A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E A RAZÃO ÁUREA

Renata Lúcia Sá Moreira, IFAL.
Dr. Givaldo Oliveira dos Santos/IFAL.

Instituto Federal de Alagoas/ natildesrenata@gmail.com, givaldoead@gmail.com

THE FIBONACCI SEQUENCE AND THE AUREA REASON

Resumo: O universo com sua imensidão e harmonia provocam no homem um questionamento, resultando em constantes procuras por fundamentos que justifiquem tamanha simetria do meio em que vivemos. Para desvendar essa perfeição existente no universo temos a matemática como ferramenta primordial para auxiliar nesse processo de soluções, propondo combinações e relações numéricas. A proporção áurea ou razão áurea é estudada e aplicada desde as civilizações mais antigas (Contador, 2007), sendo observada em diversas manifestações na natureza e até no corpo humano. Esta razão foi observada no estudo de Leonardo Fibonacci. Uma de suas principais obras é o livro ábaco (Liber Abaci) publicado em 1202. Em [1], Boyer afirma que este livro foi importante na transmissão do sistema de numeração hindu-arábico nas camadas cultas da Europa. Segundo boyer[1] (1974), no livro Ábaco de Leonardo, no capitulo 12, destaca-se o problema relacionado a reprodução de coelhos, onde o mesmo detectou a existência de uma regularidade matemática. Lançando a seguinte pergunta: “Quantos pares de coelhos podem ser gerados de um par de coelhos em um ano?”. Este estudo está organizado em cinco partes, são elas: História de Fibonacci; Origem e definição da sequência de Fibonacci; Definição da Razão Áurea; o retângulo áureo e suas aplicações, e algumas considerações sobre a contribuição de Fibonacci.

Palavras-chave: Sequência de Fibonacci, proporção de ouro, retângulo áureo.

Abstract: The universe with its immensity and harmony provoke in man a questioning, resulting in constant searches for foundations that justify such a symmetry of the environment in which we live. To uncover this perfection in the universe we have mathematics as a primordial tool to aid in this process of solutions, proposing combinations and numerical relations. The golden ratio or golden ratio is studied and applied from the earliest civilizations (Contador, 2007), being observed in diverse manifestations in the nature and even in the human body. This reason was observed in the study of Leonardo Fibonacci. One of his major works is the abacus book (Liber Abaci) published in 1202. In [1], Boyer states that this book was important in transmitting the Hindu-Arabic numbering system in the cultured strata of Europe. According to Boyer [1] (1974), in the book Abaco by Leonardo, in chapter 12, the problem related to the reproduction of rabbits is highlighted, where it detected the existence of a mathematical regularity. Casting the following question: "How many pairs of rabbits can be raised from a pair of rabbits in a year?". This study is organized in five parts, they are: History of Fibonacci; Origin and definition of the Fibonacci sequence; Definition of the Golden Ratio; the golden rectangle and its applications, and some considerations about the contribution of Fibonacci.

Key words: Fibonacci sequence, gold ratio, golden rectangle.

1. Introdução

O universo com sua imensidão e harmonia provocam no homem um questionamento, resultando em constantes procuras por fundamentos que justifiquem tamanha simetria do meio em que vivemos. Para desvendar essa perfeição existente no universo temos a matemática como ferramenta primordial para auxiliar nesse processo de soluções, propondo combinações e relações numéricas. A proporção áurea ou razão áurea é estudada e aplicada desde as civilizações mais antigas (Contador, 2007), sendo observada em diversas manifestações na natureza e até no corpo humano. Esta razão representa a mais agradável proporção entre dois segmentos ou duas medidas. Os gregos antigos a designavam como “divisão de um segmento em média e extrema razão” ou simplesmente “secção”.

Esse trabalho tem como proposta apresenta uma das mais interessantes sequências da Matemática, as chamadas sequências de Fibonacci, bem como, a sua relação com a razão Áurea, um número irracional que surge na natureza e nas variadas áreas da ciência. O objetivo geral é apresentar a história de Fibonacci, sua descoberta que levou a razão áurea, exemplos dessas sequências, bem como, o processo de demonstração usado pelos estudiosos da área visando provar essa verdade matemática, descoberta no século XI e, até hoje, conhecida como razão áurea. Bem como demonstrar o retângulo áureo e algumas observações dele em objetos do nosso dia-a-dia.

Este estudo está organizado em cinco partes, são elas: História de Fibonacci; Origem e definição da sequência de Fibonacci; Definição da Razão Áurea; o retângulo áureo e suas aplicações, e algumas considerações sobre a contribuição de Fibonacci.

2. História de Fibonacci

Segundo Boyer[1] (1974),Leonardo de Pisa, nasceu em Pisa na Toscânia (Itália) em 1170, e ficou conhecido como Leonardo Fibonacci devido ao fato de Fibonacci ser um diminutivo de Fillius Bonacci, que queria dizer filho de Bonacci, pelo que o nome de seu pai era, Guilielmo Bonnacci. Foi considerado o mais talentoso matemático de sua época, e viveu até os 75 anos.

No inicio do século XII, Pisa era um dos grandes centros comerciais italianos, tais como Gênova e Veneza, e tinha vários entrepostos comerciais pelos portos do Mediterrâneo. O pai de Leonardo ocupou o lugar de chefe de um desses entrepostos, no norte da costa de África e foi lá que Leonardo iniciou os seus estudos de matemática com professores islâmicos. Viajou pelo Mediterrâneo adquirindo o conhecimento matemático do mundo árabe. Entrou em contato com os procedimentos matemáticos orientais, com os métodos algébricos árabes e os numerais indo-arábicos e assimilou numerosas informações aritméticas e algébricas.

Convencido da superioridade prática desse sistema de numeração em comparação com o sistema de numeração Romana, tanto para os cálculos como para a escrita, por volta de 1202, quando regressa a sua cidade natal, publica a sua mais famosa obra intitulada Líber Abacci (livro do ábaco). Onde segundo Boyer[1] (1974), este não é um livro somente sobre ábaco, é um tratado muito complexo sobre os métodos e problemas algébricos em que o uso dos numerais indo-arábicos é fortemente recomendado.

O livro trata de assuntos aritméticos e algébricos e, com certeza foi um grande difusor pela Europa do sistema indo-arábico. Os inúmeros capítulos que integram a obra retratam a leitura e escrita desses numerais, assim como a resolução de vários problemas relacionados ao cálculo de inteiros e frações, e problemas de geometria e quanto à permutação de mercadorias.

O problema mais famoso entre todos os seus tratados é o que deu origem a sequência numérica 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,..., hoje conhecida como Sequência de Fibonacci.

3. Origem e definição da sequência de Fibonacci

Segundo boyer[1] (1974), no livro Ábaco de Leonardo, no capitulo 12, destaca-se o problema relacionado a reprodução de coelhos, onde o mesmo detectou a existência de uma regularidade matemática. Que consiste em um homem por um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. E se deseja saber quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todos os meses cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês.

Considerado as condições do problema, vejamos o processo de reprodução a cada mês:

- No primeiro mês nasce apenas um casal;
- Casais amadurecem e reproduzem-se apenas após o segundo mês de vida;
- Não há problemas genéticos no cruzamento consanguíneo;
- Todos os meses, cada casal fértil dá à luz um novo casal;
- Os coelhos nunca morrem.

Considerando as condições estabelecidas para o problema, o processo de reprodução, a cada mês obedece a configuração indicada na tabela 1.

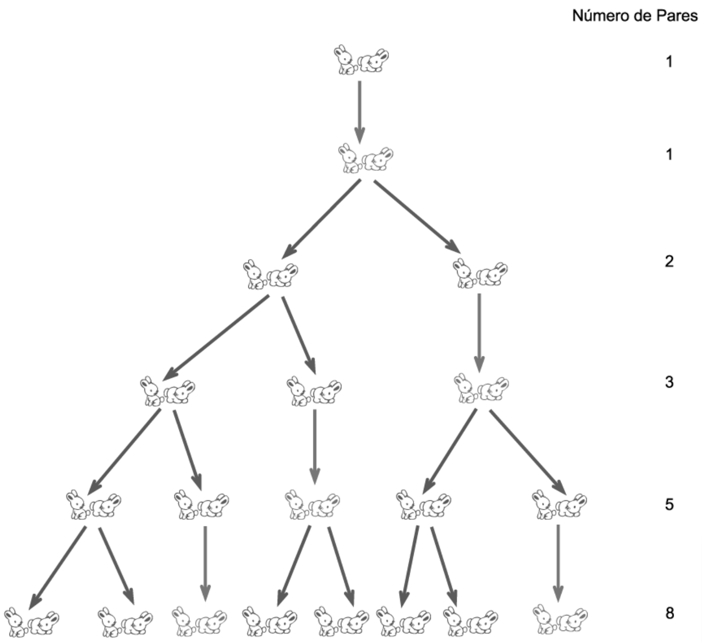
Tabela 1 – Crescimento populacional da espécie investigada.

Mês	Casais adultos	Filhotes	Total
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8

7	8	5	13
8	13	8	21
9	21	13	34
10	34	21	55
11	55	34	89
12	89	55	144

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 1: Esquema ilustrativo do cruzamento dos coelhos.



Fonte: https://goo.gl/owGnSu, 2018

Concluindo, o número de pares de coelhos em determinado mês, é a soma dos pares de coelhos existentes nos dois meses anteriores a este.

Os resultados das observações motivou Fibonacci a definir a seguinte sequência: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...), a qual ficou conhecida como sequência de Fibonacci.

Nessa direção, o modelo matemático que representa a situação é dado por:

$$F(n) = F_n = \begin{cases} 1, n = 1; \\ 1, n = 2; \\ F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3, \text{ onde n é um número natural maior ou igual a 3.} \end{cases}$$

Essa relação é a lei associativa que representa a Sequência de Fibonacci, anteriormente explicitada.

A referida Sequência consiste numa sucessão infinita de números que obedecem a um padrão, em que cada elemento subsequente é a soma dos dois anteriores. Assim, após 0 (zero) e 1, vêm 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, etc.

4. Definição da Razão Áurea

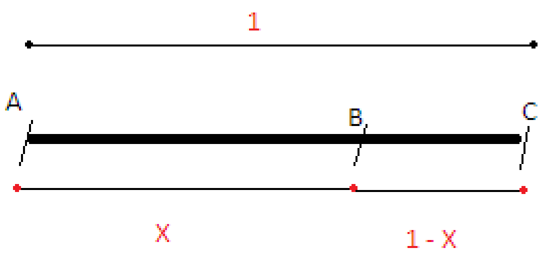
Nessa seção, será definida uma intrigante constante da matemática, o número de ouro, daí surge á razão áurea.

A razão áurea, conhecida também como segmento áureo ou proporção áurea, representa a mais agradável proporção entre duas medidas. Os gregos antigos a designavam como “divisão de um segmento em média e extrema razão” ou simplesmente ‘secção”. No começo do século XXI acertou-se identificá-la pela letra grega φ (phi) (lê-se: Fi), em homenagem ao responsável pelo templo grego Parthenon, o arquiteto e escultor Phídias.

Podemos chega à razão áurea através da demonstração:

Consideremos que a m(AC) = 1 unidade, m(AB) = X e a m(BC) = 1-X.

Figura 2: Segmento áureo.



Fonte: Elaborada pela autora.

Obtemos então a divisão de um segmento em média e extrema razão:

$$\frac{m(AC)}{m(AB)} = \frac{m(AB)}{m(BC)}$$

Ou seja:

$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$

Aplicamos a propriedade fundamental das proporções. O produto dos meios é igual ao produto dos extremos, obtendo uma equação de segundo grau:

$x^2 = 1 - x$ -> $x^2 + x - 1 = 0$

Resolvemos a equação e encontramos duas raízes:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Desprezamos a raiz negativa e calculamos a razão phi = 1/x para obter:

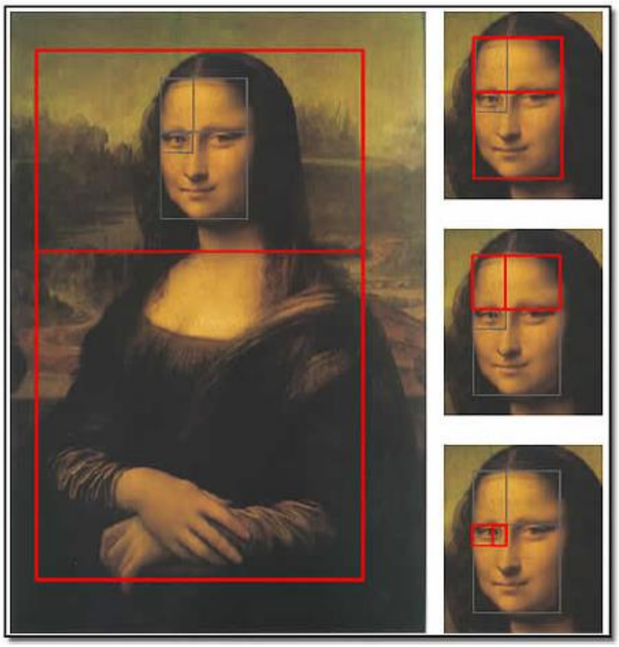
$phi = \frac{1}{-1+\sqrt{5}/_2}$ ≈ 1,61803398875..., que é o número phi, denominado número de ouro.

Convém observar que, sendo irracional, o número de ouro é um número decimal infinito e não periódico. Assim, qualquer representação finita de phi é uma aproximação e não o valor do número de ouro.

5. O retângulo áureo e sua aplicações

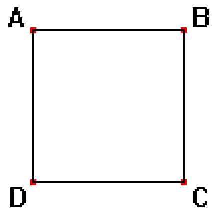
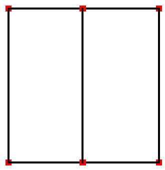
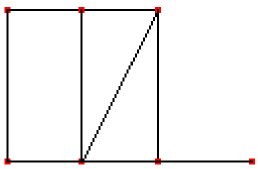
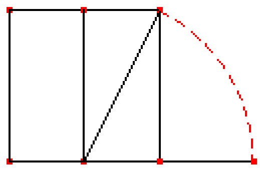
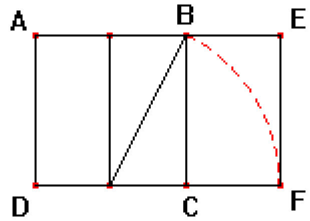
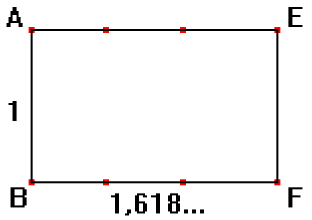
O retângulo áureo é uma figura esteticamente agradável aos olhos. Ele apresenta os seus lados na razão áurea, isto e: a/b = 1,618... O Partenon Grego, construído por volta de 447 e 433 a.C, templo representativo de Péricles contém a razão de Ouro no retângulo que contém a fachada e que Phídias foi o escultor e o arquiteto encarregado da construção deste templo. Muitos pintores do Renascimento também fizeram uso desse retângulo em suas obras e trabalhos. Citando alguns exemplos temos: O Sacramento da Última Ceia, de Salvador Dalí, onde as dimensões do quadro são aproximadamente 270 cm x 167 cm, que estão numa razão áurea entre si. Também temos a obra de Mona Lisa (La Gioconda), feita em 1505, como o quadro A anunciação, feito em 1472 ambos do pintor Leonardo da Vinci onde podem ser observados os retângulos áureos. Uma obra arquitetônica importante é a Catedral de Notre Dame de Chartres, na França, considerada a rainha das catedrais góticas, a Fonte em pedra e luz de toda uma Fé.

Figura 3: Os retângulos áureos no quadro de Mona Lisa.



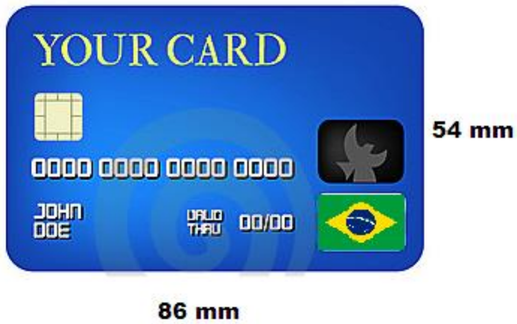
Fonte: https://goo.gl/NjFnn1, 2018.

Observe como podemos construir um retângulo áureo:

Inicialmente vamos construir um quadrado cuja medida do lado seja uma unidade de comprimento;	
Unindo o ponto médio do lado AB com o ponto médio do lado DC, obtemos dois retângulos congruentes.	
Prolongamos o lado DC do quadrado e traçamos uma das diagonais do segundo retângulo, conforme o modelo ao lado.	
Com a ponta seca do compasso no vértice inferior esquerdo do segundo retângulo, abertura igual a medida da diagonal, traçamos um arco do vértice direito superior do retângulo ao prolongamento do lado DC do quadrado.	
Partindo do ponto de interseção do arco com o segmento da base, traçamos o segmento EF paralelo ao lado AD. Prolongamos o lado AB do quadrado até encontrar o segmento EF para formar o retângulo;	
O retângulo AEFB aqui construído apresenta a razão entre suas dimensões igual a 1,618..., por isso e chamado retângulo áureo.	

Sendo tão agradável aos olhos o retângulo áureo é utilizado até hoje em diversas áreas, aqui demostraremos a razão áurea nas medidas de cartões de crédito, carteiras de habilitação, capas de livros.

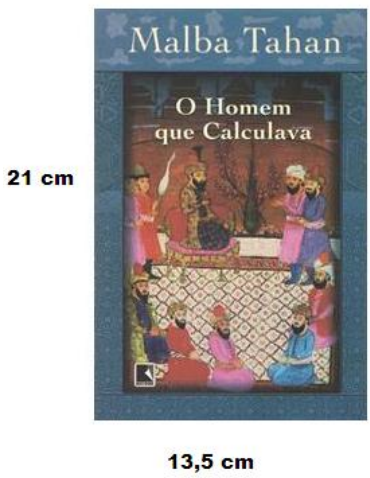
Figura 3: medidas cartão de crédito.



Fonte: Elaborado pela autora.

Podemos observar que a razão entre as medidas do cartão de crédito 86/54 = 1,592..., se aproximam do número de ouro (1,618...).

Figura 4: Medidas capa de livro.



Fonte: Elaborada pela autora.

A medida da capa do livro também se aproxima da razão áurea, 21/13,5 = 1,555...

6. Algumas considerações sobre a contribuição de Fibonacci.

Livio[5] (2011) destaca a importância de Fibonacci na difusão da razão Áurea.

"O papel de Fibonacci na história da Razão Áurea é realmente fascinante. Por um lado, nos problemas em que usava conscientemente a Razão Áurea, foi responsável por um progresso significativo, mas não espetacular. Por outro, simplesmente formulando um problema que, em princípio, nada tinha a ver com a Razão Áurea, ele expandiu drasticamente o escopo da Razão Áurea e de suas aplicações." (Livio, 2011, p.115)

Por vários séculos muitos matemáticos se debruçaram no estudo da Razão Áurea, mas foi o célebre astrônomo das três leis planetárias Johannes Kepler que notou em 1611, que a divisão entre um número de Fibonacci e sua antecedente leva ao número φ quando se avança para valores cada vez maiores na sequência. Em termos matemáticos, isto quer dizer que F_n/F_{n-1} tende para φ quando n tende para o infinito.

A tabela a seguir ilustra bem a situação descrita. Cada número da 2º coluna da tabela 2 representa um número de Fibonacci. Dividindo-se um número de Fibonacci por seu antecessor podemos verificar que o resultado se aproxima cada vez mais do número de ouro.

Tabela 2: Divisão de um número de Fibonacci por seu antecessor e a obtenção de um número cada vez mais próximo de do número de ouro.

N	F_n	F_n/F_{n-1}
1	1	
2	1	1/1 = 1
3	2	2/1 = 2
4	3	3/2 = 1,5
5	5	5/3 = 1,66667
6	8	8/5 = 1,6
7	13	13/8 = 1,625
8	21	21/13 = 1,61538
9	34	34/21 = 1,61905

10	55	55/34 = 1,61765
11	89	89/55 = 1,61818
12	144	144/89 = 1,61798
13	233	233/144 = 1,61806

Fonte: Elaborada pela Autora.

O resultado apresentado, na verdade é válido para todas as sequências de Fibonacci, como bem elucida Huntley[4] (1985, p.55). O φ, em conformidade com sua característica de aparecer inesperadamente em locais estranhos está relacionado com qualquer sequência de formação de acordo com a lei, segundo a qual, cada termo é a soma de dois termos anteriores, quaisquer que sejam os dois primeiros termos $u_n = u_n + u_{n-1}$. A razão de termos sucessivos, u_{n+1}/u_n, aproxima-se cada vez mais de φ, à medida que n aumenta.

Seu valor foi a muito identificada como equivalente a 1,618..., convém observar que, sendo irracional, o número Phi, ou número de ouro é um número decimal infinito e não periódico. Assim, qualquer representação finita de Phi é uma aproximação e não o valor do número de ouro.

7. Considerações Finais

Este trabalho teve a intenção de propor o estudo de um dos números mais intrigantes da matemática: o número de ouro. No decorrer dessa pesquisa, fizemos uma abordagem histórica sobre a vida de Fibonacci, a sequência numérica descoberta por ele, a razão áurea, o retângulo áureo e suas aplicações em objetos históricos e do nosso dia a dia.

Sabemos da sua importância no passado, como na arte, na arquitetura, pintura e também a sua importância no presente, na estética, no formato de cartões de crédito, carteiras de habilitação e capas de livros. Tudo isso nos faz perceber a importância desta razão ao logo da história e o motivo pelo qual chamamos de número de ouro.

Com os exemplos apresentados neste trabalho, esperamos ter contribuído para mostrar aos alunos e professores que a Matemática e, especificamente, a proporção áurea possuem várias aplicações nas diversas áreas do conhecimento.

Referências

[1] BOYER, C. B. História da Matemática. São Paulo: Editora Edgar Blucher Ltda,1974.
[2] CLUBES DE MATEMÁTICA DA OBMEP, Atividade: A razão áurea. Disponível em < http://clubes.obmep.org.br/blog/atividade-a-razao-aurea/> Acesso em: 15 de setembro de 2018.
[3] EBIOGRAFIA. Leonardo Fibonacci. Disponível em https://www.ebiografia.com/leonardo_fibonacci/ Acesso em 19 de setembro de 2018.
[4] HUMTLEY, H. E. A divina proporção – Um ensaio sobre a beleza matemática. Brasília: Editora UNB, 1985.
[5] LIVIO, M. Razão Áurea: a história de fi, um número surpreendente, 6° edição, Rio de Janeiro: Editora Record, 2011.
[6] MATHEMATIKOS. Retângulo Áureo. Disponível em < http://mathematikos.mat.ufrgs.br/im/mat01038051/projetos/artmat/retan_aureo.htm> Acesso em: 23 de setembro de 2018.
[7] O NÚMERO DE OURO. Disponível em < http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/ouro.htm> Acesso em: 11 de setembro de 2018.
[8] WIKIPEDIA. Retângulo de ouro. Disponível em < https://pt.wikipedia.org/wiki/Ret%C3%A2ngulo_de_ouro#cite_ref-Jota_1-0> Acesso em: 01 de outubro de 2018.

.