanto, x e y devem ter paridades diferentes e, consequentemente, z será ímpar.

Δ

Para facilitar o entendimento e evitar repetições, vamos sempre assumir x par e y ímpar em um triplo Pitagórico primitivo (x, y, z).

Antes de enunciar o resultado principal desta seção, vamos precisar do seguinte resultado técnico que será usado na demonstração do Teorema 1.

Observação 3: Se $n\ e\ m$ são números naturais relativamente primos tais que nm é um quadrado perfeito, ou seja, $nm = x^2$, para algum número natural x, então m e n também são quadrados perfeitos. Esse resultado pode ser provado usando a decomposição de m e n em fatores primos. Ver (MAIER, 2005).

Δ

Teorema 1:

a) Escolhendo-se números $s, t \in \mathbb{N}$ com $s > t \geq 1$, $mdc(s, t) = 1$, $s - t$ ímpar (i.e. s e t possuem paridades distintas) e colocando-se

$$x = 2st\,, y = s^2 - t^2 \ \text{ e } \ z = s^2 + t^2, \tag{1}$$

(x, y, z) será um triplo Pitagórico primitivo.

b) Qualquer triplo Pitagórico primitivo é obtido pelo método de a).

Demonstração:

a) Primeiramente vamos mostrar que (x, y, z) dados em (1) formam um triplo pitagórico. Temos

$$x^2 + y^2 = (2st)^2 + (s^2 - t^2)^2 = 4s^2t^2 + s^4 + t^4 - 2s^2t^2 =$$
$$s^4 + 2s^2t^2 + t^4 = (s^2 + t^2)^2 = z^2$$

Vejamos agora que (x, y, z) é primitivo. Suponha $mdc(x, y, z) \neq 1$. Assim, existe um número primo p, tal que p divide $mdc(x, y, z)$. Como y é ímpar e p divide y, então p não pode ser 2. Logo, p é um primo ímpar. Por outro lado, como p divide $x = 2st$ e p não divide 2, então p divide s ou p divide t. Além disso, temos também que p divide $z = s^2 + t^2$. Então se p divide s, temos também que p deve dividir t. Analogamente, se p divide t, então p também deve dividir s. Logo, em qualquer caso, concluímos que p divide s e p divide t. Consequentemente, p deve dividir $mdc(s, t) = 1$. O que é um absurdo. Logo, $mdc(x, y, z) = 1$, e, portanto, (x, y, z) é um triplo Pitagórico primitivo.

---

[3] Todo número par ao quadrado é da forma $4k^2$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

b) Seja (x, y, z) um qualquer triplo Pitagórico primitivo com x par, y ímpar. Podemos manipular a equação padrão desse triplo, obtendo $x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y)$ e daí $\mathbb{N} \ni \frac{x^2}{4} = \frac{z+y}{2} \cdot \frac{z-y}{2}$. Então

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = uv \text{ com } u = \frac{z+y}{2} \text{ e } v = \frac{z-y}{2}.$$

Suponha $d = mdc(u, v)$, então d divide $u \pm v$. Mas, $u + v = \frac{z+y}{2} + \frac{z-y}{2} = z$ e $u - v = = \frac{z+y}{2} + \frac{z-y}{2} = y$, dando que d divide $mdc(y, z)$. Pela Observação 1, sabemos que $mdc(y, z) = 1$, pois (x, y, z) é primitivo. Logo $mdc(u, v) = 1$. Como u e v não tem divisores em comum e seu produto gera um número quadrado perfeito, então ambos são individualmente quadrados perfeitos (Observação 3). Coloquemos $u = s^2$ e $v = t^2$ com $s, t \in \mathbb{N}$. Temos então $mdc(s, t) = mdc(u, v) = 1$ e $s - t$ é ímpar. Além disso, $s^2 - t^2 = u - v = y$ e $s^2 + t^2 = v + u = z$. De $\frac{x^2}{4} = uv = t^2 s^2$ segue $x = \sqrt{4t^2s^2} = 2st$.

■

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Baseado no exposto na seção anterior, vamos apresentar uma sequênica didática para trabalhar o conceito de triplos Pitagóricos, suas propriedades e construção para ser estudado no ensino básico. A abordagem proposta é a investigação das validades das propriedades através de questionamentos feitos pelo professor que guiarão o raciocínio lógico dos estudantes, deixando mais leve o conteúdo. Assim, o aluno será incentivado, a partir de questionamentos e desafios, a concluir diversas características dos triplos pitagóricos e compreender como utilizá-las. Não será exigido dos discentes uma demonstração rigorosa dos resultados, apenas uma investigação das propriedades a partir das definições e resultados apresentados. As observações da seção anterior que necessitarem de um maior rigor matemático poderão ser apenas citados pelo docente afim de motivar a discussão.

Etapa 1: Teorema de Pitágoras e a relação dos triplos Pitagóricos com o triângulo retângulo.

Esta primeira etapa tem o objetivo de introduzir a definição de triplos Pitagóricos inspirado no Teorema de Pitágoras, relacionando-os com um triângulo retângulo. Para isso, deve ser lembrado aos alunos, que dado um triângulo retângulo com catetos b e c e hipotenusa a, tem-se $a^2 = b^2 + c^2$. Logo em seguida, deve ser perguntado a eles se vale também o processo inverso: "Será que um triângulo de lados a,b e c tal que valha a mesma equação é também um triângulo retângulo?". Depois de certa discussão, mostre que pode-se sempre construir um triângulo retângulo com lados a, b e c e este será semelhante ao triâgulo inicial, que consequentemente será retângulo. Esse resultado pode ser encontrado em (BARBOSA, 1995).

Uma vez familiarizados com o Teorema de Pitágoras, deve-se instigá-los a imaginar quais números satisfazem a relação $a^2 = b^2 + c^2$, dando assim a abertura para a definição de triplos Pitagóricos e suas definições em primitivos e não primitivos.

Etapa 2: Propriedades dos triplos Pitagóricos primitivos.

Nesta etapa o objetivo é discutir a relação entre triplos Pitagóricos não primitivos e primitivos, além das propriedades destes últimos usando a definição dada na etapa anterior. Para concluir as propriedades desejadas o aluno será guiado através dos questionamentos:

1) É possível construir um triplo Pitagórico não primitivo a partir de um primitivo?

   Se preciso, o professor pode apresentar aos alunos o exemplo dos triplos Pitagóricos $(4{,}3{,}5)$ e $(8{,}6{,}10)$, onde o primeiro é primitivo e o segundo não e perguntar qual a relação que existe entre eles.

2) É possível construir um triplo Pitagórico primitivo a partir de um não primitivo?

   Note que esta é a recíproca da propriedade anterior e que já foi demonstrada sua veracidade. Se necessário, utilize o processo inverso no triplo Pitagórico não primitivo $(8{,}6{,}10)$ e mostre que ao dividir todos os termos por $mdc(8{,}6{,}10) = 2$, obtemos novamente o triplo Pitagórico primitivo $(4{,}3{,}5)$.

3)"É possível, em um triplo Pitagórico primitivo, os três elementos terem a mesma paridade (Todos pares ou todos ímpares)?"

   Não. Caso os 3 números (x, y, z) fossem pares, teríamos $mdc(x, y, z) \geq 2$, daí não seria primitivo. Já no segundo caso, sequer conseguimos formar um triplo Pitagórico, pois tomando x e y ímpares, temos que $x^2 + y^2$ é a soma de dois números ímpares e, obrigatoriamente, um número par (se necessário, mostrar que o quadrado de um número mantém sua paridade).

4) "Como devem ser, então, as paridades de um triplo Pitagórico primitivo?"

   Espera-se que o aluno conclua que em um triplo Pitagórico primitivo sempre ocorre x e y com paridades diferentes e z sempre ímpar, como demonstrado na Observação 2.

Etapa 3: Construção de triplos Pitagóricos primitivos.

Nesta etapa será necessário que o aluno tenha sido apresentado à forma de construção dos Triplos Pitagóricos primitivos. Como a demonstração do Teorema 1 é muito técnica, recomenda-se expor apenas a sequência de passos para a construção, como exibida a seguir:

Construção de triplos Pitagóricos primitivos: Sejam $s, t \in \mathbb{N}$ e

- $s > t \geq 1$
- $mdc(s,t) = 1$
- $s - t$ ímpar (ou seja, s e t possuem paridades distintas)

Temos

$$x = 2st\,, y = s^2 - t^2 \quad e \quad z = s^2 + t^2\,,$$

(x, y, z) será um triplo Pitagórico primitivo.

A tabela a seguir mostra alguns triplos Pitagóricos construídos a partir de valores válidos para s e t:

Tabela 1 – Exemplos de triplos Pitagóricos primitivos

s	t	$x = 2st$	$y = s^2 - t^2$	$z = s^2 + t^2$
2	1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	3	24	7	25
5	2	20	21	29
5	4	40	9	41
6	1	12	35	37
6	5	60	11	61
7	2	28	45	53
7	4	56	33	65
7	6	84	13	85
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: Maier, 2005.

É importante deixar claro que também vale a recíproca do resultado anterior, ou seja, todos os triplo Pitagóricos primitivos são obtidos como em (1). Portanto, os triplos Pitagóricos, primitivos e não-primitivos, são da forma

$$(2nst, n(s^2 - t^2), n(s^2 + t^2)) \qquad (2)$$

onde $n, s, t \in \mathbb{N}$ com $s > t \geq 1, mdc(s,t) = 1, s - t$ ímpar.

A partir do método de construção apresentado acima pode-se pedir para os alunos tentarem justificar as seguinte propriedades:

5) Em todo triplo Pitagórico primitivo (x, y, z) o x é sempre um múltiplo de 4.

Justificativa: Veja que em $x = 2st$, onde s ou t é par, pois s e t têm paridades distintas. Logo um deles pode ser representado da forma $2k$, e, portanto, $2st = 4ks$ ou $2st = 4kt$, ou seja, x é sempre um múltiplo de 4.

A recíproca da Propriedade 5 pode ser trabalhada em seguida com a proposta do primeiro desafio:

Desafio 1: Mostre que todo número natural múltiplo de 4 é o "x" de pelo menos 1 triplo Pitagórico primitivo.

Solução: Sabendo que todo número múltiplo de 4 pode ser representado no formato $4k$, com $k \in \mathbb{N}$. Por (1), devemos ter $x = 4k = 2s$. Dessa forma, $s = 2k$ e $t = 1$ satisfazem as condições do Teorema 1 e obtemos $y = (2k)^2 - 1^2 = 4k^2 - 1$ e $z = (2k)^2 + 1^2 = 4k^2 + 1$. Assim,

$$(4k, 4k^2 - 1, 4k^2 + 1)$$

É um triplo primitivo com x dado.

Δ

Para ilustrar o resultado obtido no Desafio 1, podem ser apresentados os seguintes Exemplos.

Exemplo 2: Encontre um triplo Pitagórico primitivo que tem $x = 12$.

Observe que $x = 4 \cdot 3$. Pelo visto acima, considerando $s = 2 \cdot 3 = 6$ e $t = 1$, obtemos o triplo Pitagórico primitivo

$$(4 \cdot 3, 4 \cdot 3^2 - 1, 4 \cdot 3^2 + 1) = (12, 35, 36).$$

Pela Tabela 1, vemos que 12 também é o x do triplo Pitagórico primitivo $(12, 5, 13)$, ou seja, o triplo encontrado como no Desafio 1 pode não ser único. O triplo $(12, 5, 13)$ é encontrado observando que $x = 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. Então, $s = 3$ e $t = 2$ satisfazem as condições do Teorema 1. Nesse caso, temos

$$y = 3^2 - 2^2 = 5 \text{ e } z = 3^2 + 2^2 = 13 .$$

Δ

Exemplo 3: Encontre todos os triplos Pitagóricos que têm $x = 60$.

Vamos determinar todos os pares s e t, com $s > t$, $mcd(s, t) = 1$ e de paridade diferentes com $x = 60 = 2st$. Observe que $x = 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, as possibilidades existentes são:

$s = 30\ e\ \ t = 1,\ \ s = 15\ e\ \ t = 2,\ \ s = 10\ e\ \ t = 3$ e $s = 6\ e\ \ t = 5$. Portanto, os triplos Pitagóricos primitivos são:

Tabela 2 – Triplos Pitagóricos primitivos com $x = 60$.

s	t	$x = 2st$	$y = s^2 - t^2$	$z = s^2 + t^2$
30	1	60	899	901
15	2	60	221	229
10	3	60	91	109
6	5	60	11	61

Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Δ

Os alunos já concluíram na Etapa 2 que o "y" de um triplo Pitagórico primitivo é sempre um número ímpar. A recíproca desse resultado também pode ser trabalhada na forma de um desafio.

Desafio 2: Mostre que todo número natural ímpar maior que 1 é o "y" de pelo menos 1 triplo Pitagórico primitivo.

Solução: Sabendo que todo número ímpar pode ser representado no formato $2k - 1$, com $1 \leq k \in \mathbb{N}$, se $y = 2k - 1 = s^2 - t^2 > 1$ é dado, usando produtos notáveis, podemos escrever $s^2 - t^2 = (s + t)(s - t)$. Daí, tomando $s = k$ e $t = k - 1$, obtemos

$$(2k(k - 1), 2k - 1, 2k(k - 1) + 1)$$

Como exemplo de triplo primitivo com y dado.

Exemplo 4: Encontre um triplo Pitagórico primitivo com $y = 15$.

Observe que $y = 2k - 1 = 2 \cdot 8 - 1$. Logo, tomando $s = k = 8$ e $t = k - 1 = 7$, obtemos o triplo Pitagórico primitivo

$$(2 \cdot 8 \cdot 7, 8^2 - 7^2, 8^2 + 7^2) = (112, 15, 113)$$

Δ

Exemplo 5: Encontre todos os triplos Pitagóricos primitivos com $y = 45$.

Veja que $y = 45 = 3^2 \cdot 5 = (s + t)(s - t)$. Existem apenas duas possibilidades de s, t com $s > t \geq 1$, $mdc(s, t) = 1$ e s e t de paridades distintas que são:

1) $\begin{cases} s + t = 45 \\ s - t = 1 \end{cases} \Rightarrow s = 23$ e $t = 22$

2) $\begin{cases} s + t = 9 \\ s - t = 5 \end{cases} \Rightarrow s = 7$ e $t = 2$

Portanto, os triplos Pitagóricos primitivos são:

Tabela 3 – Triplos Pitagóricos primitivos com $y = 45$.

s	t	$x = 2st$	$y = s^2 - t^2$	$z = s^2 + t^2$
23	22	1012	45	1013
7	2	28	45	53

Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

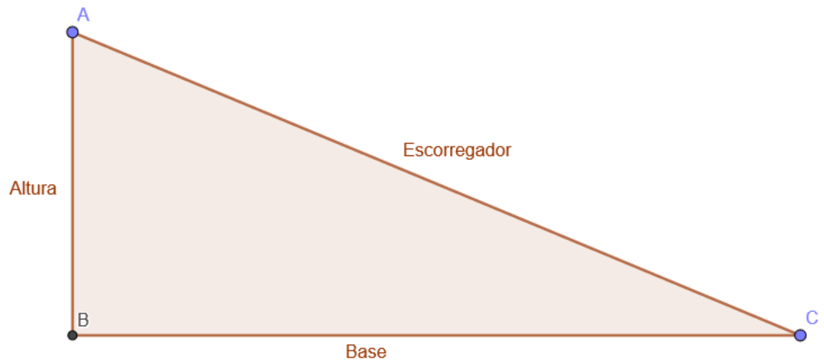
Δ

Etapa 4: Aplicações dos resultados a situações cotidianas.

Nesta última etapa, serão apresentados alguns desafios que relacionem os conteúdos apresentados nos passos anteriores aplicados em situações factíveis.

Desafio 3: Rafaela trabalha em um parque de diversões e deseja construir um grande escorregador no formato de triângulo retângulo. Sua chefe disse que queria o brinquedo com 5 metros de altura. Para construir a base e o escorregador, ela utilizará pedaços de lona com 1 metro de comprimento e não pode cortá-los. Logo, as suas medidas devem ser inteiras. Dê um exemplo de possíveis medidas para a base e escorregador do brinquedo.

Figura 1 – Representação do escorregador



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021.

Solução: Como altura, base e escorregador devem ser números inteiros que representam os lados de um triângulo retângulo, esses valores corresponderão a um triplo Pitagórico. Utilizando o resultado do Desafio 2, podemos considerar 5 como o “y” desse triplo. Daí, temos

$$5 = 2k - 1 \Rightarrow k = 3$$

Portanto,

$$(x, y, z) = (2k(k - 1), 2k - 1, 2k(k - 1) + 1) = (12, 5, 13)$$

Logo, possíveis medidas para a base e escorregador são, respectivamente, 12 e 13 metros.

Δ

Desafio 4: Em uma feira de ciências, diferentes robôs deveriam realizar percursos para avaliar sua funcionalidade. Determinado teste definia o seguinte:

“O robô deverá se mover à velocidade de 1 metro por segundo. Partindo do ponto inicial, deve:

1. Andar 8 segundos para frente;
2. Virar 90° para esquerda;
3. Andar t_1 segundos para frente;
4. Virar-se em direção ao ponto inicial;
5. Andar t_2 segundos até chegar ao ponto de partida.”

Os robôs A e B cumpriram as exigências e encontraram valores inteiros para t_1 e t_2 segundos. Porém, os valores obtidos por cada um foram diferentes. Quantos metros cada robô andou sabendo que o robô B andou mais que o robô A?

Solução: Perceba que o trajeto realizado pelos robôs forma um triângulo retângulo com um cateto igual a 8. Sabendo que a velocidade com que se moviam era de 1 metro por segundo, esse triângulo tem medidas $(8, t_1, t_2)$. Este é um triplo pitagórico (não necessariamente primitivo), já que t_1 e t_2 são inteiros. Como $8 = 2^3$ não pode ser múltiplo de um número ímpar, este só pode ser o x do triplo Pitagórico. Dessa forma, por (2), $8 = 2nst$. Dadas as condições sobre s e t, temos

$$(n = t = 1 \text{ e } s = 4) \text{ ou } (n = s = 2\ e\ t = 1)$$

Portanto, novamente por (2), temos

$$(2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1, 1(4^2 - 1^2), 1(4 + 1^2)) = (8, 15, 17)$$
$$(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1, 2(2^2 - 1^2), 2(2^2 + 1^2)) = (8, 6, 10)$$

Então as distâncias percorridas pelos robôs A e B, são respectivamente $(8 + 6 + 10) = 24$ metros e $(8 + 15 + 17) = 40$ metros.

Δ

Desafios adicionais semelhantes podem ser adotados pelos professores que aplicar esses métodos, preferencialmente em turmas dos anos finais do ensino fundamental ou no ensino médio. Essas etapas e desafios devem tirar o aluno da função apenas de espectador e colocá-los em uma posição mais ativa, mostrando que a matemática pode ser mais dinâmica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A sequência didática apresentada neste artigo pode ser aplicada em uma turma do 9º do ensino fundamental ou no ensino médio. Apesar do tema abordado não ser comumente apresentado no ensino básico, a metodologia usada e a sequênica sugerida permite que o mesmo possa ser trabalhado com o objetivo de desenvolver o raciocínio lógico através de investigação das propriedades propostas nos questionamentos feito pelo professor. Partindo da relação com o Teorema de Pitágoras, amplamente conhecido pelos alunos do ensino básico, pode-se definir os triplos Pitagóricos e trabalhar as suas propriedades com uma metodologia que contempla habilidades dispostas na BNCC.

Esperamos que esta proposta seja adaptada e aplicada por professores desta etapa de ensino e que os alunos sintam-se motivados e desafiados com as atividades, despertando interesse pelo estudo de matemática.

AGRADECIMENTOS

Agradeço especialmente ao grupo PET Matemática e Estatística - UFCG e em geral ao PET/FNDE/MEC por proporcionar os recursos que possibilitaram a realização desse projeto.

REFERÊNCIAS

BNCC. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, DF, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio . Acesso em: 05 julho 2021.

BARBOSA, João L. M. **Geometria Euclidiana Plana.** 4ª edição. Fortaleza: SBM, 1995.

NEHAB, Carlos. Triplas Pitagóricas, **Revista do Clube de Matemáticos,** Teresópolis, n. 16, p. 4-12, set. 2018.

MAIER, R. R. **Teoria dos números**, notas de aula,2005. Disponível em: https://www.mat.unb.br/maierr/tnotas.pdf. Acesso em: 13 de julho de 2020.

ANDRADE, José Fernandes Silva, **Tópicos em Álgebra**, 1ª edição, Rio de Janeiro: SBM, 2013.