DESENVOLVENDO O SEMIÁRIDO ATRAVÉS DO ENSINO DE SÉRIES COM RECURSO *MOBILE*

Kaelly de Freitas Silva[1]
Simone Taiane Gameleira [2]
Otávio Paulino Lavor [3]
Fabíola Luana Maia Rocha[4]

RESUMO

São diversas as dificuldades no ensino em região onde há difícil acesso a conteúdo de qualidade. Dificuldades estas são encontradas em semiárido potiguar, onde o acesso a grandes centros ainda é complicado. Diante disso, este trabalho traz uma atividade para o ensino de séries de e suas comparações através de análises gráficas realizadas em aplicativos *mobile*. A escolha pelo aplicativo mobile se justifica pelo fato dos alunos possuem aparelhos do tipo *smartphone* que podem acessar de forma móvel de qualquer lugar, visto que o aplicativo não necessita de internet. A atividade mostra que séries de potências são mais aproximadas que séries trigonométricas e que a aplicação gráfica gera motivação e melhor compreensão. Além disso, pode-se concluir que os aplicativos em aparelhos portáteis são fortes aliados ao desenvolvimento científico da região.

Palavras-chave: Geogebra, Motivação, Aproximação.

INTRODUÇÃO

O estudo de algumas funções devido ao seu grau elevado de complexibilidade, ou a necessidade de encontrar valores em um ponto ainda não conhecido, é recomendado a partir de representações mais simplificadas das mesmas, realizando, portanto, uma aproximação da função desejada por meio de outra função. Uma dessas formas de aproximação de funções é partir da utilização de séries matemáticas.

Uma série corresponde à realização de uma soma de todos os termos de uma sequência que tende ao infinito. Em síntese, quanto mais termos da sequência do somatório adicionados, mais próximo se estará do valor real. Uma série está presente não apenas na ciência matemática, sendo utilizada em inúmeras áreas de estudo, como óptica, relatividade espacial e eletromagnetismo (STEWART, 2013).

[1] Graduada em Ciência e Tecnologia pela Universidade Federal Rural do Semi-árido - UFERSA, kaellyfreitas2010@hotmail.com;
[2] Graduada em Ciência e Tecnologia pela Universidade Federal Rural do Semi-árido - UFERSA, taiane340@gmail.com;
[3] Professor adjunto na Universidade Federal Rural do Semi-árido - UFERSA, otavio.lavor@ufersa.edu.br.
[4] Professora da Universidade Federal Rural do Semi-árido – UFERSA e Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino- PPGE, fabiola.rocha@ufersa.edu.br

Analises de aproximação de funções tem possibilidade de serem realizadas utilizando as séries de Fourier e as de Taylor em equações diferenciáveis. Essas duas séries são análogas no sentido de fornecerem um modo de se expressar funções complexas em termos de certas funções elementares familiares. Em contraponto, são distintas em algumas características, já que a série de Taylor carece de funções diferenciáveis e a série de Fourier exige que as funções sejam diferenciáveis por partes, além de contínuas, permitindo a existência de infinitos pontos de descontinuidade na reta (BOYCE E DIPRIMA, 2017).

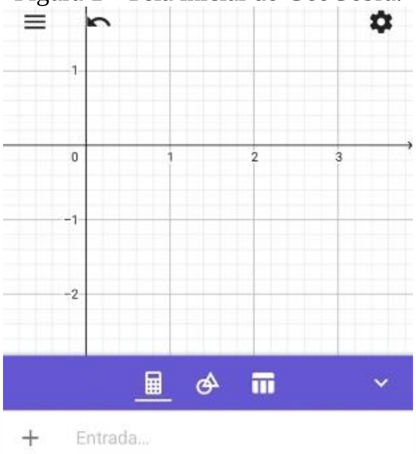
Portanto, este trabalho propõe uma análise gráfica de função e de suas aproximações por meio das séries de Fourier e Taylor objetivando uma melhor compreenção a ensinar e aprender.

METODOLOGIA

O percurso metodológico deste trabalho consiste de uma revisão bibliográfica a respeito do conteúdo de séries de Taylor e Fourier. Nesta revisão, são adquiridos conhecimentos prévios sobre as séries e suas aplicações. Nesta fase, também percebe-se uma dificultdade para ensinar e aprender. Então, sugere-se a análise gráfica. Para escolha do objeto educacional para plotar os gráficos, levou-se em consideração a disponibilidade dos alunos e a estrutura oferecida. Então, optou-se por um software livre que podesse ler acessado pelo aparelhos do tipo smartphone.

O aplicativo escolhido foi o GeoGebra *Mobile* que é oferecido por *Internetional GeoGebra Institute*, lançado desde 06 de dezembro de 2015 na *Play Store*. A figura 1 mostra a tela inicial ao se abrir o aplicativo.

Figura 1 - Tela inicial do GeoGebra.



Fonte: Autor (2019).

A figura mostra a tela inicial, onde pode-se notar, o local de acesso as configurações, a representação do plano cartesiano para o esboço da função digitada e a barra onde mostra as entradas, ferramentas e tabela de valores.

DESENVOLVIMENTO

Uma série de potência é uma classe específica das séries infinitas do seguinte formato:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots \tag{1}$$

onde cada termo é multiplicado pelas constantes $c_0, c_1, c_2, \cdots$, denominadas de coeficientes da série de potência, e x_0 é denominado de seu centro. Dessa forma, uma série de potências com o seu centro equivalente a zero torna-se um polinômio em x. (MUNEM E FOULIS, 2011. v.2).

De forma que começa-se com uma função f e tenta-se encontrar uma serie de potência que convirja para esta, realizando portanto uma expansão de f como uma série de potências. Cujo domínio será o intervalo de convergência da série.

Além de definir uma função, uma série de potência pode representar uma função $f(x)$ desde que esta seja analítica em um ponto x_0. Funções analíticas podem ser representadas pela série de Taylor , que são assim denominadas em homenagem a Brook Taylor (1685-1731) que foi a primeira pessoa a fazer uso de termos espeficicos em sequencias infinitas para expandir funções e resolver equações diferenciais (THOMAS et al. ,2012).

Certas funções que possuem como características serem infinitamente deriváveis são capazes de gerar series de potência de Taylor. Podendo a partir disso produzir aproximações polinomiais da função inicial. Para que isso aconteça, basta que a função obedeça o teorema de Taylor, que estabelece segundo Thomas et al. (2012): *Se f e suas primeiras derivadas f', f'', f''', ..., $f^{(n)}$ forem continuas no intervalo fechado entre x_0 e x, e $f^{(n)}$for derivável no intervalo aberto entre x_0 e x, então existe um número c entre x_0 e x , tal que:*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \tag{2}$$

de forma que:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{3}$$

Portanto, a função $f(x)$ pode ser aproximada pelo somatório do polinômio de Taylor de ordem n formado $P_n(x)$ e a função $R_n(x)$ que corresponde ao resto de ordem n, ou termo de erro que como pode ser visto acima equivale a $(n+1)$-ésima derivada de $f(n+1)$ num ponto c dependente de x_0 e x e existente entre esse intervalo.

A série de Taylor é uma classe restrita das séries de potência que permite estudar o comportamento de funções em torno de um ponto especifico. Partindo de uma função infinitamente derivável aplicada a série padrão de potências foi possível encontrar o n-ésimo cociente da série por meio da substituição da n-ésima derivada $f^{(n)}$ definida no ponto especifico x_0 obtendo por fim a série de Taylor que pode ser vista na equação (2) (STEWART, 2013).

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (4)$$

Portanto, quando uma função f consegue ser representada por meio de uma série de potência em torno do ponto x_0, então f é igual à soma de sua série de Taylor. E sendo f a soma de todos os termos de uma série, quando definido um número finito para n , será obtido o polinômio de Taylor de grau n e a função convergirá em torno do limite dessa soma parcial da série. (STEWART,2013).

O nome séries de Fourier é em homenagem a Joseph Fourier, o primeiro a fazer uso sistemático dessas séries em seus artigos de 1807 e 1811 sobre a condução de calor, em que sua preocupação era resolver a equação do calor representando suas soluções como funções não necessariamente contínuas, por soma de séries trigonométricas, onde seus resultados inspiraram um fluxo de pesquisa importante que continua até hoje. (BOYCE E DIPRIMA, 2017). Com estes trabalhos, Fourier estabeleceu que uma função arbitrária pode ser expressa por uma série dada na equação (5):

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \ b_m sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right] \quad (5)$$

Assim como a série de Taylor, a série de Fourier é uma ferramenta matemática para representação de funções complexas por meio de termos mais usuais Por meio dessa série é possível resolver muitos problemas que envolvam equações diferenciais parciais, desde que possa expressar uma função integrável de período $2L$ dada como uma série periódica, ortogonal e infinita de senos e cossenos, sendo portanto $2L = 2\pi$ (FIGUEIREDO, 2014). É a partir dessas características que é possível construir expressões para os coeficientes da série de Fourier, a_0, a_m e b_m.

Para encontrar o coeficiente a_0 basta realizar a integração da equação (5) em função de x com o intervalo de integração estabelecido de $-L$ até L (STEWART,2013).

Com a resolução das integrais termos se anulam, exceto o equivalente a primeira integral da direita , que isolando a_0, tem-se a equação que corresponde ao coeficiente desejado.

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \quad (6)$$

Quando trata-se do coeficiente a_m, parte-se do suposto que a equação (5) é verdadeira e então esta é multiplicada por $cos\frac{n\pi x}{L}$ com um valor fixo positivo de n e logo em seguida integra-se em relação ao termo x num intervalo definido de $-L$ até L (STEWART,2013).

Solucionando as integrais formadas é possível identificar que apenas uma das integrais não se anula, e esta difere-se de zero somente quando o valor numérico de $m = n$, em que se obtem que uma parte da integral equivale a L, permitindo escrever a equação (5) para valores de m acima de zero, que com fácil manipulação algébricas, compõe o coeficiente e a fórmula definida para o coeficiente $a_m$expresso na equação (7).

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\frac{m\pi x}{L}\, dx \quad (7)$$

Tendo em conta b_m, realiza-se uma multiplicação com a equação (5) , assim como ocorreu para o encontro de a_m, entretendo que o termo multiplicado trata-se de $sen\frac{n\pi x}{L}$, mas considera-se o mesmo intervalo de integração assim com as característica de n positivo. Resolvendo as integrais, é perceptível que o primeiro termo após a igualdade por se tratar de uma função típica senoidal se anulará após substituição do intervalo de integração, assim como acontece com o segundo termo após a igualdade, sobrando, portanto, apenas o ultimo termo após a igualdade que possuirá o valor equivalente mostrado na equação (8), que que define o coeficiente b_m.

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen\frac{m\pi x}{L}\, dx \quad (8)$$

Portanto no conjunto de pontos em que a série converge, ou seja, se a sequências das somas parciais consegue convergir, é definindo então uma função f onde os valores expressos de x correspondem à soma da série para aquele valor de x definido. Podendo dizer então que a série construída é série de Fourier da função f.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Dentro das funções, foi obtido como uma das escolhas a função $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$ para a realização da aplicação da aproximação por séries.

Esta pode ser aplicada na série de Taylor por ser contínua num certo intervalo e infinitamente derivável, assim como na série de Fourier que, apesar de ser em função de senos e cossenos pode ser aplicada quando não incluindo no intervalo de integração dos coeficientes a indeterminação da função existente em $x = 4$, ou seja , restringindo-se a apenas um intervalo da função.

Para a função $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$ será encontrada a série de Taylor considerando a n-éssima derivada da função em torno de um ponto especifico $x_0 = 0$. Onde obterá o seguinte polinômio de Taylor.

$$\frac{1}{(x-4)^2} = \frac{1}{16} + \frac{2}{4^3 \times 1}x + \frac{6}{4^4 \times 2 \times 1}x^2 + \frac{24}{4^5 \times 3 \times 2 \times 1}x^3 + \cdots \tag{9}$$

Para a série de Fourier desta função foi encontrada os coeficientes para esta série num intervalo de integração de $-\pi$ a π. De forma que:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(x-4)^2} dx \tag{10}$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(x-4)^2} cos\frac{m\pi x}{\pi}\, dx \tag{11}$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(x-4)^2} sen\frac{m\pi x}{\pi}\, dx \tag{12}$$

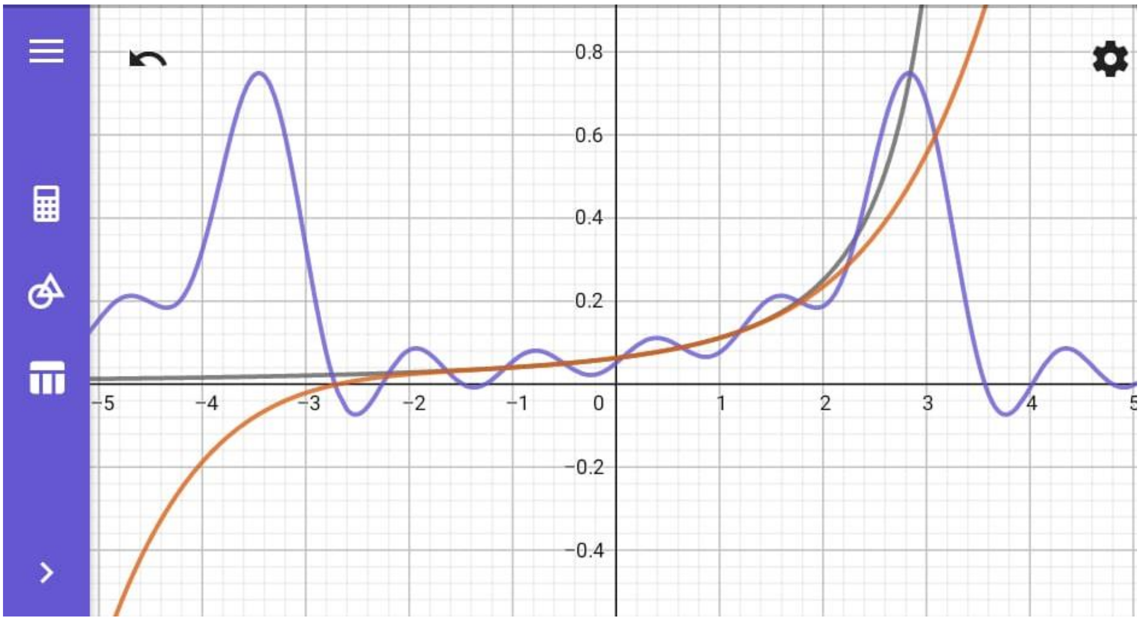
Utilizando os índices $m = 5$ para o somatório de Fourier e $n = 5$ para o somatório de Taylor, construiu-se as equações (13) e (14)

$$\begin{gathered} f_F(x) = -\frac{1}{(\pi^2 - 16)} - 0{,}15474159\cos(x) + 0{,}08745666\cos(2\mathrm{x}) - \\ 0{,}0556899\cos(3\mathrm{x}) + 0{,}03825771\cos(4\mathrm{x}) - 0{,}02773168\cos(5\mathrm{x}) + \\ 0{,}12305172\mathrm{sen}(\mathrm{x}) - 0{,}11029227\mathrm{sen}(2\mathrm{x}) + 0{,}09358928\mathrm{sen}(3\mathrm{x}) - \\ 0{,}07979611\mathrm{sen}(4\mathrm{x}) + 0{,}06895769\mathrm{sen}(5\mathrm{x}) \end{gathered} \tag{13}$$

$$f_T = \frac{1}{16} + \frac{1}{32}x + \frac{3}{256}x^2 + \frac{1}{256}x^3 + \frac{5}{4096}x^4 + \frac{3}{8192}x^5 \tag{14}$$

A atuação das funções formadas ao longo de x para este valor do índice final dos somatórios podem ser visualizadas na Figura 2.

Figura 1: Representação gráfica da função e suas séries para 5 termos.



Fonte: Autor (2019).

A linha preta representa a função, a linha laranja a série de Taylor e a linha azul, a série de Fourier. Pelo gráfico, percebe-se que a série de Taylor produz uma melhor aproximação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a realização da representação da função $f(x)$ por meio da séries de potências de Taylor centradas em $x_0 = 0$, e a série trigonométrica de Fourier, foi notório ver as funções formadas f_F e f_T se assemelhavam a $f(x)$, realizando uma aproximação entre as funções como era esperado. Entretanto, como a função analisada não era dita periódica e para a formação da série de Fourier foi determinado um intervalo de periodicidade de $-\pi$ a π este é o intervalo no qual a função formada por esta série realiza a aproximação da função $f(x)$ por meio de ondas. Portanto, é admissível dizer que a série de Taylor para a função $f(x)$ é mais aconselhável para realização de aproximações do que a série de Fourier para esta mesma função.

Auxiliado ao requisito de precisão na aproximação alia-se o fato da construção da série de Taylor ser de mais fácil construção, já que derivadas necessitam de menos dedicação de tempo do que resolução de integrais por partes para encontrar os valores numéricos dos coeficientes da série de Fourier.

A análise gráfica possibilitou a conclusão de que a série de Taylor aproxima mais rápido que a série de Fourier. Além disso, aprender e ensinar com gráficos torna os conteúdos mais compreensivos.

REFERÊNCIAS

BOYCE, Willian E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica.** Fortaleza: UEC, 2002.

GIL, Antonio Carlos**. Como elaborar projetos de pesquisa.** São Paulo: Atlas, 1991.

MUNEM, Mustafa A. ; FOULIS, David J. **Calculo**. Tradução de André Lima Cordeiro et al. Rio de Janeiro:LTC, 2011, v.2.

SILVA, Edna Lúcia da.; MENEZES, Estera Muszkat. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação**. 4. ed. rev. atual. Florianópolis: UFSC, 2005.

STEWART, James. **Cálculo**. 3. Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v.2.

THOMAS, George B. et al. **Cálculo**. Tradução de Carlos Scalici. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. V.2.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais**. 3. Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001, v.1.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais**. 3. Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001, v.2.