ISSN: 2358-8829

LIMITES E MATEMÁTICA BÁSICA: ESTUDO SOBRE LIMITES E SUAS RELAÇÕES DE INTERDEPENDENCIA COM FERRAMENTAS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

Ester Gomes de Figueirêdo[1]
Caíque de Oliveira Souza[2]
Pedro Igor Ribeiro de Araújo Pequeno[3]
Jonathas Jerônimo Barbosa[4]

RESUMO

A educação é um dos pilares da sociedade, desta forma, é de suma importância que seu processo seja claro, compreensível e que sejam feitas ligações entre os níveis de ensino. Ao referir-se à matemática na educação básica não é incomum ouvir discursos de rejeição acerca desta disciplina, da mesma forma, no âmbito da educação superior esse quadro não é muito diferente. Em especial, o cálculo, que embora tenha sido uma das realizações mais notáveis do século XVII, com inúmeras aplicações, continua tendo altos índices de retenção escolar. A esse respeito, tanto os levantamentos mais incipientes quanto os mais elaborados confirmam esses dados, e portanto, com o objetivo de combater este e outros aspectos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem, a componente curricular pré-cálculo foi implantada em alguns cursos como pré-requisito para o cálculo. Alguns anos depois os resultados de retenção que se acumulavam em cálculo migraram para pré-cálculo. Com isso, seguindo o referencial teórico de Silva et al e ampliando sua área de pesquisa, este trabalho tem como objetivo identificar, evidenciar e relacionar os temas do ensino básico, com o ensino de cálculo para que assim, com novas formas de abordagem, seja possível minimizar as dificuldades. A metodologia da pesquisa é qualitativa e de caráter exploratório baseada em questões sobre limites - primeira ferramenta diretamente ligada a esta componente curricular - apresentadas nos capítulos iniciais de algumas bibliografias do curso de cálculo. Palavras-chave: Cálculo, Limites, Matemática básica, Pré-Cálculo.

Palavras-chave: Cálculo, Limites, Matemática básica, Pré-Cálculo.

INTRODUÇÃO

A transição do ensino básico para o ensino superior, especialmente nas disciplinas de exatas, muitas vezes impõe desafios significativos aos estudantes. A complexidade inerente a algumas disciplinas pode se tornar uma barreira para o sucesso acadêmico, uma realidade ressaltada por Azevedo e Faria (2006). Ao ingressar na universidade, os estudantes podem enfrentar dificuldades acadêmicas e de adaptação. Essas dificuldades podem ser ampliadas pela diferença de abordagens entre os currículos da educação básica e do ensino superior, apresentando-se

[1]Graduanda do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Ciência, Educação e Tecnologia da Paraíba - IFPB, ester.figueiredo@academico.ifpb.edu.br;

[2]Graduando do Curso de Bacharel em Enganharia da Computação do Instituto Federal de Ciência, Educação e Tecnologia da Paraíba - IFPB, caique.oliveira@academico.ifpb.edu.br;

[3]Graduando do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Ciência, Educação e Tecnologia da Paraíba - IFPB, pedro.ribeiro@academico.ifpb.edu.br;

[4]Professor Orientador: Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal da Paraíba - UFPB, jonathas.barbosa@ifpb.edu.br.

como um potencial agravante para a problemática enfrentada pelos discentes nesse período crucial de transição. A disparidade nas metodologias de ensino, expectativas acadêmicas e demandas cognitivas pode gerar um impacto significativo na trajetória acadêmica e na autoconfiança dos estudantes, destacando a necessidade de uma abordagem mais integrada e coesa ao longo de sua jornada educacional

Problemática esta que é particulamente evidente nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) que, segundo Howard Eves (2011), a invenção atribuída à Newton e Leibniz, foi a realização mais notável do século XVII. Elyote e Marão (2023), discute que embora a referida disciplina apresente uma mescla de conteúdos fundamentais para a formação e contribuições para a carreira profissional dos então discentes, ainda assim, resultados insatisfatórios são comumente encontrados.

Na tentativa de estabelecer uma melhor fluidez para a mudança de nível acadêmico, especificamente, ao referir-se à disciplina supracitada, foram implementadas algumas estratégias, dentre elas, a criação da disciplina Pré-Cálculo; que intenciona revisar, aprofundar e ampliar conteúdos de Matemática Básica com o escopo de melhorar a perfomance dos discentes na tratada matéria de CDI, como é cuidadosamente apresentado no trabalho Andrade, Esquincalha e Oliveira (2019).

Com base nisso, este trabalho tem como objetivo identificar e destacar as ferramentas do ensino básico que são utilizadas em algumas questões sobre limites e estabelecer suas ligações com o cálculo a fim de consolidar o processo de ensino e aprendizagem. A metodologia da pesquisa é qualitativa e de caráter exploratório baseada na análise de questões sobre limites, primeira ferramenta diretamente ligadas à tratada componente curricular.

A estrutura do presente trabalho, a sequência inicia-se com a introdução, que proporciona uma visão panorâmica do tema em estudo, delineando os objetivos da pesquisa. Em seguida, detalhamos a metodologia empregada, centrando a atenção no núcleo da investigação. Posteriormente, a seção é dedicada ao referencial teórico adotado, detalhando as teorias que fundamentam o estudo, proporcionando um embasamento conceitual alºem de tratar dos exemplos utilizados na investigação.

Na etapa subsequente, os resultados obtidos são apresentados, seguidos de discussões que aborda a interconexão dos elementos destacados do ensino básico enquanto instrumentos fundamentais para a resolução dos exemplos apresentados. Por fim, encerramos o artigo com as considerações finais, sintetizando as principais conclusões do estudo e delineando suas contribuições para a área de pesquisa em questão. Essa estrutura, ao guiar o leitor de forma coesa e sequencial, visa proporcionar uma compreensão abrangente do trabalho realizado, desde a sua concepção até as conclusões finais.

ISSN: 2358-8829

METODOLOGIA

A fim de explicitar os déficits da base matemática para o estudo de Cálculo Diferencial e Integral, foi feita uma interseção de pesquisas bibliográficas entre o ensino de matemática no grau superior e questões de Cálculo envolvendo limites. O material respectivo são os artigos de Andrade et al, Azevedo et al e Elyote et al encontrados pela plataforma Google Acadêmico usando palavras-chave Pré-Cálculo, Cálculo e Matemática Básica e o livro de cálculo do James Stewart.

Após a verificação de que, de fato, existem barreiras para o processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina, foram elencados alguns exemplos de problemas facilmente encontrados nas bibliografias estudadas, onde é possível perceber a utilização de ferramentas do currículo básico de matemática (ensino fundamental), para a resolução de tais perguntas. Dessa forma, é possível uma listagem de alguns exemplos de conteúdos abordados na temática de cada exercício.

Posteriormente, pretende-se justamente verificar como os estudantes respondem a essa intervenção preparatória para o cálculo, adquirir a frequência de cada conteúdo básico e como esses conteúdos serão trabalhados nas disciplinas específicas de algum curso.

REFERENCIAL TEÓRICO

Não é incomum identificar em salas de aulas da disciplina de cálculo estudantes com conceitos bem estabelecidos sobre ferramentas como limites e continuidade mas que deparando-se, com problemas que envolvem esses tópicos, não conseguem resolvê-los ou resolvem parcialmente devido a elementos reletivos ao ensino básico. Fatoração, produtos notáveis, estudo do sinal das funções, são alguns desses conhecimentos necessários para um bom andamento entre a aprendizagem de ferramentas matemáticas mais sofisticadas que as apresentadas no ensino básico e a resolução dos problamas apresentados na bibliografia adotadas nestes cursos.

Uma investigação sobre questões recorrentes no estudo do cálculo, foram identificados tipos específicos de problemas frequentemente encontrados. Considerando essa recorrência, o presente estudo centra-se na análise de três questões extraídas do livro "Cálculo" por James Stewart. O propósito desta análise é destacar e elencar as ferramentas fundamentais do ensino básico que são empregadas na resolução desses problemas. Por meio desta abordagem, busca-se uma compreensão mais aprofundada das estratégias pedagógicas empregadas no contexto do cálculo, visando contribuir para a otimização do processo de ensino-aprendizagem. Diante disso, seguem as questões analisadas.

ISSN: 2358-8829

1. Calcule o limite $\lim_{t \to 1} \frac{t^4 - 1}{t^3 - 1}$, se existir.

   Solução. Se optar por verificar o resultado de uma substituição direta de $t = 1$ na função obtemos uma indeterminação. De fato,

$$\lim_{t \to 1} \frac{t^4 - 1}{t^3 - 1} = \frac{1^4 - 1}{1^3 - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

   Vale lembrar que a função em questão não está definida para $t = 1$, logo, uma manipulação algébrica faz-se necessário.
   Expandindo as expressões do numerador e denominador, encontramos:

$$t^4 - 1 = (t^2 + 1)(t^2 - 1) = (t^2 + 1)(t + 1)(t - 1) \quad \text{e} \quad t^3 - 1 = (t - 1)(t^2 + t + 1) \quad (1)$$

   Temos então que:

$$\lim_{t \to 1} \frac{t^4 - 1}{t^3 - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{(t^2 + 1)(t + 1)(t - 1)}{(t - 1)(t^2 + t + 1)} = \lim_{t \to 1} \frac{(t^2 + 1)(t + 1)}{t^2 + t + 1}$$

   A manipulação algébrica promoveu a fatoração do termo $(t - 1)$ que é o responsável pela indeterminação. Com a indeterminação contornada, o limite faz-se visível.

$$\therefore \lim_{t \to 1} \frac{(t^2 + 1)(t + 1)}{t^2 + t + 1} = \frac{(1^2 + 1)(1 + 1)}{1^2 + 1 + 1} = \frac{4}{3}$$

$\triangle$

2. Determine, se existirem, as assíntotas horizontais e verticais, se houver, da curva. Esboce o gráfico da curva e compare os resultados algébricos e geométricos. (Adaptada)

$$y = \frac{5 + 4x}{x + 3}$$

   Solução. A saber, as retas assíntotas horizontais são dadas por:

$$A_H = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

   Por sua vez, as retas assíntotas verticais são obtidas calculando o limite tendendo à valores que não pertencem ao domínio da função da seguinte forma:

$$\lim_{x \to A_v} f(x) = \infty$$

   Iniciemos calculando as assíntotas horizontais, se houver, de y.

$$A_H = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} y = \lim_{x \to \infty} \frac{5 + 4x}{x + 3}$$

Fatorando a função, obtemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(\frac{5}{x}+4)}{x(1+\frac{3}{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{x}+4}{1+\frac{3}{x}} \tag{2}$$

Ao aplicar o limite[5], temos que $\dfrac{0+4}{1+0} = 4$.

Portanto, a reta $A_H = 4$ é uma assíntota horizontal para a função $y = \dfrac{5+4x}{x+3}$.

No caso de determinar as assíntotas verticais, investigaremos para quais valores o limite $\lim\limits_{x\to A_v} y = \pm\infty$.

Para funções racionais (quociente entre polinômios) vale salientar a função tenderá a infinito quando o denominador da função tender à 0[6], ou seja, em $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ quando $q(x)$ tender a zero.

Sabendo disso, observe que $x+3 \to 0$ quando $x \to -3$, sendo assim analisando os limites laterais,

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{5+4x}{x+3} = \frac{-7^+}{0^+} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -3^-} \frac{5+4x}{x+3} = \frac{-7^-}{0^-} = \infty^7 \tag{3}$$

Portanto, a reta $A_v = -3$ é uma assíntota vertical para a função $y = \dfrac{5+4x}{x+3}$.

Donde conclui-se que as equações das retas assíntotas para a curva dada são $A_H = 4$ e $A_v = -3$. Associado à conclusão algébrica temos também outra representação das assíntotas determinadas através do esboço do gráfico na Figura 1. $\triangle$

3. Determine a derivada da função dada usando a definição. Diga quais são os domínios da função e da derivada.

$$f(x) = x + \sqrt{x}$$

Solução. Por definição, $\frac{d}{dx}$ é dada da seguinte forma

$$\frac{d}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

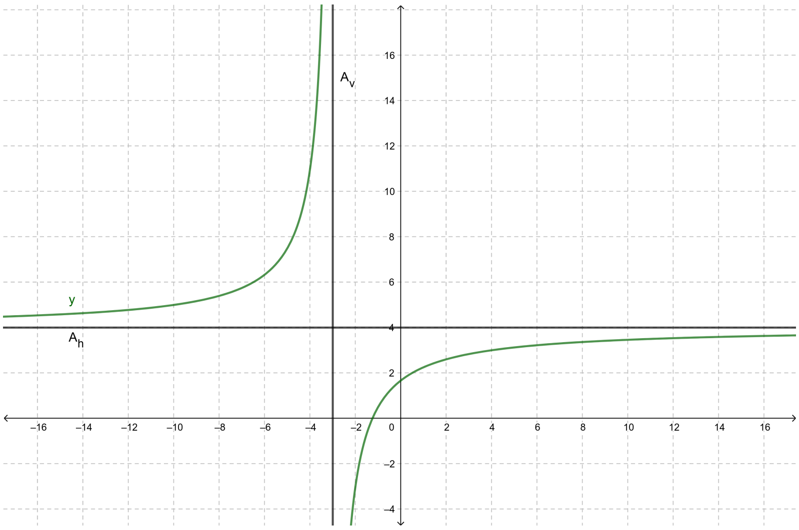
[5]Note que, no limite, o quociente entre uma constante a por um valor que cresce ilimitadamente $-$ ou decresce ilimitadamente $-$ obtém-se 0 como resultado. Como observa-se na primeira parcela do numerador da fração.

[6]Salvo os casos em que o denominador tender para 0 implique em indeterminação

[7]Note que, quando $x \to -3^- \Rightarrow x+3 \to 0^-$ o denominador de y tende valores arbitrariamente próximos de 0, porém ainda positivo; quando $x \to -3^+ \Rightarrow x+3 \to 0^+$, pois o denominador tenderá à um número tão próximo de 0 quanto se queira de, porém negativo.

ISSN: 2358-8829

Figura 1: Representação gráfica de y e suas assíntotas.



Fonte: Elaborado pelos autores no *Geogebra*.

Como $f(x) = x + \sqrt{x}$ e $f(x+h) = (x+h) + \sqrt{x+h}$, temos que

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) + \sqrt{x+h} - (x + \sqrt{x})}{h} \tag{4}$$

Perceba que a multiplicação por 1[8], de forma conveniente, faz-se cabível, onde obtemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{(h + \sqrt{x+h} - \sqrt{x})}{h} \cdot \frac{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{h}{h} + \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})}{h} \cdot \frac{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}\right] \tag{5}$$

Por manipulação algébrica, vemos

$$\lim_{h\to 0} \left[1 + \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}\right] = \lim_{h\to 0} \left[1 + \frac{x+h-x}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}\right] = \lim_{h\to 0} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}\right] \tag{6}$$

Aplicando o limite, pode ser inferido que

$$1 + \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Donde conclui-se que o $\lim_{h\to 0} f(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, ou seja, $\frac{df}{dx} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Analizando os domínios de $f(x)$ e $\frac{df}{dx}$ pode ser percebido que apresentam-se da seguinte forma.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\} \quad \text{e} \quad D_{\frac{df}{dx}} = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}^9$$

[8]Elemento neutro em $(\mathbb{R}, \cdot)$,que pode ser convenientemente reescrito como sendo o conjugado do numerador.

[9]Perceba que o resultado obtido pela resolução da questão apenas corrobora com uma decorrência direta da

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Ao analisar o exercício (1), observa-se que a manipulação algébrica realizada envolve a expansão de dois produtos notáveis, habilidade que é comumente abordada no ensino fundamental. De fato, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[10], esta habilidade é obrigatória no 9º ano do ensino fundamental. Com efeito, "Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, [. . .]." (Brasil, Ministério da Educação, 2018).

Analisando o segundo exemplo dado em (2), percebe-se que a maior potência de x foi posta em evidência, trato este que é correntemente utilizado na fatoração polinomial que, como supracitado, é competência básica do 9º ano do ensino fundamental. Análogamente nos limites exibidos em (3), divisibilidade, funções e modelos, noções de infinito, entre outros, são conteúdos da educação básica imprescindíveis para a resolução da questão.

Já no terceiro exercício proposto e ainda considerando (Brasil, Ministério da Educação, 2018), encontra-se novamente como habilidade obrigatória: noções e composição de funções, ferramenta esta utilizada no limite dado em (4) o qual é uma derivada. Semelhantemente, tem-se na equação (5) o artifício algébrico da multiplicação pelo número 1 (escrito como razão entre valores numéricos ou algébricos iguais no numerador e denominador) escolhido de forma conveniente para usar o produto notável conhecido como diferença de dois quadrados.

Esta técnica é conhecida na bibliografia de cálculo como "a multiplicação pelo conjugado"e resulta na euação descrita em (6), produto polinomial notável essencialmente trabalhado no ensino básico. A importância da manipulação das supracitadas ferramentas do ensino básico tornan-se evidentes para a resolução das questões apresentadas.

Para uma síntese das ferramentas do ensino básico, podemos elencar: Álgebra do ensino básico (Fração, Potenciação e Radiciação, Fatoração, Produtos Notáveis, Polinômios), Funções e Modelos, Noção intuitiva de infinito e Geometria Analítica. Vale salientar que as ferramentas acima são todas competências obrigatórias do ensino básico, referenciando-nos na BNCC.

Essas competências e habilidades destacadas representam apenas algumas das capacidades essenciais para que um estudante de cálculo alcance um desempenho satisfatório nesta disciplina, foco central deste trabalho. No entanto, é crucial ressaltar que tais habilidades são aplicáveis em diversas outras situações que exigem o uso da matemática. Dessa forma, o estudante pode concentrar sua atenção nos novos conhecimentos proporcionados pela disciplina, evitando a necessidade de dividir seu tempo entre conceitos atuais e revisão de conhecimentos prévios. Essa abordagem permite uma utilização mais eficaz do tempo dedicado aos estudos.

---

definição de derivada, onde, *o conjunto domínio da derivada de uma função é* ***igual ou mais restrito*** *que o da função inicial.*

[10]Documento federal vigente resposável pela síntese das diretrizes e bases a serem seguidas no ensino básico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo de cálculo desempenha um papel fundamental no desenvolvimento acadêmico, proporcionando uma compreensão aprofundada dos princípios matemáticos aplicados em diversas disciplinas. Nesse contexto, a identificação e compreensão das ferramentas da matemática básica revelam-se cruciais para o domínio efetivo do cálculo. Reconhecer e empregar essas ferramentas não apenas facilita a resolução de problemas complexos, mas também fortalece a base matemática dos estudantes.

Ao adotar o referencial teórico proposto por Silva et al., com ênfase na análise de questões específicas, este estudo proporciona uma contribuição significativa para uma compreensão mais aprofundada das ferramentas do ensino básico utilizadas na resolução de problemas de cálculo. A identificação destas ferramentas, especialmente no contexto de questões sobre limites, oferece insights valiosos para o aprimoramento das estratégias de ensino-aprendizagem, promovendo um potencial impacto positivo na superação das barreiras enfrentadas pelos estudantes ao enfrentarem o estudo do cálculo.

Consequentemente, as conclusões deste trabalho apontam para a relevância crucial do uso e reconhecimento das ferramentas do ensino básico, sugestionando a necessidade de uma reformulação na disciplina Pré-Cálculo e mais abrangente e ambiciosamente repensar as ações relativos ao ensino na educação básica. Esta reformulação se torna essencial, visto que a disciplina representa um componente de transição entre a educação básica e o ensino superior, especialmente para o Cálculo Diferencial e Integral.

Seria desejável que a educação básica fornecesse os subsídios necessários e suficientes para o enfrentamento das disciplinas de exatas. A expectativa é que este trabalho contribua para a consolidação da formação do docente de matemática, abordando elementos presentes tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio.

Como perspectivas para trabalhos futuros, almeja-se ampliar o escopo para incluir derivadas e integrais, além de abordar exemplos mais elaborados e situações-problema. Este aprofundamento tem o potencial de enriquecer o entendimento sobre a as bases teóricas de manipulação e aplicação a dos conceitos matemáticos, proporcionando uma base sólida para o desenvolvimento acadêmico dos estudantes.

AGRADECIMENTOS

A PRPIPG/IFPB pelo fomento via Edital nº 07/2023 chamada Interconecta IFPB.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Fabiana; ESQUINCALHA, Agnaldo; OLIVEIRA, Ana Teresa de. O Pré-Cálculo nas Licenciaturas em Matemática das Instituições Públicas do Rio de Janeiro: O Prescrito. **Vidya**, Santa Maria, v. 39, n. 1, p. 131-151, 2019.

AZEVEDO, Ângela Sá; FARIA, Luísa. Motivação, Sucesso e Transição para o Ensino Superior. **Psicologia**, Lisboa, v. XX, n. 2, p. 69-93, 2006. Associação Portuguesa de Psicologia. Disponível em: https://revista.appsicologia.org/index.php/rpsicologia/article/download/389/149/964. Acesso em: 3 mai. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

ELYOTE, Maria; MARÃO, José. Ensaio interdisciplinar para o ensino de limite utilizando o GeoGebra. **Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 11, n. 2, p. 235-251, 13 jun. 2023. ISSN: 2319-023X. Disponível em: https://doi.org/10.21711/2319023x-2023/pmo1114. Acesso em: 14 jun. 2023.

O CÁLCULO E CONCEITOS RELACIONADOS. In: EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. 5 ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. cap. 11, p. 417-460.

LIMITES E DERIVADAS: Cálculo Usando Propriedades dos Limites. In: STEWART, James. **Cálculo**. 4 ed. São Paulo: Cengange Learning, v. 1, 2016. cap. 2, p. 65-148.