ISSN: 2358-8829

EXPLORANDO O INFINITO: COMO INTRODUZIR O CONCEITO DE INFINITO COM OS ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

Ísis Vieira Fernandes [1]
Ester Vanderlei Silva Avelino [2]
Josefa Itailma da Rocha [3]

RESUMO

Na matemática, o conceito de infinito muitas vezes gera paradoxos, pois contradiz a nossa noção comum de limites e finitude. Neste trabalho, apresentaremos atividades com o objetivo de explorar o conceito de infinito de forma pedagógica para alunos do ensino fundamental e médio, a fim de despertar seu interesse e promover uma compreensão crítica sobre o tema. Iniciamos com atividades que desafiam os alunos a refletir sobre o infinito. Uma delas é a divisão por zero. Embora não seja possível dividir um número por zero, nesta atividade incentivamos o aluno a realizar a divisão de um número por valores cada vez menores, aproximando-se de zero, e observar como o resultado da divisão se torna cada vez maior. Assim, buscamos compreender o infinito como uma quantidade imensamente grande que surge da divisão por um número extremamente próximo de zero. É importante, em seguida, distinguir entre uma quantidade muito grande e o conceito de infinito. Para isso, exploramos problemas como contar a quantidade de grãos de areia em uma praia ou o número de gotas de água no oceano. Apesar de serem quantidades enormes, ainda são finitas, e mostraremos aos alunos essa distinção. Por fim, abordaremos a ideia de diferentes tipos de infinito, como os infinitos numeráveis e não numeráveis. Utilizaremos subconjuntos dos números naturais e a reta numérica para exemplificar essa diferença. Essa abordagem visa expandir o entendimento dos alunos sobre o infinito e como ele pode ser categorizado em diferentes conjuntos. Ao utilizar essas atividades, espera-se que os alunos desenvolvam uma visão mais aprofundada do conceito de infinito, superem paradoxos iniciais e desenvolvam um pensamento crítico sobre esse tema tão complexo da matemática.

Palavras-chave: Infinito, Matemática, Atividades pedagógicas.

INTRODUÇÃO

A ideia do infinito, apesar de sua complexidade, não é estranha ao nosso cotidiano. Uma vez que, provavelmente, em algum momento, já nos deparamos com vislumbres desse conceito grandioso. Seja ao contemplar as estrelas ou ao tentar contar os incontáveis grãos de areia na praia quando criança. Nesses momentos, é evidente a sensação de algo que parece não ter fim.

Os números, por si só, têm a capacidade de expressar a ideia fundamental do infinito: eles nunca terminam. No entanto, essa concepção do infinito manifesta-se de maneiras distintas

---

[1] Graduanda do Curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, isisvf11@gmail.com;
[2] Graduada no Curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Campina Grande - UFCG,ester.vanderlei@estudante.ufcg.edu.br;
[3] Professora orientadora: Doutora, Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, itailma@mat.ufcg.edu.br;

ISSN: 2358-8829

nos diversos campos da filosofia, ciência, matemática e outros domínios, assumindo formas variadas, seja como um lugar, uma ideia ou um conceito. Cada área de estudo oferece perspectivas únicas sobre o infinito, explorando suas implicações e desafios de maneira singular.

Ao longo da história, o conceito de infinito tem sido constantemente objeto de questionamento, provocando debates e interesse nos matemáticos, filósofos, poetas, físicos e teólogos. Essas discussões não são novas e remontam a civilizações antigas, como indicam os estudos de Morris, que afirma que

> A história do Infinito, ou seja, a história do conceito de Infinito, não é somente uma história da Matemática; é antes uma história da evolução do pensamento científico e de como é possível se pensar em algo que transcende qualquer possibilidade de compreensão. (Morris, 2003)

Na física, o infinito é abordado em várias perspectivas. Por exemplo, teorias consideram a possibilidade de um universo infinito no espaço e no tempo, apesar da Teoria da Relatividade Geral e a mecânica quântica de Einstein questionarem essa ideia. Apesar do descarte da teoria do universo infinito, a física sugere a presença de infinitos reais em algumas situações, como nas equações de campo de partículas elementares ou em buracos negros na física quântica.

Na filosofia, o infinito pode ser definido de diversas maneiras. Uma abordagem inicial está relacionada ao quantitativo, com uma conexão à matemática em certos casos. Inicialmente, Aristóteles propôs duas formas de descrever o infinito: em ato e em processo. O infinito potencial refere-se a algo que pode se tornar infinito, enquanto o infinito atual representa algo atualmente maior que qualquer quantidade dada da mesma natureza (Siqueira, Lorin, 2021).

Na matemática, o infinito potencial se refere a um processo no qual um número cresce além dos limites finitos, enquanto o infinito atual é um número em si. Cantor argumenta que qualquer número finito pode ser visto como um processo infinito em evolução (infinito potencial) ou como uma constante fixa que representa o processo completo (infinito em ato). Para Cantor, o infinito é um limite inalcançável, exemplificado pela sequência 1, 2, 3, 4, 5, ..., que continua indefinidamente sem atingir um último número. Cada número na sequência é um passo em um processo infinito, mas o limite não alcançado é visto como um número em si, denominado número transfinito, considerado uma "quantidade fixa, constante, para além de todas as quantidades finitas".

Embora o infinito seja amplamente explorado em diversas perspectivas, é notável que esse conceito não é frequentemente abordado em sala de aula. Sobre isso Giraldo (2019) fala que:

ISSN: 2358-8829

> A ideia de infinito tem sido muitas vezes evitada da Matemática da escola básica, talvez porque ela não caiba em procedimentos rotineiros. Mas é justamente aí que está a sua potencialidade: ela pode produzir um ensino de Matemática menos comprometido com a oposição entre o erro e o acerto e mais orientado para a produção de ideias novas e para a criatividade.

É notório que, por sua própria natureza, o infinito tenha um conceito que muitas vezes desafia a compreensão. Por isso, para os estudantes, trabalhar esse tema pode ser desafiador e complexo. Entretanto, é exatamente essa complexidade que torna a exploração do infinito algo fascinante na educação. Uma vez que, ao trazer esse conceito para sala de aula, surge uma oportunidade para os alunos expandirem seus horizontes e desenvolverem habilidades de pensamento crítico. Assim, neste artigo, iremos explorar alguns conceitos do infinito que podem ser trabalhados na educação básica, além de apresentar atividades pedagógicas sobre este, objetivando desenvolver nos alunos uma visão mais aprofundada do conceito de infinito, superar paradoxos iniciais e desenvolver um pensamento crítico sobre esse tema tão complexo da matemática.

METODOLOGIA

O presente estudo foi concebido por meio de pesquisa realizada no programa PET Matemática e Estatística da UFCG, sob orientação da Professora Tutora Itailma da Rocha. Iniciou-se com uma exploração bibliográfica abrangente do conceito de infinito e do seu tratamento matemático, principalmente através da análise de artigos e dissertações. Em seguida, realizou-se um seminário interno abordando a temática, enfocando predominantemente o conceito no contexto matemático, enquanto também se explorou um pouco o assunto em outras esferas do conhecimento. Posteriormente, foram formuladas propostas de atividades educativas, destinadas à aplicação tanto no fundamental como no ensino médio, com o objetivo geral de promover uma abordagem mais crítica sobre o infinito no contexto matemático.

REFERENCIAL TEÓRICO

Os gregos, notadamente os pitagóricos, foram os primeiros a desenvolver uma compreensão do infinito ao tentarem expressar, por meio de um número, a medida da diagonal de um quadrado com lado unitário. Reconhecendo que $\sqrt{2}$ não poderia ser representado por uma fração, concluíram que esse número é irracional, composto por infinitas casas decimais

ISSN: 2358-8829

não periódicas (Desanti e Probst, 2022). Também podemos observar a presença do infinito na constante $\boldsymbol{\pi}$. Uma forma de aproximação para esse número irracional 3,1415… foi desenvolvido por Arquimedes e pode ser encontrado em Even (2004).

Mas, de acordo com Eves (2004), o símbolo ∞ apenas foi introduzido pelo matemático e sacerdote britânico John Wallis (1616-1703) em 1655. E ao longo da história, diversos estudiosos abordaram o conceito de infinito em seus estudos. Cavalieri (1598-1647) considerou uma reta composta por infinitos pontos; Bernhard Bolzano (1781-1848) investigou propriedades dos conjuntos infinitos; Richard Dedekind (1831-1916) definiu conjuntos infinitos, enquanto George Cantor (1845-1918) demonstrou a enumerabilidade dos números racionais e a não enumerabilidade dos números reais.

A seguir, exploraremos de maneira contextualizada diversos problemas matemáticos relacionados ao conceito de infinito. Nosso objetivo é fornecer uma exposição mais explicativa, destacando essas questões. Buscamos não apenas apresentar os problemas, mas também, em alguns casos, oferecer um aspecto mais aprofundado na história, como no exemplo do Hotel de Hilbert.

Dividir por zero

Sabemos que é impossível efetuar uma divisão por zero. Quando realizamos a divisão de dois números, a e b, a equação $\frac{a}{b} = c$ é válida se $a = b \cdot c$. Logo, ao tentar dividir um número a por zero, estamos, na prática, indagando qual número, quando multiplicado por zero, resulta em a? Claramente, não existe um número que satisfaça essa condição, e, portanto, não conseguimos determinar um resultado numérico para $\frac{a}{0}$.

Entretanto, é interessante observar que, apesar de não existir nenhum número que possa ser visto como sendo o resultado da divisão $\frac{a}{0}$, há argumentos em que essa operação pode ser conceituada através do objeto não numérico do infinito. Isso se dá da seguinte forma:

Quando dividimos o número 1 por 0,1, o resultado é 10. À medida que reduzimos o divisor, observamos que o resultado da divisão aumenta progressivamente ($\frac{1}{0{,}1} = 10$, $\frac{1}{0{,}01} = 100$, $\frac{1}{0{,}001} = 1000$). Em outras palavras, ao diminuir 0,1 para valores mais próximos de zero, a resposta da divisão cresce. Intuitivamente, ao continuar esse processo e diminuir o divisor até zero, a resposta parece tender ao infinito (Silveira,2019).

No entanto, é importante destacar que, na matemática, a divisão por zero permanece indefinida, e a associação direta de $\frac{a}{0}$ ao infinito pode levar a contradições.

Areia na praia

Arquimedes de Siracusa foi um matemático, filósofo, físico, engenheiro, inventor e astrônomo grego. Viveu no século III a.C. e deixou um legado notável que perdura até os dias de hoje, reconhecido por muitos como o criador da Ciência e, até mesmo, como o maior matemático da antiguidade.

Entre as contribuições de Arquimedes, destacam-se suas reflexões sobre números grandes e o infinito, desafiando a compreensão da mente humana em sua época. Questionando a alegação de que os grãos de areia eram infinitos, Arquimedes se propôs a descobrir quantos grãos de areia cabiam no universo.

Nas palavras de Arquimedes: "Há quem pense, rei Gelon, que o número de grãos de areia é infinito." E ele continua, "Há quem, sem considerá-lo infinito, pense que ainda não foi nomeado nenhum número que seja suficientemente grande para exceder a sua multiplicidade" (Marques, Cataneo, 2022). Assim, ele buscou demonstrar geometricamente que certos números ultrapassam não só a massa de areia equivalente à Terra, mas também a correspondente à totalidade do Universo.

Em síntese, Arquimedes não calculou o número de grãos de areia do universo, mas o número de grãos de areia que ocupariam todo o espaço do universo, se este fosse preenchido com areia. Uma vez que o universo é finito, não poderia haver um número infinito de grãos (Ventura, 2021).

De acordo com os cálculos de Arquimedes, a estimativa para a quantidade de grãos de areia no universo exigiria números de "oitava ordem," representados por $(10^8)^8$, resultando em 10^{64}. Em outras palavras, 10 seguido por 63 zeros, uma cifra colossal que, segundo historiadores contemporâneos, reflete o entusiasmo do matemático diante das descobertas de formas matemáticas cada vez mais complexas (Ventura, 2021).

Assim, Arquimedes, ao abordar a contagem dos grãos de areia, destacou a distinção que há entre números grandes e infinito. Essa sua proposta de calcular usando números de "oitava ordem", mostrou que, embora vastos, esses números eram finitos. Dessa forma, ele desafiou a noção de infinitude, demonstrando a capacidade humana de conceber e lidar com grandezas extremamente grandes sem alcançar o domínio do infinito.

Hotel de Hilbert

David Hilbert (1862-1943) foi um renomado matemático alemão, nascido em Königsberg, então parte do Império Alemão (atualmente Kaliningrado, Rússia). Apesar de sua

ISSN: 2358-8829

nacionalidade alemã, muitas vezes ele é associado à Áustria, pois passou grande parte de sua carreira acadêmica lá. Ele fez contribuições significativas em diversas áreas da matemática, dentre elas: Teoria dos Números, Geometria, Lógica Matemática.

O "paradoxo do Hotel de Hilbert" é uma ilustração famosa na teoria dos conjuntos, proposta pelo próprio como uma maneira de destacar as peculiaridades do infinito.

De acordo com Kragh (2014), durante uma palestra em Göttingen, Alemanha, Hilbert tentou esclarecer ao seu público a distinção crucial entre conjuntos finitos e infinitos. Ele ilustrou essa diferença por meio de dois exemplos: um envolvendo um hotel e outro uma festa dançante. No caso de um hotel com um número finito de quartos, todos ocupados, não há espaço para acomodar novos hóspedes. Em contraste, Hilbert destacou que, em um conjunto infinito, não se aplica a mesma lógica: uma parte desse conjunto não é necessariamente menor que o conjunto total. Ou seja, no Hotel de Hilbert, apesar de sempre lotado, sempre há vagas para mais hóspedes.

Além disso, Kragh (2014), comenta que Hilbert, em janeiro de 1924, compartilhou essa "história" sobre o hotel e nem ele considerou particularmente significativo ao ponto de não escrevê-lo. Na época, poucos deram importância a esse exemplo, se não fosse pela retomada desse "paradoxo" feita por George Gamow (1904-1968) em um livro de 1947, mais de duas décadas depois, este poderia ter sido esquecido até os dias de hoje.

Antes de apresentar o "paradoxo do Hotel de Hilbert" com mais detalhes, será necessário alguns conhecimentos, como conjuntos finitos e infinitos, conjuntos enumeráveis e não enumeráveis, fundamentada principalmente por Cantor.

Definição: Seja I_n o conjunto dos números naturais até n:

$$I_n = \{p \in \mathbb{N} \mid 1 \leq p \leq n\}$$

Um conjunto A não vazio é finito se há uma função bijetora $f: I_n \to A$, para algum $n \in \mathbb{N}$, e nesse caso o conjunto A possui exatamente n elementos.

Definição: um conjunto é infinito quando não é finito.

Definição: Um conjunto A é dito enumerável quando é finito ou se há uma correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais, ou seja, quando existe uma função bijetora $f: \mathbb{N} \to A$.

Cantor descobriu que existem conjuntos infinitos com cardinalidades diferentes, e mostrou que o conjunto dos números naturais, inteiros e racionais são enumeráveis enquanto que não conseguimos uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números reais.

ISSN: 2358-8829

O “paradoxo do Hotel de Hilbert” explora a ideia de cardinalidade de conjuntos infinitos, utilizando a ideia de um hotel com uma quantidade infinita de quartos, todos numerados com números naturais. Inicialmente, todos os quartos estão ocupados por uma quantidade infinita de hóspedes. Surpreendentemente, mesmo quando o hotel parece estar completamente lotado, o gerente consegue acomodar um novo hóspede. Para realizar isso, ele pede ao hóspede do quarto número 1 para se mudar para o quarto número 2, o hóspede do quarto número 2 para o quarto número 3, e assim por diante, seguindo a numeração dos números naturais, onde sempre há um próximo termo. Com essa manobra, o quarto número 1 fica disponível para o novo hóspede.

Caso apareçam um grupo de n hóspedes, o gerente move o hóspede do quarto número 1 para o quarto número $n + 1$, e assim por diante, garantindo que os n primeiros quartos fiquem desocupados para acomodar o novo grupo. Sendo sempre possível encontrar vagas para novos hóspedes.

Além disso, podem ser explorados outras “versões” para o hotel de Hilbert como a seguinte:

> Ao chegar um ônibus com infinitos passageiros, para acomodar todos eles, o gerente solicita aos hóspedes do hotel que se mudem de quarto novamente de modo que cada um deve ir para o quarto cujo número é o dobro do quarto em que se encontra, isto é, o hóspede do quarto de número 1 muda-se para o quarto de número 2, o hospede do quarto de número 2 muda-se para o quarto de número 4, o hóspede do quarto número n muda-se para o quarto de número $2n$ e assim por diante. Desse modo, todos os quartos cujos números são ímpares encontram-se disponíveis para os infinitos novos hóspedes (Desanti e Probst, 2022).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Agora apresentaremos algumas atividades, baseada no que foi mostrado, para trabalhar o conceito do infinito de forma pedagógica para alunos do ensino fundamental e médio, a fim de despertar seu interesse e promover uma compreensão crítica sobre o tema. Será proposto indagações e questionamentos que poderão ser feitas dentro de sala para auxiliar o raciocínio dos estudantes para atingirem o objetivo desejado.

Atividade 1: Divisão por Zero

Introdução: Explicação do conceito básico da divisão e por que a divisão por zero é indefinida na matemática convencional. E introdução da ideia intuitiva de que, ao diminuir o divisor para valores cada vez menores, a resposta parece aumentar indefinidamente.

ISSN: 2358-8829

Exploração Prática: Nessa primeira parte, peça aos alunos que escolham um número e o dividam por valores decrescentes próximos de zero. Por exemplo, começar com $\frac{10}{1}$; depois $\frac{10}{0{,}1}$; $\frac{10}{0{,}01}$, e assim por diante.

Os alunos devem registrar os resultados à medida que o divisor se aproxima de zero e observar como os resultados parecem crescer.

Discussão e Reflexão: Conduza uma discussão em grupo sobre as observações feitas pelos participantes. Pergunte se eles notaram algum padrão ou comportamento específico à medida que o divisor diminuía.

Se os alunos não perceberem, o professor pode abordar a intuição de que a resposta parece tender ao infinito à medida que o divisor se aproxima de zero.

Atividade Escrita: Peça aos estudantes que escrevam sobre suas observações e reflexões durante a atividade. Além de incentivá-los a discutir se a ideia de infinito ao dividir por zero faz sentido para eles, e se sim, como eles justificariam essa intuição.

Conclusão: Encerre a atividade destacando que, embora a intuição sugira uma associação ao infinito, na matemática convencional, a divisão por zero permanece indefinida.

Atividade 2: Calculando grãos

Introdução: Comece essa atividade mostrando exemplos de situações na natureza em que algo pode ser considerado infinito, como a contagem de estrelas no céu. O professor pode perguntar aos alunos exemplos dessas situações.

Números Grandes: Inicialmente, peça aos estudantes que tentem imaginar e escrever números muito grandes, como o número de grãos de areia em uma praia ou o número de estrelas na galáxia.

Contagem de Grãos de Arroz: Nessa segunda parte, os alunos vão tentar calcular quantos grãos de arroz têm dentro de uma garrafa.

- Distribua as garrafas transparentes cheias de arroz para cada aluno ou grupo.

ISSN: 2358-8829

- Peça aos alunos que observem a garrafa e tentem estimar a quantidade.
- Se os alunos não souberem como fazer, instrua-os a escolherem uma pequena área para contar o número de grãos de arroz nesse espaço. Podem ser 10 cm^3, por exemplo. Eles devem anotar o número de grãos contados em um pedaço de papel.
- Agora, peça aos alunos que usem a contagem em uma pequena área para estimar o número total de grãos na garrafa inteira. Eles podem fazer isso multiplicando o número de grãos contados na pequena área pelo número total de vezes que essa área poderia caber na garrafa. Esse número será muito grande, mas ainda finito.

Discussão e Reflexão: Realize uma discussão em sala de aula sobre as diferentes estimativas dos alunos. Peça a alguns alunos que compartilhem suas estratégias de estimativa e como chegaram aos seus números.

Conclusão: Conclua a atividade discutindo as descobertas dos estudantes e reforçando os conceitos de infinito e a diferença entre números grandes. Nesse momento, pode-se comentar sobre Arquimedes e como ele propôs contar os grãos de areia da praia, com o objetivo de mostrar que números muito grandes não são infinitos.

Atividade 3: <u>Tipos de infinito</u>

Introdução: Apresentação do paradoxo do Hotel de Hilbert, um hotel que sempre está cheio, mas sempre tem um quarto para os hóspedes, onde mesmo todos os quartos estando ocupados por uma quantidade infinita de hóspedes, ainda assim, o gerente consegue acomodar um novo hóspede movendo todos os outros para o próximo quarto.

Exploração Prática:

1. Conjuntos Enumeráveis:

Mostre como é possível associar cada número natural a um quarto no Hotel de Hilbert, podendo explorar a definição de função bijetora e outros exemplos.

2. Desafios do Hotel de Hilbert:

- Proponha um questionamento aos alunos: se chegar "n" hóspedes para esse hotel, o que o gerente deve fazer?

ISSN: 2358-8829

- Excursão de Ônibus: Proponha o desafio de acomodar uma excursão de um ônibus com infinitos passageiros. Estimule os alunos a pensar em como o gerente do Hotel de Hilbert lidaria com essa situação, promovendo a criatividade. Explore a bijeção entre números pares e naturais, demonstrando que é possível "mover" os hóspedes para os quartos correspondentes ao dobro do número do quarto que se encontram.

Discussão e Reflexão:

1. Comparação de Conjuntos Infinitos:

- Questionar os alunos sobre a relação entre conjuntos infinitos enumeráveis;

Assim, explicando que não é possível enumerar individualmente todos os elementos de um conjunto infinito de maneira direta. No entanto, se pudermos organizar esses elementos em uma sequência, como se estivessem dispostos em uma fila, podemos associá-los aos números naturais. Essa correspondência um a um entre os elementos do conjunto infinito e os números naturais estabelece uma relação biunívoca (Borges, 2015). Portanto, se conseguirmos realizar essa associação, concluímos que o conjunto infinito em questão tem a mesma "quantidade" de elementos que os números naturais. Dessa forma, podemos afirmar que esses conjuntos são infinitos enumeráveis.

- No primeiro caso do item 2 anterior, uma proposta é discutir se era possível criar uma bijeção com os números ímpares.

2. Conjuntos não Enumeráveis: Introduza o conceito de conjuntos infinitos não enumeráveis e destaque a dificuldade de colocar todos os elementos em ordem, como no caso dos números reais. Podendo explicar que existem infinitos números reais entre dois números reais quaisquer. Basta somá-los e dividir por dois para encontrar um novo número entre eles. Essa tentativa de ordenar os números reais nos dá a intuição de que não é possível enumerá-los de maneira sequencial, como se tivéssemos o primeiro elemento, o segundo, o terceiro, e assim por diante.

Atividade Escrita:

1. Paradoxos e Bijeções: Pedir aos alunos que escrevam sobre as bijeções entre diferentes conjuntos infinitos, considerando as versões do paradoxo do Hotel de Hilbert apresentadas, incentivando a reflexão sobre a igualdade de "quantidade" entre conjuntos enumeráveis.

2. Conjuntos Enumeráveis e não Enumeráveis: Solicitar uma análise escrita sobre a impossibilidade de enumerar conjuntos não enumeráveis, como os números reais. Perguntar por que não conseguimos fazer uma correspondência um a um.

Conclusão: Revisar os principais conceitos abordados, enfatizando a diferença entre conjuntos enumeráveis e não enumeráveis. Destacar que a bijeção é fundamental para estabelecer se um conjunto infinito é enumerável.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao propor esse trabalho, almeja-se que os estudantes cultivem uma perspectiva mais aprofundada sobre o conceito infinito, superando desafios iniciais por meio de exemplos tangíveis, como a contagem de grãos de areia e a história intrigante do Hotel de Hilbert. A contagem do grão de areia, por exemplo, proporciona uma abordagem visual e intuitiva, desafiando os alunos a imaginar a quantidade de grãos de areia em uma praia e entender a diferença disto com o infinito. Outra atividade envolvente consiste em dividir um número por valores progressivamente menores, revelando a natureza infinita da busca por números cada vez maiores.

Esses exercícios, juntamente com a exploração de conjuntos enumeráveis e não enumeráveis, oferecem aos alunos uma oportunidade única de formular hipóteses, pensar matematicamente e, ainda, ponderar sobre o infinito de maneiras diversas, enriquecendo assim sua compreensão de conceitos abstratos na matemática. A importância de extrapolar os limites dos livros didáticos, por meio de atividades desafiadoras e variadas, capacita os estudantes a desenvolverem um pensamento crítico que transcende as barreiras tradicionais.

REFERÊNCIAS

BORGES, B. A. **O infinito na matemática**. Dissertação (Mestrado. Programa de PósGraduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2015.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Unicamp, Campinas, 2004.

DESANTI, Diego Mathias; PROBST, Roy Wilhelm. Um outro olhar sobre as indeterminações. **Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática**, v. 10, n. 1, 2022.

GIRALDO, Victor Augusto. **Interatividade CH:** Infinito. Revista Ciência Hoje OnLine. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-08042015-143010/publico/Dissertacao_Revisada_Bruno_Borges_PROFMAT.pdf. Acesso em 05 de nov. 2023.

ISSN: 2358-8829

KRAGH, Helge. The true (?) story of Hilbert's infinite hotel. **arXiv preprint arXiv**:1403.0059, 2014.

SIQUEIRA, Fernanda Kelly da Silva. LORIN, João Henrique. **Os conceitos de infinito atual e infinito potencial em revistas brasileiras**. ACTIO, Curitiba, v. 6, n. 2, p. 1-16, mai./ago. 2021.

MORRIS, R. **Uma Breve História do Infinito:** Dos Paradoxos de Zenão ao Universo Quântico. Jorge Zahar Editor. Rio de Janeiro. 2003.

SILVEIRA, J.F. Porto da. **Calculando com o zero**: dividindo por zero. 8 fev. 2019. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa7d.html. Acesso em: 2 out. 2023.

VENTURA, Dalia. Como Arquimedes conseguiu contar todos os grãos de areia que caberiam no Universo. **BBC News Mundo**, 14 fev. 2021. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/curiosidades-55768716. Acesso em: 10 out. 2023.

MARQUES, Ivo A.; CATANEO, Davi M. Arquimedes: O Contador de Areia. **Sitientibus Série Ciências Físicas**, ed. 18, 6 abr. 2022. Disponível em: https://periodicos.uefs.br/index.php/SSCF/article/view/8567. Acesso em: 9 out. 2023.