CONGRUÊNCIA MODULAR: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO[1]

Guilherme Ramon Gomes Pires Arantes[2]
Thiago Porto de Almeida Freitas[3]

RESUMO

A congruência modular, ferramenta da Teoria dos Números, permite estabelecer propriedades com os restos da divisão entre números inteiros. Sua aplicabilidade pode ser verificada por meio da criptografia, em calendários e até mesmo em sistemas de identificação, como no Cadastro de Pessoa Física (CPF). O objetivo deste trabalho é apresentar uma sequência didática (SD), elaborada no âmbito de um projeto de pesquisa do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, que visa desenvolver habilidades da Base Nacional Comum Curricular por estudantes do Ensino Médio a partir de aplicações da congruência modular. Apresentamos os conceitos clássicos da teoria de congruência modular e algumas de suas propriedades. Ademais, ilustramos alguns cenários de aplicações no cotidiano: o sistema de identificação de números do CPF, código de barras e na criptografia. A metodologia desta etapa do projeto de pesquisa, fundamenta-se na pesquisa bibliográfica que culminou na elaboração de uma sequência didática. Pretende-se aplicar a SD em uma escola da Educação Básica de Ensino Médio, no munícipio de Paracatu onde procurar-se-á refletir sobre os procedimentos empregados em cada questão, bem como suas inter-relações com as habilidades e competências exigidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Palavras-chave: Congruência Modular. Sequência Didática. Ensino Médio. Base Nacional Comum Curricular. Matemática.

INTRODUÇÃO

O primeiro documento de Registro Geral (RG) expedido em nosso território data de 1907, foi elaborado por Edgard Costa que, na época, ocupava o cargo de presidente do gabinete de identificação da Polícia do Distrito Federal. Há três avanços fundamentais na história do RG, o documento datilografado, informatizado e atualmente digitalizado.

Após os avanços do registro geral, em 30 de dezembro de 1968, por meio de Decreto-lei nº 401 fica instituído o Cadastro de Pessoa Física (CPF). Atualmente os habitantes de nosso país podem ser distinguidos por uma sequência de códigos numéricos e/ou alfanuméricos, possibilitando uma diversidade de combinações de códigos. Destacam-se mais usualmente o

---

[1] Artigo elaborado a partir de pesquisa de dissertação do Curso de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Catalão – UFCAT.

[2] Mestrando do Curso de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Catalão – UFCAT, Bolsista CAPES, guilherme.arantes@discente.ufcat.edu.br .

[3] Doutorado, Instituto de Matemática e Tecnologia (IMTec) - UFCAT, thiagoporto@ufcat.edu.br .

Cadastro de Pessoa Física (CPF), o Registro Geral (RG) e a Carteira Nacional de Habilitação (CNH).

O Cadastro de Pessoa Físicas (CPF) consiste num banco de dados gerenciado pela Receita Federal Brasileira (RFB), no qual brasileiros(as) natos(as) e/ou estrangeiros cadastram-se com intuito de obter uma identificação única e intransferível. Através deste cadastro está contida informações pessoais e histórico dos cidadãos, além disso este é o mecanismo principal de controle fiscal referente ao imposto de renda das pessoas físicas.

A Matemática está inserida nos diferentes contextos, a partir do exposto anterior sua presença pode ser evidenciada nos sistemas de identificação de números, como no CPF. É através da matemática, mais especificamente da Aritmética que é possível obter sequências de onze dígitos válidas para um CPF.

"O termo aritmética vem do grego e suas raízes são as seguintes: *arithmos*, que significa número, e *technes*, que se traduz por ciência" (DOMINGUES, 1991, p. 9). Tal conceito está relacionado com a necessidade do homem em contar e consequentemente em calcular. No Brasil, segundo o Conselho Nacional de Desenvolvimento Cientifico e Tecnológico (CNPQ), a Matemática está dividida em: Álgebra, Análise, Geometria e Topologia e Matemática Aplicada. Vale ressaltar que dentro da área de concentração da Álgebra encontra-se inserida a subárea da Teoria dos Números (também conhecida por Aritmética).

A congruência modular pode ser definida como a aritmética realizada com os restos da divisão euclidiana por um número fixo. Dado um número natural m, com $m > 1$, diz-se que a e b são congruentes módulo m, se os restos da divisão euclidiana de a e b por m são iguais. Em notação matemática tem-se: $a \equiv b\ mod(m)$.

Os números estão presente nos diferentes contextos em nossa vida, e a Matemática está inserida nos diferentes níveis de ensino da educação escolar. A educação brasileira é marcada pela "[...] falta de recursos financeiros e a conseqüente deterioração dos espaços escolares, índices elevados de desistência, declínio da alfabetização, queda na qualidade do ensino, notas baixas nas "provas padronizadas [...]" (OLIVEIRA, 2007, p. 2).

Nesse cenário pós-pandêmico a escola tem recebido alunos em diferentes níveis educacionais, vários destes tiveram acesso ao ensino remoto e outra grande quantidade mal tiveram acesso a condições básicas de higiene e de sobrevivência. "Houve um aumento ainda maior da desigualdade social na medida em que algumas escolas tiveram Educação online e outras tiveram entregas de atividades e outras nada tiveram" (BORBA; SOUTO; JUNIOR, 2022, p. 26). Com isso, é notório a presença de alunos no Ensino Médio sem conhecimentos básicos de aritmética (somar, subtrair, multiplicar e dividir).

A aritmética é parte obrigatória do currículo educacional do ensino fundamental, conforme salienta a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), ela é caracterizada pelo Algoritmo da Divisão de Euclides, Máximo Divisor Comum (MDC), Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e Critérios de Divisibilidade. No Ensino Médio, embora não haja presença direta da aritmética na BNCC, há claramente a orientação para o desenvolvimento de outras interessantes habilidades, nesse contexto destacam-se: "EM13MAT315: reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma" (BRASIL, 2018, p. 537) e "EM13MAT405: utilizar os conceitos básicos de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática" (BRASIL, 2018, p. 539).

Nesse contexto tem-se como principal objetivo descrever e analisar os impactos de uma proposta de ensino para o desenvolvimento do conhecimento matemático de alunos do Ensino Médio a partir de uma sequência didática que explore aplicações da congruência modular. Além disso, com esta pesquisa pretende-se também: estudar os fundamentos teóricos relacionados à congruência modular, exemplificar à congruência modular por meio de situações do cotidiano tais como: Cadastro de Pessoas Físicas (CPF) e no final propor um modelo de sequência didática para o ensino de Matemática através de algoritmos de identificação e verificação por meio de congruência modular.

METODOLOGIA

Esta proposta de pesquisa baseia-se em uma abordagem do tipo exploratória que, segundo Gil (2008, p. 27), proporciona maior familiaridade com o problema, este tipo de pesquisa pode englobar diferentes técnicas como: levantamento bibliográfico, entrevistas e outros.

O trabalho está segmentado a partir da pesquisa bibliográfica. A pesquisa bibliográfica "[...] é obrigatória nas pesquisas exploratórias, na delimitação do tema de um trabalho ou pesquisa, no desenvolvimento do assunto, nas citações, na apresentação das conclusões" (ANDRADE 2010, p. 25). Nessa perspectiva destacam-se os trabalhos: Hefez (2014), Millies

(2008), e os textos presentes na Revista Professor de Matemática (RPM), Revista Eureka, além de artigos, livros, revistas e jornais científicos da área.

A pesquisa bibliográfica culminou na elaboração de uma Sequência Didática (SD). Para Zabala (1998), uma sequência didática pode ser entendida como

> [...] um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos [...] têm a virtude de manter o caráter unitário e reunir toda a complexidade da prática, ao mesmo tempo em que [...] permitem incluir as três fases de toda intervenção reflexiva: planejamento, aplicação e avaliação (ZABALA, 1998 p.18).

Segundo Barbosa (2002, p. 78), as sequências didáticas ocasionam um ambiente propício de modelagem matemática, tais sequências podem ser observadas como um conjunto de atividades interligadas com objetivo de ensinar um conteúdo em várias etapas.

REFERENCIAL TEÓRICO

Inicialmente a Aritmética foi fundamentada a partir dos *Elementos*, de Euclides (sec. III a.c.). Em seu trabalho, Euclides definia um dispositivo prático para efetuar a divisão de dois números naturais a por b, com resto. Mais adiante tal resultado foi estendido aos números inteiros sendo considerado um dos alicerces da Aritmética sendo empregado até os dias atuais.

Assim, sejam a e b, dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que:

$$a = bq + r, \text{ com } 0 \leq r < |b|.$$

Posteriormente no século XIX, com os trabalhos de Gauss (1777- 1855) a Aritmética sofre um grande avanço. Em 1801, com a publicação do livro *Disquisitiones Arithmeticae* (Investigações Aritméticas) ocorre a sistematização das propriedades dos restos da divisão de números inteiros por meio da ideia de congruência (inteiros distintos, iguais pelo mesmo resto na divisão por outro inteiro). “Várias idéias de grande importância, que serviram como base para o desenvolvimento da teoria de números, aparecem neste trabalho” (SANTOS, 2020, p. 32), entre elas a congruência modular.

A definição de congruência modular surge da seguinte forma, seja m um número natural, diz-se que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m quando os restos das divisões euclidianos de a por m e b por m são iguais. Em notação matemática escreve-se da seguinte forma:

$$a \equiv b \ (mod\ m).$$

Por exemplo, temos que $17 \equiv 8\ (mod\ 3)$, uma vez que os restos da divisão de 17 e de 8 por 3 são iguais a 2.

Caso a relação $a \equiv b\ (mod\ m)$ for falsa, diz-se que a e b são *incongruentes*, ou seja, a e b *não são congruentes* módulo m, deixam restos distintos na divisão por m. Escreve-se, $a \not\equiv b\ (mod\ m)$.

Note que, o resto da divisão de um número inteiro qualquer por 1 é sempre nulo, temos que é sempre válida a relação $a \equiv b\ (mod\ 1)$, para qualquer $a, b \in \mathbb{Z}$. Deste modo, usualmente adota-se $m > 1$.

A partir da definição de congruência modular decorre algumas propriedades imediatas. Fixado um natural m, e a, b e $c \in \mathbb{Z}$ temos:

(1) $a \equiv a\ (mod\ m)$;
(2) se $a \equiv b\ (mod\ m)$, então $b \equiv a\ (mod\ m)$;
(3) se $a \equiv b\ (mod\ m)$ e $b \equiv c\ (mod\ m)$, então $a \equiv c\ (mod\ m)$;
(4) se $a \equiv b\ (mod\ m)$ e $c \equiv d\ (mod\ m)$, então $a + c \equiv b + d\ (mod\ m)$;
(5) se $a \equiv b\ (mod\ m)$ e $c \equiv d\ (mod\ m)$, então $ac \equiv bd\ (mod\ m)$;
(6) se $a \equiv b\ (mod\ m)$, então $a^n \equiv b^n\ (mod\ m)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Note que as três primeiras propriedades expostas anteriormente definem a congruência modular como uma classe de equivalência.

A partir dos trabalhos de Gauss, a Aritmética passou a ser denominada Teoria dos Números. Desde então é tratada como a subárea da Matemática que estuda as propriedades dos números, as estruturas algébricas e essencialmente as operações (adição, subtração, multiplicação e divisão). Sua aplicabilidade engloba desde métodos simples de contagem, cálculo de troco, até sofisticados algoritmos de codificação de mensagens (criptografia) e verificação de dados (como no CPF, RG, e até mesmo no cartão de crédito).

A composição numérica do CPF é formada por um conjunto de onze números, sendo três conjuntos de três números e um par de dígitos verificadores. Veja um exemplo de número de inscrição de CPF:

987.654.321-00.

A sequência de números do CPF não é uma sequência aleatória, ela segue um raciocínio aritmético-matemático de modo que cada sequência de onze dígitos é única, o que o torna confiável e intransferível entre os cidadãos.

Um dispositivo prático para verificação se uma sequência de onze números é um CPF, consiste em:

(I) Escrever um vetor $\vec{u}$ com os onze dígitos do CPF $\vec{u} = (a_1, a_2, \ldots, a_{11})$;

(II) Escrever um vetor $\vec{w}$ com os pesos, tal que, $\vec{w} = (11,10, \ldots, 1)$;

(III) Efetuar o produto escalar de $\vec{u}$ e $\vec{w}$;

(IV) Verificar a congruência $(mod\ 11)$ do produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{w}$, e:

- Se $\vec{u} \cdot \vec{w} \equiv 0\ (mod\ 11)$, então a sequência de números é um CPF;
- Caso contrário, $\vec{u} \cdot \vec{w} \not\equiv 0\ (mod\ 11)$, então a sequência de dígitos não corresponde a um CPF;

Consideremos a sequência fictícia 041.695.641-62, será verificado se tal sequência é válida para a formação de um CPF, observe que:

$$\vec{u} = (0, 4, 1, 6, 9, 5, 6, 4, 1, 6, 2) \text{ e } \vec{w} = (11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1).$$

Fazendo, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, teremos:

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \cdot 11 + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 9 + 6 \cdot 8 + 9 \cdot 7 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 + 40 + 9 + 48 + 63 + 30 + 30 + 16 + 3 + 12 + 2 \Rightarrow$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 253.$$

Logo,

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 253 \equiv 0\ (mod\ 11), \text{ pois, } 253 = 23 \cdot 11.$$

Deste modo comprava-se o fato que a sequência 041.695.641-62 é um a sequência válida para um CPF.

Outra informação interessante consiste no fato de que o último algarismo do terceiro conjunto de números, YYY.YYY.YY**Y**-YY (destacado em negrito) indicar a região onde o CPF, foi emitido. Tem-se os seguintes códigos e regiões:

0 – Rio Grande do Sul;

1 – Distrito Federal, Goiás, Mato Grosso, Mato Grosso do Sul e Tocantins;

2 – Acre, Amapá, Amazonas, Pará, Rondônia e Roraima;

3 – Ceará, Maranhão e Piauí;

4 – Alagoas, Paraíba, Pernambuco e Rio Grande do Norte;

5 – Bahia e Sergipe;

6 – Minas Gerais;

7 – Espírito Santo e Rio de Janeiro;

8 – São Paulo;

9 – Paraná e Santa Catarina.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O maior desafio dos docentes é acompanhar o avanço tecnológico disponibilizando os recursos de forma objetiva e eficaz para melhorar a qualidade do processo de ensino-aprendizagem. "É fundamental que o professor reflita sobre essa realidade, respondendo sua prática, para que possa fornecer as ferramentas motivadoras ao aluno e, desta forma, ajuda-lo a construir o conhecimento." (SOUZA; PATARO, 2009, p. 18).

Essas novas tecnologias surgiram como facilitadores educacionais, através delas foi possível criar pontes e estabelecer conexões no processo de aprendizagem, "[...] as ferramentas tecnológicas favorecem o acesso a coleta de informações, textos, mapas e que todo acesso rápido a informação contribui para melhorar o ensino" (TERUYA, 2006, p. 94). A escola deve adaptar-se e aproximar-se desse aluno cada vez mais ligado as novas tecnologias. "Essa nova escola se tornará mais visível nos próximos anos, com a chegada da geração digital à vida profissional" (MORAN, 2013, p. 1).

Alguns autores como Kenski (2009) e Valente (2013), propõe uma reformulação do termo Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC's) para Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC's) que refletem a utilização dessas novas tecnologias conectadas em rede, ou ainda a partir de sua convergência em meios digitais tais como: vídeos, aplicativos, smartphones, softwares, jogos virtuais, imagens entre outros.

Uma das vertentes das TDIC's empregadas atualmente no ambiente escolar são as planilhas eletrônicas. As planilhas eletrônicas caracterizam-se pela manipulação de grande quantidade de dados, por serem ferramentas lógicas e estatísticas, além de sua facilidade na representação gráfica dos dados.

Segundo Fioreze (2010):

> Com as planilhas eletrônicas, podem-se inserir fórmulas que possibilitam minimizar cálculos laboriosos e rotineiros, permitindo assim que se dê mais atenção à construção de procedimentos relacionados à resolução do problema e à verificação e análise do resultado encontrado. Assim como na utilização da calculadora, a montagem das expressões envolvidas na situação demanda que o aluno tenha conhecimento da hierarquia de cada operação em relação às demais, necessitando, quando que

necessário, a colocação de parênteses. Essa verificação do erro cometido ao observar os resultados encontrados possibilita que o aluno encontre na expressão o que deve ser corrigido. (FIOREZE, 2010, p.84)

Como estratégia de aprendizagem, pensou-se em elaborar uma Sequência Didática (SD) que se utilize das TDIC’s empregando planilhas eletrônicas para manipulação dos dados e obtenção de resultados. A sequência didática será desenvolvida a partir da proposta idealizada por Zabala (1998, p. 56).

A proposta está dividida conforme Quadro 1.

Quadro 1 – Etapas da sequência didática (SD).

ORGANIZAÇÃO DA SD	AÇÕES DESCRITAS PELO PROFESSOR	DURAÇÃO
ATIVIDADE DIAGNÓSTICA	Avaliação escrita que engloba conhecimentos básicos da divisão de números inteiros e suas propriedades. Devolutiva da avaliação e correção da atividade.	03 horas-aula (180 minutos)
1ª Etapa: Apresentação da Sequência Didática.	Leitura de texto impresso, “Adedanha ou de como os deuses matemáticos trouxeram a paz ao mundo" (Revista Eureka 2007, p. 22).	01 hora-aula (60 minutos)
2ª Etapa: Sistema de identificação de números, o CPF.	Fazer um recorte histórico do CPF expondo sua importância nos dias atuais. Utilização de textos impressos em sala de aula.	01 hora-aula (60 minutos)
3ª Etapa: Busca de soluções e exposição do conceito e algoritmos.	Explicação teórica do algoritmo que verifica se uma sequência de onze números é um CPF.	02 horas-aula (120 minutos)
4ª Etapa: Generalização do algoritmo matemático por meio de planilhas eletrônicas.	Implementação do algoritmo exemplificado na 3ª etapa por meio de planilhas eletrônicas.	02 horas-aula (120 minutos)
5ª Etapa: Prova ou exame.	Avaliação escrita.	02 horas-aula (120 minutos)

	Implementação prática.	03 horas-aula (180 minutos)

Fonte: Próprio Autor (2023).

Desenvolvida a sequência didática, o professor poderá utilizar todas as atividades propostas realizadas durante as aulas e avaliar de forma cumulativa os conhecimentos adquiridos pelos alunos. A avaliação pode ser constituída através de instrumentos quantitativos, tais como:

- Avaliação diagnóstica;
- Avaliação/Exame
    - Avaliação escrita
    - Implementação do algoritmo através de planilhas eletrônicas

E de critérios atitudinais que englobam os aspectos qualitativos, como:

- Esforço, envolvimento e dedicação;
- Participação e questionamentos no desenvolvimento das atividades.

A fim de obter uma nota final para o estudante após a execução da sequência didática sugere-se a utilização do Quadro 2, que serve como referência para obtenção de uma nota de avaliação.

Quadro 2 – Quadro de notas.

Alunos	Exame Escrito (N1)	Implementação (N2)	Atitudinal (N3)	Total
Aluno 1				
Aluno 2				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Aluno n (enésimo aluno)				

Fonte: Próprio Autor (2023)

Além disso, o professor ao final do percurso poderá fazer um pequeno questionário com questionamentos do tipo:

(1) O que você estudou no decorrer da sequência didática?

(2) Os assuntos abordados foram relevantes? O que mais chamou sua atenção, por quê?

(3) Você conseguiu compreender os conceitos matemáticos envolvidos? Senão, quais não conseguiu compreender?

(4) Tem interesse em aprofundar no assunto?

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Percebe-se que o processo de ensino/aprendizagem é profundo e complexo. Com a crise sanitária de Sars COVID-19 no ano de 2020 evidenciou-se o quão grande é o abismo educacional brasileiro. O fechamento das escolas e o afastamento social expôs as desigualdades sociais presentes na sociedade brasileira fazendo com que professores (re)pensassem sua prática docente.

Nesse contexto, as TDIC's emergiram abruptamente no ambiente escolar fazendo com que recursos como: computador, celular e internet fossem a principal ponte facilitadora no processo. Além disso, docentes tiveram que rapidamente aprender a produzir e editar vídeos, e sobretudo aprender sobre diversos softwares/aplicativos como por exemplo: Google Classroom, Google Meet, Zoom, Canva, GeoGebra, Planilhas Eletrônicas, entre outros.

Conforme exposto anteriormente, a Aritmética particularmente a Congruência Modular é um conteúdo ainda pouco explorado no currículo do ensino médio, as discussões desenvolvidas nesta pesquisa tiveram por objetivo proporcionar uma nova possibilidade pedagógica através do uso de uma sequência didática (SD) quando integrada aos anseios presentes na BNCC.

Com intuito de seguir com a pesquisa, pretende-se aplicar a sequência didática produzida por meio de um estudo de caso em turmas do Ensino Médio da rede pública de ensino no munícipio de Paracatu. Ao aplicar a SD pretende-se verificar o conhecimento matemático adquirido dos participantes observando-se as habilidades descritas na BNCC.

Contudo, espera-se que este trabalho sirva como fonte de reflexão para professores de matemática, estimulando-os a buscar novas ferramentas metodológicas e aprimoramento profissional. Pretende-se também que esta pesquisa seja um norteador para o desenvolvimento de outras produções acadêmicas.

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto de Matemática e Tecnologia (IMTec) da Universidade Federal de Catalão (UFCAT), pelo suporte físico e de materiais no desenvolvimento da pesquisa. À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo fomento através da bolsa de mestrado. E ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Triângulo Mineiro (IFTM) – Campus Paracatu pela flexibilização da minha jornada de trabalho.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, M. M. **Introdução à metodologia do trabalho científico:** elaboração de trabalhos na graduação. São Paulo, SP: Atlas, 2010.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a geometria fractal:** para a sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BORBA, M. C.; S. D. L.; J., N. R. C. **Vídeos na Educação Matemática:** Paulo Freire e a quinta fase das tecnologias digitais. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2022 (Tendências em Educação Matemática).

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética**. São Paulo: Atual, 1991.

EMANUEL, P. ADEDANHA OU "DE COMO OS DEUSES MATEMÁTICOS TROUXERAM A PAZ AO MUNDO". **EUREKA, Edição Especial, 2007**, Rio de Janeiro, p. 22 – 28. Disponível em: < https://www.obmep.org.br/docs/Eureka.pdf> . Acesso em 22 ago. 2023

FIOREZE, L. A**. Atividades digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade: uma análise a partir da teoria dos campos conceituais**. Porto alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010, 240 p. Tese (Doutorado em Informática na Educação) –Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, UFRGS, Porto Alegre, 2010.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6.ed. São Paulo: Atlas, 2008.

HEFEZ, A. **Aritmética**. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação**. Campinas, SP: Papirus, 2009.

MILIES, C. P. **A matemática dos códigos de barras**. IME – USP, 2006.

MILIES, C. P. **A matemática dos códigos de barras**. RPM 65. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/65/9.html>. Acesso em: 17 jun. 2023.

MORAN, J.; BARBOSA, A. **Novas tecnológicas estão mudando radicalmente ambiente escolar**. Disponível em: <http://redeglobo.globo.com/globoeducacao/noticia/2013/06/novas-tecnologias-jaestao-mudando-radicalmente-o-ambiente-escolar.html>. Acesso em 10 ago. 2023.

OLIVEIRA, F. J.. **O Ensino da Matemática no Contexto da Educação Brasileira**. In: 16º COLE - Congresso de Leitura do Brasil, 2007, Campinas SP. Caderno de Atividades-Resumos, 2007. v. 16.

SANTOS, J. P. de O. **Introdução à Teoria dos Números**. 3.ed. Rio de Janeiro: Impa, 2020.

SOUZA, R. J.; PATARO, P.R.M. **Vontade de saber Matemática**. 1ª Ed. São Paulo: FTD, 2009.

TERUYA, T. K. **Trabalho e educação na era midiática**: um estudo sobreo mundo do trabalho na era da mídia e seus reflexos na educação. Maringá, PR:Eduem, 2006.

VALENTE, J. A.; BUSTAMANTE, S. B. V. **Educação a Distância: prática e formação do profissional reflexivo**. Avercamp, São Paulo: 1ª. Ed. 2009. 260p.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: ArtMed, 1998.