ISSN: 2358-8829

PROGRAMAÇÃO LINEAR COM O APOIO DO *SOFTWARE* MAXIMA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE MATRIZES E SISTEMAS LINEARES

Carolina Lupifierio de Queiroz [1]

INTRODUÇÃO

A programação linear é uma abordagem para resolver problemas de otimização, como a maximização de lucros ou a minimização de custos, onde se tem restrições tais como recursos limitados. Sua aplicabilidade é bastante ampla, ocorrendo em problemas operacionais dos mais variados tipos, como problemas de distribuição de recursos, problemas de transporte, problemas de planejamento de produção, problemas de dieta, problemas de corte de materiais, entre muitos outros (Hillier; Lieberman, 2006).

Além de conter conceitos básicos dando suporte para estudos mais avançados, a programação linear pode ser utilizada no contexto educacional como uma alternativa pedagógica para o ensino da Matemática. Diferentes abordagens como esta possibilitam ao estudante explorar novas formas de aprender, o que contribui para a consolidação de conhecimentos já adquiridos, oportuniza a expansão da aprendizagem, o desenvolvimento do pensamento crítico e torna o estudo mais interessante. Destacamos ainda que o uso de ferramentas computacionais nesse contexto contribui com a aprendizagem e, em particular, os *softwares* livres são interessantes pela disponibilidade para acesso sem custos comerciais.

Nesse contexto, este trabalho apresenta uma proposta para o ensino de matrizes e sistemas lineares por meio da programação linear e com o apoio do *software* Maxima. O objetivo principal é expressar a solução analítica do método simplex para problemas de otimização, visando estimular o estudante em relação ao estudo da Matemática por meio da resolução de problemas aplicados e com apoio computacional.

REFERENCIAL TEÓRICO

[1] Mestre em Matemática Aplicada e Computacional; Docente da Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP), carolina@uenp.edu.br.

Um problema de programação linear (PL) é um problema de otimização onde a função objetivo e as restrições são lineares. Segundo Lachtermacher (2004, p.27), sua forma padrão é dada por

$$\begin{aligned}
&Maximize\ \ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_x \\
&Sujeito\ a \\
&\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
&\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
&\quad x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}$$

Um dos mais eficientes métodos de resolução é o método simplex que pode ser aplicado na resolução de qualquer problema de PL e visa determinar a solução ótima no espaço das soluções viáveis. Para a aplicação do método, as inequações na forma padrão são transformadas em equações por meio da adição de variáveis de folga em cada restrição. Com o problema assim colocado, Loesch e Hein (2009, p. 52) descrevem o algoritmo Simplex da seguinte forma:

Passo 1: partir de uma solução básica viável inicial

Passo 2: verificar se a solução atual é ótima. Se é, pare. Senão, vá para o passo 3.

Passo 3: determinar a variável não básica que deve entrar na base atual.

Passo 4: determinar qual variável básica deve sair da base atual.

Passo 5: obter a nova solução básica compatível e retornar ao passo 2.

MATERIAIS E MÉTODOS

Esta abordagem é sugerida como uma aplicação de matrizes e sistemas lineares e, para tanto, é necessário que o discente já tenha estudado tais conceitos previamente. O problema deve ser apresentado num contexto simples para o estudante, possibilitando o reconhecimento do objetivo, das variáveis de decisão e das restrições envolvidas. A partir do modelo na forma padrão, conforme Lachtermacher (2004, p.27), introduz-se as variáveis de folga em cada restrição, transformando as inequações em um sistema de equações lineares. Escrevendo o sistema em notação matricial, utiliza-se o *software* Maxima para sua resolução. Nesse momento é necessário introduzir os conceitos de solução viável, solução ótima, variáveis básicas e variáveis não básicas. Inicia-se então o método simplex definindo as variáveis não básicas a priori atribuindo valor zero.

ISSN: 2358-8829

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para exemplificar o procedimento considere a seguinte situação-problema: Dois produtos A e B necessitam de três recursos para serem produzidos. O produto A precisa de duas unidades do recurso 1, uma unidade do recurso 2 e três unidades do recurso 3 por lote, enquanto que o produto B precisa de uma unidade do recurso 1, duas unidades do recurso 2 e três unidades do recurso 3 por lote. O lucro por lote do produto A é de R$ 3,00 e do produto B é de R$ 2,00. Sabendo que se tem disponível duas unidades do recurso 1, duas unidades do recurso 2 e 4 unidades do recurso 3, qual a quantidade de lote de cada produto deve ser produzido para que se tenha o maior lucro possível?

O objetivo é maximizar o lucro sujeito às restrições de disponibilidade de recursos para a produção de lotes de cada um dos produtos. Considerando as variáveis de decisão x e y como as quantidades de lotes dos produtos A e B que serão produzidos, respectivamente, e L o lucro total obtido pela produção desses lotes, o modelo matemático na forma padrão é

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize } L = 3x + 2y\\
&\text{sujeito a}\\
&\qquad 2x + y \leq 2\\
&\qquad x + 2y \leq 2\\
&\qquad 3x + 3y \leq 4\\
&\qquad x \geq 0,\ y \geq 0
\end{aligned}$$

Para determinarmos uma solução inicial viável, que será iterativamente melhorada, transformamos o conjunto de restrições em um conjunto de equações equivalentes com a introdução de variáveis de folga, conforme modelo abaixo.

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize } L = 3x + 2y\\
&\text{sujeito a}\\
&\qquad 2x + y + s_1 = 2\\
&\qquad x + 2y + s_2 = 2\\
&\qquad 3x + 3y + s_3 = 4\\
&\qquad x,\ y,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Em notação matricial, escrevemos o sistema de equações lineares como

ISSN: 2358-8829

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Então, definimos inicialmente as váriáveis básicas (VB) como as váriáveis s_1, s_2 e s_3 e as variáveis não básicas (VNB) como as variáveis x e y, as quais são atribuídos valores iguais a zero. A cada nova iteração do método em busca de uma solução ótima para o problema, uma variável entra e outra sai do conjunto de variáveis básicas. A cada passo, separamos as VB das VNB, testando a otimalidade da solução obtida. Se a solução obtida não for ótima, decide-se qual variável entra na base e qual sai e então o método continua. Se a solução obtida for ótima, o método pára. Seguindo esse procedimento, na primeira iteração escrevemos

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Então isolamos as VB das VNB como na equação abaixo. Note que cada matriz do lado direito da equação foi obtida multiplicando as matrizes dos termos constantes e dos coeficientes de x e y à esquerda pela inversa da matriz dos coeficientes das VB.

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} y$$

Aqui temos $x = y = 0$, $s_1 = 2$, $s_2 = 2$, $s_3 = 4$ e $L = 3x + 2y = 0$, que obviamente não é o valor ótimo. Então, para decidirmos qual variável entra e qual sai do conjunto de VB, considerando a regra da função objetivo, como o maior coeficiente positivo é o da variável x, aumentamos o valor de L mais rapidamente aumentando o valor de x do que se aumentarmos o valor de y nesse passo.

Assim, da equação matricial anterior, mantendo $y = 0$, devemos ter simultaneamente que $s_1 = 2 - 2x \geq 0$, $s_2 = 2 - x \geq 0$ e $s_3 = 4 - 3x \geq 0$, de onde segue que $x \leq 1$, $x \leq 2$ e $x \leq 4/3$, respectivamente. Isso significa que o maior valor que podemos tomar para x é 1 e que para esse valor temos $s_1 = 2 - 2x = 0$, ou seja, x entra no conjunto das VB e s_1 no conjunto das VNB. Então, repetimos esse procedimento: separamos na equação matricial inicial as VB das VNB fazendo

ISSN: 2358-8829

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} y + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} s_1 + \begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\s_2\\s_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix}$$

Assim, isolando as VB do lado esquerdo da igualdade como no passo anterior, obtemos

$$\begin{bmatrix}x\\s_2\\s_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1/2\\3/2\\3/2\end{bmatrix} y - \begin{bmatrix}1/2\\-1/2\\-3/2\end{bmatrix} s_1$$

Aqui usamos os seguintes comando no *software* Maxima para calcular as matrizes do lado direito da igualdade: A:matrix([2], [2], [4])$ B:matrix([1], [2], [3])$ C:matrix([1], [0], [0])$ D:invert(matrix([2,0,0], [1,1,0], [3,0,1]))$ D.A; D.B; D.C;

Agora, como $y = s_1 = 0$, da equação acima obtemos $x = s_2 = s_3 = 1$ e $L = 3(1 - y/2 - s_1/2) + 2y = 3 + y/2 - 3s_1/2 = 3$, que não é o valor ótimo pois se aumentarmos o valor de y podemos aumentar ainda mais o valor de L, já que seu coeficiente é positivo.

Logo, da equação anterior, mantendo $s_1 = 0$, devemos ter simultaneamente que $x = 1 - (1/2)y \geq 0$, $s_2 = 1 - (3/2)y \geq 0$ e $s_3 = 1 - (3/2)y \geq 0$, o que implica que $y \leq 2$, $y \leq 2/3$ e $y \leq 2/3$, respectivamente. Isso significa que o maior valor que podemos tomar para y é $2/3$ e que para esse valor temos $x = 1 - (1/2)y = 2/3$ e $s_1 = s_2 = s_3 = 0$. Vamos escolher, sem perda de generalidade, s_2 para entrar no conjunto das VNB.

Assim, para a próxima iteração, escrevemos

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} s_1 + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} s_2 + \begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\3&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\s_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix}$$

de onde segue que

$$\begin{bmatrix}x\\y\\s_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/3\\2/3\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2/3\\-1/3\\-1\end{bmatrix} s_1 - \begin{bmatrix}-1/3\\2/3\\-1\end{bmatrix} s_2$$

Novamente utilizamos o Maxima para calcular as matrizes do lado direito da equação da seguinte forma: A:matrix([2], [2], [4])$ B:matrix([1], [0], [0])$ C:matrix([0], [1], [0])$ D:invert(matrix([2,1,0], [1,2,0], [3,3,1]))$ D.A; D.B; D.C;

Logo, $L = 3.(2/3 - 2s_1/3 + s_2/3) + 2.(2/3 + s_1/3 - 2s_2/3)$, ou seja, $L = 10/3 - 4s_1/3 - s_2/3$ e como $s_1 = s_2 = 0$, concluímos que $L = 10/3$. Note que se aumentarmos o valor de s_1 ou de s_2, diminuímos o valor de L já que essas variáveis têm coeficientes negativos. Portanto, o método pára e o valor ótimo foi encontrado, o lucro máximo possível é

$L = 10/3$, ou seja, aproximadamente, R$3,33 a cada 2/3 de lotes produzidos tanto do produto A quanto do produto B.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou detalhadamente uma proposta de aplicação de problemas de otimização no ensino de conceitos básicos de Matemática e da pesquisa operacional. Acreditamos que a programação linear utilizada desta forma no estudo de matrizes e sistemas lineares oportuniza ao estudante desenvolver o pensamento algébrico e computacional, além de permitir ao professor trabalhar a matemática de forma contextualizada, relacionando a teoria com a prática e colaborando positivamente com a formação do aluno.

Além disso, o *software* Maxima foi aqui utilizado como um facilitador nos cálculos matemáticos necessários para o desenvolvimento do método de solução. Destacamos que o potencial do software é ainda maior nesse contexto já que possui um pacote de otimização linear que usa o algoritmo simplex e pode ser carregado ao se executar o comando *load("simplex")*. O comando *maximize_lp* maximiza a função objetivo linear sujeita a restrições lineares representadas por equações ou inequações lineares e o comando *minimize_lp* é usado da mesma forma, porém para problemas de minimização. Desta forma, o software possibilita a aplicação da programação linear em problemas de maior complexidade e com aplicações reais ao cotidiano dos estudantes.

Palavras-chave: Programação Linear, Ensino de Matemática, *software* Maxima.

REFERÊNCIAS

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à pesquisa operacional.** São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa operacional na tomada de decisões: modelagem em Excel.** 2ª ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2004.

LOESCH, C.; HEIN, N. **Pesquisa operacional: fundamentos e modelos.** São Paulo: Saraiva, 2009.