

“DESVENDANDO A ARTE DE ESCHER POR MEIO DAS ISOMETRIAS”

Guilherme Henrique Custódio Rosa¹
Marcos Henrique Rodrigues Bianchini²
Giane Cristina dos Santos³
Lucas Marques Oliveira⁴
Dra. Lucinda Maria de Fátima Rodrigues Coelho⁵

RESUMO

Este trabalho vincula-se ao Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência, PIBID/CAPES-UNI-FACEF 2021 que, novamente em uma abordagem interdisciplinar, envolve os cursos de licenciaturas em Letras e Matemática do Centro Universitário Municipal de Franca- UNI-FACEF a fim de conciliar a leitura e a interpretação de textos literários à linguagem matemática. O PIBID/CAPES-UNI-FACEF está sendo desenvolvido junto ao Ensino Médio das Escolas Estaduais José Pinheiro de Lacerda e E.E. João Marciano de Almeida da cidade de Franca-SP. O objetivo deste artigo é relatar e apresentar as atividades desenvolvidas na oficina “Desvendando a arte de Escher por meio das Isometrias”, aplicada aos alunos do Ensino Médio das Escolas acima mencionadas vinculadas ao programa de iniciação à docência e por meio de recursos on-line, essas atividades também foram socializadas aos professores de Matemática da Diretoria de Ensino da cidade de Franca-SP durante um ATCP. O trabalho aponta a importância da relação entre Arte e Matemática desde as culturas mais antigas até o Renascimento, onde é possível identificar uma relação profunda entre ambas. Geometria deve ser um instrumento para a compreensão, descrição e interação com o espaço em que se vive, de forma a se adquirir uma concepção visual. Isso se torna um fator motivador e quando a Matemática faz conexão com outras áreas, como a Artes por exemplo. Essa atividade prioriza o estudo das isometrias, suas principais características e propriedades, para que se possa dessa forma, relacionar com obras de Mauritz Cournelis Escher (1898-1972), artista plástico que ao explorar e executar devidas transformações geométricas constrói obras intrigantes. Escher gostava do exercício que o cérebro faz para entender as imagens produzidas por ele, suas obras são famosas ao redor do mundo, conhecidas por causarem a confusão inicial aos olhos e fazerem o público estar atento a ilusão de sua arte. Escher também brincava com a arquitetura, em que representava construções impossíveis de existirem, misturando imagens de duas e três dimensões Segundo Fainguelernt e Nunes (2006), o que chama atenção em alguns de seus quadros, é a técnica desenvolvida pelo artista para trabalhar com simetrias, por meio de transformação isométrica. A técnica que utiliza é conhecida como tesselação, que consiste no preenchimento de uma superfície por imagens que se completam, sem se sobrepor e que formam uma espécie de mosaico. A simetria é a preservação da forma e configuração através de um ponto, uma reta ou um plano. Com a simetria se obtém uma forma de outra preservando suas características tais como ângulos, comprimento dos lados, distância, tipos e tamanhos. As técnicas usadas para esse processo são chamadas de transformações isométricas e cada uma produz um diferente tipo de simetria. São quatro

¹ Graduando do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro Universitário Municipal de Franca – Uni-FACEF, Guilhermehenriquecustodiorosa@hotmail.com;

² Graduando do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro Universitário Municipal de Franca – Uni-FACEF, Marcoshrb13@gmail.com;

³ Graduando do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro Universitário Municipal de Franca – Uni-FACEF;

⁴ Graduando do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro Universitário Municipal de Franca – Uni-FACEF;

⁵ Orientador - Doutora, professora do departamento de matemática - Centro Universitário Municipal de Franca - Uni-FACEF, Lucindarcoelho@gmail.com.

as transformações isométricas: translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante. A translação é o movimento da imagem, necessitando dos aspectos de magnitude (utilizando uma unidade de comprimento) e direção (medida em graus). O deslocamento pode ser feito tanto na horizontal, como na vertical ou transversal. A rotação é o “giro” feito em redor de um ponto, chamado de centro de rotação, a medida do giro é chamada de ângulo de rotação. A reflexão é nada menos do que refletir a imagem, vertical ou horizontalmente, sendo possível traçar uma linha ao meio, chamada eixo e comparar os lados que se espelham. A reflexão deslizante é a junção da translação com a reflexão, no qual a imagem realiza os dois movimentos, dependendo da magnitude, direção e eixo. O entendimento das propriedades dessas transformações geométricas é muito importante como subsídio ao estudo das funções matemáticas, notadamente na sua representação por meio de gráficos cartesianos. **Materiais:** Para a realização da técnica utilizou-se: papel cartão, cartolina, folha de sulfite branca, régua, lápis preto, borracha, tesoura, fita adesiva e lápis de colorir. A cartolina foi utilizada para fazer a tesselação. **Objetivo:** desenvolver nos alunos o sentido espacial, enfatizar a visualização e a compreensão de relações espaciais, distinguir as transformações de figuras congruentes que se relacionam por meio de reflexões, rotações, translações ou reflexões deslizantes. Para entender Escher, a atividade proposta aos estudantes foi embasada na observação das transformações isométricas que ocorrem nos trabalhos de sua última fase e desenvolver atividades que desvendem e repliquem as respectivas transformações. Para isso: mostrou-se as obras de Escher destacando a tesselação. Relatou-se sua biografia; definiu-se simetria e suas transformações isométricas (rotação, translação, reflexão e reflexão deslizante); desenhou-se figuras sobre polígonos passíveis de ladrilhamento (quadrados, triângulos) com que se possam realizar tesselação e finalmente realizou-se a tesselação ou ladrilhamento. Dessa forma foi possível estabelecer uma analogia entre a pavimentação do plano e mostrar como Escher em suas obras utilizava esse conceito de maneira simples e, no entanto, instigador. Desvendar tais transformações, a partir dos conceitos de isometria e tesselação, e reproduzi-las foram alguns dos objetivos dessa oficina. Geometria deve ser um instrumento para a compreensão, descrição e interação com o espaço em que se vive, e recomenda-se que adquira uma concepção visual, e que a Matemática faça conexões com outras áreas, como a de Artes por exemplo (BIGODE, 2008, p.1 Como referencial teórico-metodológico para os conceitos matemáticos destacou-se D’Ambrósio (1993); D’Ambrósio (1997); Lima (1996), além de Ernst (1978) e TJABBES (2011) para um estudo da vida e obra de Escher.

Palavras-chave: Tempo, Espaço, Isometria, Tesselação, Escher.

INTRODUÇÃO

Essa atividade é um relato de experiência sobre uma oficina aplicada a alunos do Ensino Médio e a professores de Matemática da rede de Ensino Estadual na qual se prioriza o estudo das isometrias, suas principais características e propriedades, para que se possa dessa forma, relacionar com obras de Mauritz Cournelis Escher (1898-1972), artista plástico que ao explorar e executar devidas transformações geométricas realiza obras intrigantes.

Segundo o PCN de Matemática: Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma

organizada, o mundo em que vive. Geometria deve ser um vetor para a compreensão, descrição e interação com o espaço em que se vive, de forma a se adquirir uma percepção visual e quando a Matemática faz conexão com outras áreas, isso pode se tornar um fator motivador. (BRASIL, 1997, p.39)

Pode-se destacar a importância da relação entre Arte e Matemática desde as culturas mais antigas até o Renascimento, onde é possível identificar uma relação profunda entre ambas.

Para entender Escher, a atividade proposta foi embasada na observação das transformações isométricas que ocorrem nos trabalhos de sua última fase e desenvolver atividades que desvendem e repliquem as respectivas transformações.

O ensino de Geometria proporciona a exploração do espaço físico além de desenvolver a observação e a percepção de semelhanças, diferenças e regularidades.

Pode-se estabelecer sua conexão com outras áreas da Matemática e com outros campos do conhecimento, especialmente com a arte, por meio da exploração das formas e características de objetos, obras artísticas, pinturas, desenhos, mapas, formas encontradas na natureza, entre outras criações humanas ou naturais.

As técnicas usadas para esse processo são chamadas de transformações isométricas e cada uma produz um diferente tipo de simetria.

Pode-se definir uma *transformação geométrica em um plano como uma correspondência um a um* entre pontos do plano. Assim, por meio de uma transformação, os pontos de uma figura têm correspondentes nos pontos de outra figura que é a sua imagem pela transformação.

As *transformações isométricas* não alteram as distâncias entre os pontos relacionam figuras congruentes.

Como *essas transformações não distorcem imagens*, são também designadas como *movimentos rígidos* no plano. As transformações isométricas de um plano são *translação, reflexão e rotação, assim como todas as combinações entre elas*.

Simetria: é a **preservação da forma** e configuração por meio de **um ponto, uma reta ou um plano**. Com a simetria se obtém uma forma de outra **preservando suas características** tais como **ângulos, comprimento dos lados, distância**, tipos e tamanhos.

As técnicas usadas para esse processo são chamadas de **transformações isométricas** e cada uma produz um diferente tipo de simetria. As transformações isométricas incluem: **translação - reflexão - rotação - reflexão deslizante**

- **Translação:** é o termo usado para "mover" formas, sendo necessárias duas especificações: a **direção** (que pode ser medida em graus) e a **magnitude** (que pode ser medida em alguma unidade de comprimento).
- **Rotação:** é o "giro" de uma forma ao redor de um ponto chamado **centro de rotação**. A distância ao centro de rotação se mantém constante e a medida do giro é chamada **ângulo de rotação**.
- **Reflexão:** ocorre através de uma reta chamada **eixo**. O ponto original e seu correspondente na reflexão tem a mesma distância em relação ao eixo.

Exemplo: uma forma refletida no espelho.

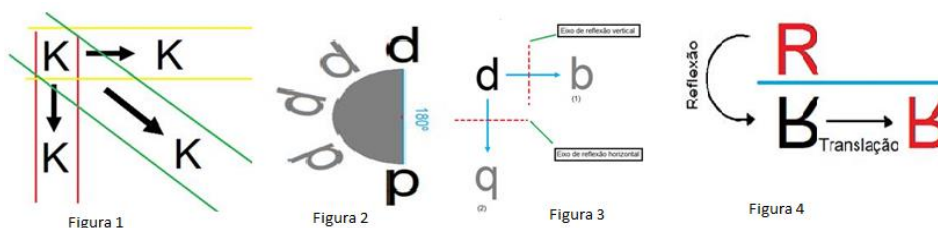
- **Reflexão deslizante:** Resulta da translação e reflexão onde os mesmos elementos são necessários: **eixo, direção e magnitude**.

Figura 1: Isometria de Translação é a transformação em que todos os pontos de uma figura se deslocam numa **mesma direção, sentido e de uma mesma distância**

Figura 2: *Isometria de Rotação* é o giro da figura em torno de algum ponto e de um determinado ângulo

Figura 3: Isometria de reflexão *em relação a uma reta r*, denominada de eixo de simetria, é a transformação que a cada ponto P associa o seu simétrico P' em relação à reta r.

Figura 4: Isometria de reflexão deslizante



Fonte: OLIVEIRA e outros, 2018

Na matemática, o uso dessas transformações isométricas no plano pode ser instrumento valioso como auxílio para a construção dos gráficos das funções.

Conhecendo um conjunto de gráficos fundamentais (ou “gráficos básicos”) e ao aplicar determinado conhecimento sobre esses movimentos rígidos no plano, pode-se obter diversos outros gráficos decorrentes desses fundamentais.

Por exemplo:

- **A reflexão vertical, isto é, eixo das ordenadas como eixo de simetria** ocorre quando na equação que define uma função, substituímos x por $-x$, ou seja, existe uma reflexão vertical entre os gráficos de $f(x)$ e $f(-x)$. Note que apenas a variável independente é multiplicada por -1 ;
- **Reflexão horizontal, isto é, eixo das abscissas como eixo de simetria** ocorre quando multiplicamos toda a equação que define uma função por -1 , ou seja, existe uma reflexão horizontal entre os gráficos de $f(x)$ e $-f(x)$;
- **Dupla reflexão ou simetria em relação ao ponto de origem** esse caso ocorrerá quando tanto a variável independente (x), quanto a função $f(x)$ tiverem seus valores multiplicados por -1 , ou seja, existirá simetria em relação à origem entre os gráficos de $f(x)$ e $-f(-x)$;
- **Translação horizontal** este tipo de transformação ocorrerá quando na função original houver uma substituição da variável x por $(x \pm k)$. Se k é real e $k > 0$, a função sofrerá um deslocamento horizontal, mantendo seu aspecto gráfico. O deslocamento será de k unidades para a direita se a substituição for por $(x - k)$ e será para a esquerda se a substituição for por $(x + k)$;
- **Translação Vertical** este tipo de transformação ocorrerá quando substituirmos a função $f(x)$ por $f(x) \pm k$. Considerando que k seja um número real positivo, teremos uma translação vertical “para cima” no sentido do eixo das ordenadas no caso de $f(x) + k$ e a translação ocorrerá “para baixo” nos casos de $f(x) - k$;

É claro que existem muitas outras transformações que nos permitem a obtenção de gráficos de funções, a partir de outros gráficos considerados básicos. No presente estudo focamos apenas em alguns casos, relacionados a transformações isométricas.

O entendimento das propriedades dessas transformações geométricas pode ser muito importante como auxílio ao estudo das funções matemáticas, notadamente na sua representação por meio de gráficos cartesianos.

Interessante ainda observar que as transformações isométricas influenciaram também diversos artistas plásticos, arquitetos, decoradores e outros.

Um dos maiores e mais importante exemplo dessas aplicações artísticas é o holandês Mauritz Cournelis Escher (1898-1972), que por meio da combinação de **simetrias, reflexões e rotações**, além do uso de perspectivas, usou conhecimento matemático em sua arte conseguindo assim atrair as pessoas por meio de ilusões que criava num mundo de formas incríveis.

A técnica utilizada por Escher é conhecida como “tesselação”.

Tesselação: tem origem no termo “**tessellation**”, do inglês, e representa um conjunto de imagens que cobre uma determinada superfície sem se sobrepor ou deixar espaço, formando uma espécie de mosaico ou padrão.

OBS: É importante não confundir com a palavra “Tecelação”, com “C”, que apesar da mesma fonética tem um significado completamente diferente

METODOLOGIA

Este trabalho vincula-se PIBID/CAPES-Uni-FACEF 2021 com os cursos de licenciaturas em Letras e Matemática do Centro Universitário Municipal de Franca e ao Ensino Médio das Escolas Estaduais José Pinheiro de Lacerda e E.E. João Marciano de Almeida, Franca-SP. para relatar e apresentar as atividades desenvolvidas na oficina “Desvendando a arte de Mauritz Cournelis Escher por meio das Isometrias”, aplicada aos alunos escolas acima mencionadas e aos professores de Matemática da Diretoria de Ensino-Franca-SP durante um ATP, por meio de recursos on-line.

Justificativa: o entendimento das propriedades dessas transformações geométricas é muito importante como subsídio ao estudo das funções matemáticas, notadamente na sua representação por meio de gráficos cartesianos.

Materiais: Para a realização da técnica utilizou-se: papel cartão, cartolina, folha de sulfite branca, régua, lápis preto, borracha, tesoura, fita adesiva e lápis de colorir. A cartolina foi utilizada para fazer a tesselação.

Objetivo: desenvolver nos alunos o sentido espacial, enfatizar a visualização e a compreensão de relações espaciais, distinguir as transformações de figuras congruentes que se relacionam por meio de reflexões, rotações, translações ou reflexões deslizantes.

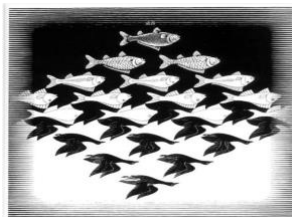
Para entender Escher, a atividade proposta aos estudantes e professores foi embasada na observação das transformações isométricas que ocorrem nos trabalhos de sua última fase e desenvolver atividades que desvendem e repliquem as respectivas transformações. Para isso:

- Primeiramente contextualizou-se os tipos de pavimentações encontradas na natureza e produzidas pelo homem por meio de algumas perguntas, por exemplo, quais exemplos de pavimentação são observados no cotidiano de cada um? Que tipo de forma é utilizada nesta pavimentação específica? O que você entende por pavimentação?
- (Obs. Pavimentação do plano: não podem haver lacunas nem sobreposições entre os polígonos)
- Primeiro problema proposto aos participantes: qual (is) o (s) polígono (s) convexo (s) regular (es) pode (m) ser usado (s) isoladamente como padrão de uma pavimentação? (Triângulo equilátero, quadrado e hexágono);
- Debate sobre as percepções obtidas até o momento do porquê somente três polígonos regulares propiciam o revestimento de um plano;
- Mostrou-se as obras de Escher, sua biografia, destacando a tesselação;
- Segundo problema: Se apenas o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular podem ser usados isoladamente como padrão de pavimentação, como Escher produzia suas imagens se as mesmas não aparentam usar qualquer um destes polígonos?
- Após estes questionamentos foi introduzida a ideia de isometrias no plano, isso é, transformações no plano que preservam distâncias. As isometrias consideradas nas obras de Escher são translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante;
- Definiu-se simetria e suas transformações isométricas (rotação, translação, reflexão e reflexão deslizante);
- Desenhou-se figuras sobre polígonos passíveis de ladrilhamento (quadrados, triângulos) com que se possam realizar tesselação;
- Finalmente realizou-se a tesselação ou ladrilhamento;

Dessa forma foi possível estabelecer uma analogia entre a pavimentação do plano e mostrar como Escher em suas obras utilizava esse conceito de maneira simples e, no entanto, instigador. Desvendar tais transformações, a partir dos conceitos de isometria e tesselação, e reproduzi-las foram alguns dos objetivos dessa oficina.

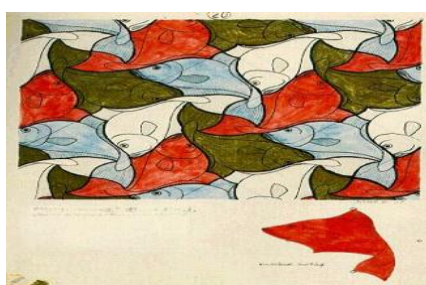
Exemplos de obras desse importante artista plástico:

Figura 5-Escher-Céu-e-agua



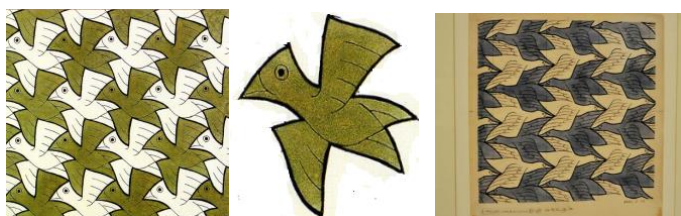
<http://www.artenarede.com/wp-content/uploads/2014/08/Escher-Ceu-e-agua-1.jpg>

Figura 6-Escher, M.C. Fish (Nº20). 1938. Desenho com lápis, tinta e aquarela Coleção particular, Suíça.



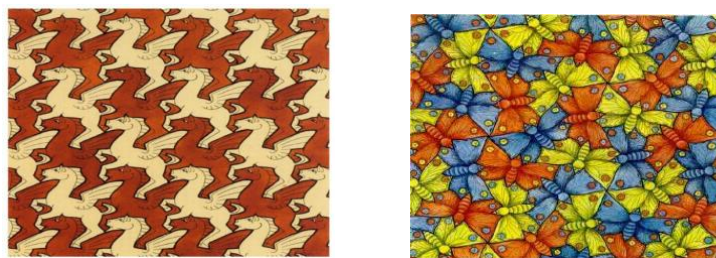
https://2.bp.blogspot.com/-M213YjQZdoI/T-INTjmq_I/AAAAAAAAAHTc/HEOZVps7e7w/s1600/Regular-division-20.jpg

Figura 7 - 8



<https://cultura.culturamix.com/blog/wp-content/gallery/obras-de-escher-3/Obras-de-Escher-5.jpg>

Figura 9 M.C. Escher Pegasus (No. 105) 1959 e Borboletas



<https://uploads1.wikiart.org/images/m-c-escher/pegasus-no-105-1959.jpg!Large.jpg>

Técnicas de Escher

Primeiramente será utilizada a técnica da rotação a partir de um triângulo equilátero.

Crie uma curva no vértice superior do triângulo equilátero conforme Figura 10 e terminando no vértice inferior à esquerda, podendo entrar ou sair do triângulo.

Figura 10



Em seguida faça uma rotação desta curva com sentido anti-horário de 60° em torno do vértice superior conforme Figura 11

Figura 11



Faça agora **outra curva** desta vez na aresta da base do triângulo até o **ponto médio** como na figura 12.

Figura 12



Faça uma rotação desta nova curva de 180° em torno do ponto médio da aresta da base figura 13

Figura 13

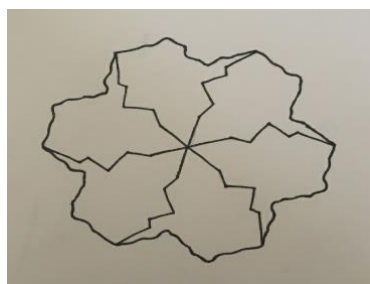


A figura formada é auto encaixável, ou seja, se encaixa nela mesma formando um mosaico sem que haja superposição de figuras ou parte delas. Ela será usada como base para construção do mosaico, figura 14. Observe que a área da figura é encontrada é igual a área do triângulo original pois as figuras que “saem” do Triângulo são congruentes as que “entram” e uma compensa a outra.

Para conseguir a expansão desta figura e consequentemente o ladrilhamento com fechamento da superfície basta que a nova figura seja girada em 60° . Com um total de cinco rotações, seis

Figuras auto encaixáveis aparecerão figura 14

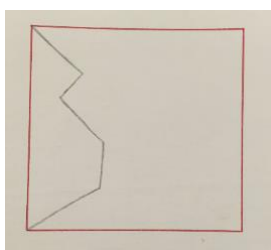
Figura 14



Construção por Translação

Será utilizada agora a Translação para construção de uma figura abstrata auto encaixável. Crie uma curva começando pelo vértice superior esquerdo figura 15 e terminando no vértice inferior esquerdo, podendo entrar ou sair dele.

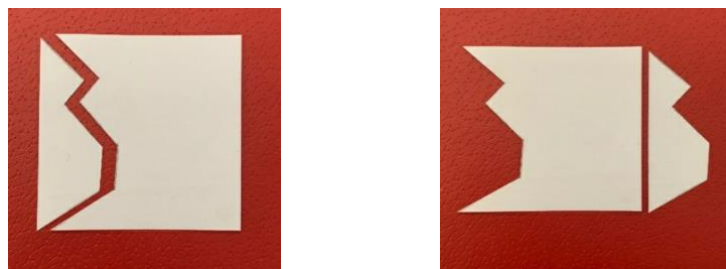
Figura 15



Em seguida translade esta curva para o lado oposto do quadrado ocupando os vértices superior

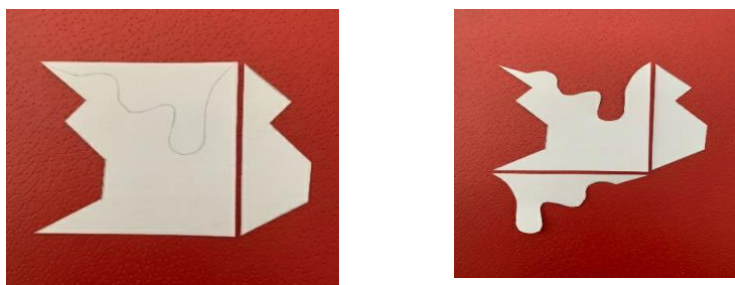
Direito e inferior direito figura 16.

Figura 16



Faça agora outra curva na aresta superior, recorte-a e a translada para a da base do Quadrado, figura 17

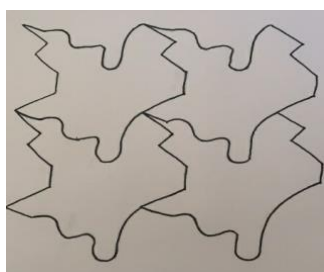
Figura 17



A nova figura formada é auto encaixável e será usada como base para construção do mosaico. Observe que a área da figura é encontrada é igual a área do Quadrado original pois as figuras que “saem” do Quadrado são congruentes as que “entram” e uma compensa a outra.

Para conseguir o ladrilhamento com fechamento da superfície, basta que a figura seja transladada horizontalmente e verticalmente, conforme figura 18

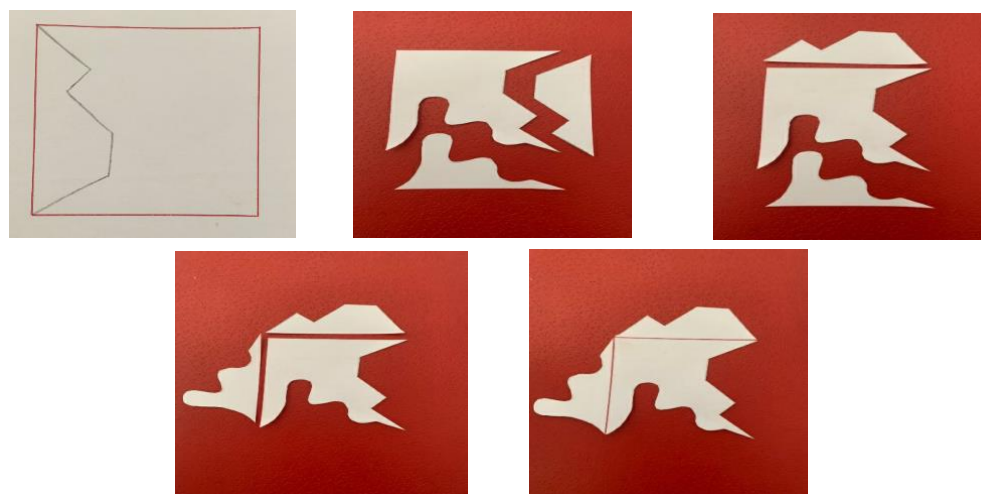
Figura 18



Construção por Translação

Será utilizada agora a Rotação para construção de uma figura abstrata auto encaixável. Crie uma curva começando pelo vértice superior esquerdo figura 19 e terminando no vértice inferior esquerdo, podendo entrar ou sair dele.

Figura 19



Segundo LORENZATO, 1995, p.5, geometria está por toda parte, desde antes de Cristo, mas é preciso conseguir enxergá-la mesmo não querendo, lidamos em nosso cotidiano com as ideias de paralelismo, perpendicularismo, congruência, semelhança, proporcionalidade, medição (comprimento, área, volume), simetria: seja pelo visual (formas), seja pelo uso no lazer, na profissão, na comunidade oral, cotidianamente estamos envolvidos com a Geometria.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Esse trabalho teve por intuito:

- Apontar a relação do homem com a simetria ao longo da história e apresentar uma forma dinâmica para estudar esse conceito por meio das obras de Escher, que brilhantemente construía tesselações com figuras congruentes relacionadas entre si por meio de reflexões, rotações, translações ou reflexões deslizantes;

- Destacar que o uso dessas transformações isométricas no plano pode ser instrumento valioso como auxílio para a construção dos gráficos das funções matemáticas.

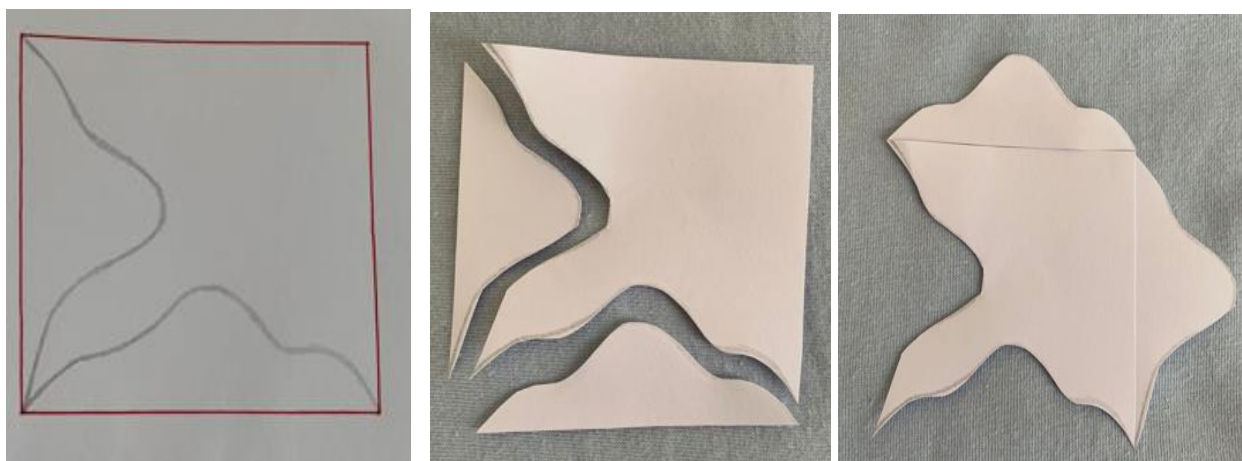
As dúvidas foram sendo dirimidas ao longo da prática e os conceitos equivocados sendo esclarecidos, mas sempre estimulando a autonomia dos alunos por meio de questionamentos, evitando dar respostas prontas para suas dúvidas.



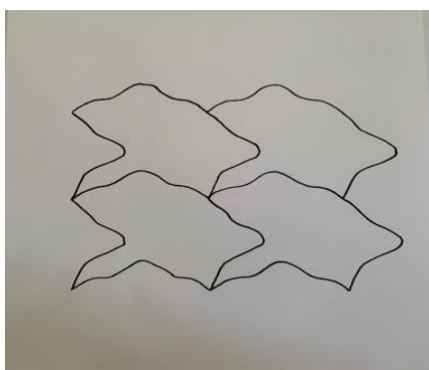
Após a tesselação completa, surgiram trabalhos interessantes, uma vez que tanto os professores quanto os alunos tiveram a liberdade de criar os desenhos de acordo com suas características, mas levando em conta as transformações isométricas.

Um dos trabalhos foi esse:

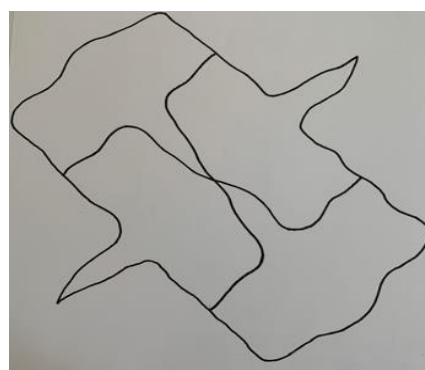
A partir de um quadrado, usando a isometria de translação



Pode-se obter essa tesselação:



Ou essa, com uma rotação de 90° :



CONSIDERAÇÕES FINAIS

- A geometria permite uma leitura de mundo, por meio de relações que podem ser construídas entre o espaço e o indivíduo
- Esta área do conhecimento é de grande valor para a formação do indivíduo por ela estar presente nas mais variadas situações da vida cotidiana, como na natureza, nos objetos que em utilizamos, nas construções e nas artes.
- Nosso interesse esteve voltado para as **simetrias no ensino de Geometria**: no estudo do espaço físico e dos entes geométricos para desenvolver habilidades de percepção e criação.
- O entendimento das propriedades dessas transformações geométricas pode ser muito importante como auxílio ao estudo das funções matemáticas, notadamente na sua representação por meio de gráficos cartesianos
- Aliar Matemática e Arte para ensinar Geometria, “ talvez” direcione novas visões da disciplina, deixando as aulas mais ousadas, mais criativas mais intrigantes!

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Brasília: MEC; SEM,1997.

D'AMBRÓSIO, U. Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer. Brasil: Ática, 1993.

D'AMBRÓSIO, U..Transdisciplinaridade. Brasil: Palas Athena. 1997. .

ERNST, B. *O espelho mágico de M. C. Escher*. Berlim: Taschen, 1991

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar geometria? Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo, n.4, p.3-12, jan. /jun.1995.

OLIVEIRA, Lucas Borges; RIBEIRO, Aleff Jouri; COELHO, Lucinda Maria de Fátima. *Matemática e artes: Uma aplicação da técnica de Escher no ensino da simetria*. Trabalho de Conclusão de Curso- Uni-FACEF, Franca, 2018.

TJABBES, P. *O mundo mágico de Escher*. São Paulo: Art Unlimited, 2011