A DINÂMICA DE CRESCIMENTO DE UM TUMOR: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Igor Raphael Silva de Melo[1]
Noemita Rodrigues da Silva [2]
Roger Ruben Huaman Huanca[3]

RESUMO

O presente artigo pontua passos de um estudo teórico, se caracterizando como uma revisão da literatura, no intuito de aprofundar, investigar, analisar e sintetizar pesquisas acerca do Estudo - ensino de Equações Diferenciais na Educação Superior, especificamente na Licenciatura em Matemática, conectando temas como Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática e da Matemática Aplicada, as Tecnologias da Informação e Comunicação, e a aplicação desenvolvida sobre a dinâmica do crescimento populacional de tumores. Objetiva-se que a partir dessa discussão possa-se trazer e apresentar possíveis possibilidades de ensino para a aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), por meio de uma abordagem diferenciada dos modelos matemáticos aqui apresentados. Para isso, traçamos metodicamente algumas atividades que se enquadram numa metodologia qualitativa, baseadas em literaturas de estudos sobre EDO de 1º ordem, com aplicações no campo da Biomatemática. O estudo permitiu inferir a contribuição para uma melhor compreensão conceitual, embora ainda que persistam várias das dificuldades relacionadas à aprendizagem deste conteúdo, também cabe destacar que ao propor uma forma de trabalho diversificada da que estão acostumados possa ser algo motivador ao que se trata de ensinar e aprender na Educação Superior. Acredita-se que indicar novos caminhos para o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias pode ser a expectativa de algum leitor. Talvez esse trabalho traga elementos que possam auxiliar pessoas interessadas no ensino dessa disciplina e assim motiva-los também a elaborarem suas próprias propostas de ensino.

Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem de Equações Diferenciais, Modelagem Matemática, Tecnologias da Informação e Comunicação, Tumores Sólidos.

INTRODUÇÃO

O presente artigo apresenta alguns resultados de uma pesquisa realizada sobre dois modelos matemáticos aplicados aos estudos da dinâmica de crescimento de tumores sólidos, na perspectiva da Modelagem Matemática como estratégia de ensino ao discutir e refletir seus resultados no âmbito da Educação Matemática, enfaticamente, uma proposta para o ensino e

[1] Mestrando do Curso de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba- UEPB, igor.rapha6@gmail.com;
[2] Mestranda do Curso de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba- UEPB, noemitarodrigues@hotmail.com;
[3] Doutor pelo Curso de Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP, roger@uepb.edu.br;

aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias em cursos de Licenciatura em Matemática.

Tal pesquisa corrobora com as discussões que apontam que o ensino das Equações Diferenciais Ordinárias em cursos do Ensino Superior está passando por relevantes transformações nas ultimas décadas, onde, autores como Almeida e Borssoi (2004), Dullius (2009), Habre (2003), Javaroni (2007), Rasmussen (2001) e Stephan e Rasmussen (2002) já vem discutindo estratégias que visam dinamizar o ensino dessa disciplina além da forma tradicional, ou seja, ir além da resolução analítica dessas equações e assim passando para um olhar mais crítico-exploratório que impulsione a interpretação desses resultados por meio de recursos didáticos que possibilitem uma melhor compreensão conceitual, principalmente quando são trabalhado modelos matemáticos no campo da Matemática Aplicada (FROTA; NASSER, 2009).

No ramo da matemática aplicada é frequentemente desejável descrever um comportamento ou fenômeno natural da vida real numa linguagem matemática, sejam eles fenômenos físicos, biológicos, sociológicos, ou ainda econômicos.

A Dinâmica de Crescimento Populacional, por exemplo, é uma aplicação que sempre é abordada em cursos de Equações Diferenciais Ordinárias – EDO, na Licenciatura em Matemática. Logo na introdução do conteúdo, quando é apresentado a definição e os diferentes tipos de EDO modelos básicos que descrevem o comportamento variante de uma determinada população são expostos de modo a mostrar a instrumentação da Matemática no desenvolvimento conceitual das ciências físicas, biológicas, químicas, sociais e econômicas, porém, na disciplina, o foco ainda se detém as resoluções analíticas dessas equações (BOYCE; DIPRIMA, 2002).

Nomeamos por modelo matemático a descrição matemática de um sistema ou fenômeno que se pretende a estudar. De acordo com Zill e Cullen (2001), a construção de um modelo pode ser um processo simples, complexo ou até mesmo impossível, levando em conta que não basta apenas construir, como também, resolve-lo. Quanto mais próximo for a descrição do modelo da vida real mais difícil será sua resolução.

Desse modo, percebe-se que a dinâmica populacional já vem sendo estudada há anos por pesquisadores, não só da área de matemática pura/aplicada, mas também por estudiosos de áreas afins na qual a Matemática pode ser aplicada e consequentemente oferecer bons resultados no mundo cientifico (BASSANEZI, 2002).

A relevância em trabalhar a dinâmica populacional se dá fato de sua vasta abrangência e aplicabilidade, pois o processo de crescimento de certa população pode ser modelado, simplesmente, usando uma EDO através de modelos que representam o comportamento da proliferação dessa população por meio de uma variável de interesse, levando em conta conceitos do Cálculo Diferencial, como derivada, taxa de variação, e o de integral.

Em nossa proposta consideramos as diferentes abordagens na resolução de Equações Diferenciais - ED como um instrumento para explorar modelos, resolver problemas e abordar, equilibrada e simultaneamente, representações gráficas, numéricas e simbólicas das equações e suas respectivas soluções.

A busca por uma abordagem mais qualitativa no ensino de Equações Diferenciais prioriza o trabalhado do conteúdo com maior ênfase na contextualização através de situações-problema passíveis de serem representadas em diferentes formas com o auxilio das Tecnologias da Informação e Comunicação – TIC, de modo a analisar o comportamento das soluções, facilitar e agilizar o processo de resolução e cognição do aluno. E assim, simultaneamente ou não, abordamos as técnicas de solução analítica dos modelos aqui trabalhados.

No delineamento das atividades, procuramos explorar também questões conceituais, de modo a dar mais significado às EDO e às suas soluções. Nosso intuito é estimular os estudantes a mudarem o foco da simples manipulação analítica das equações, para a compreensão de seu caráter representativo.

METODOLOGIA

Este artigo pontua passos de um estudo teórico, se caracterizando como uma revisão da literatura, no intuito de aprofundar, investigar, analisar e sintetizar pesquisas acerca do Estudo - ensino de Equações Diferenciais na Educação Superior, especificamente na Licenciatura em Matemática, conectando temas como Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática e da Matemática Aplicada, as Tecnologias da Informação e Comunicação, e a aplicação desenvolvida sobre dinâmica do crescimento populacional de tumores.

Objetiva-se, que a partir dessa discussão possa-se trazer e apresentar possíveis possibilidades de ensino para a aprendizagem de EDO, por meio de uma abordagem diferenciada dos modelos matemáticos aqui apresentados como, apenas, algumas aplicações dentre várias outras que também podem ser exploradas.

Para isso, traçamos metodicamente algumas atividades que se enquadram numa metodologia qualitativa, baseadas em literaturas de estudos sobre Equações Diferenciais Ordinárias de 1º ordem, com um ponto de vista da matemática aplicada–Biomatemática.

Neste trabalho, primeiramente, apresenta-se o uso da Equação de Gompertz e a Equação de Verhulst para estudar o desenvolvimento de tumores sólidos, aplicações escolhidas para serem abordadas neste trabalho pelo fato de serem equações que envolvem EDO e também pela relevância do avanço que a Matemática tem proporcionado para outras áreas do saber, como a Biologia e a Saúde. Para isso, utilizaremos parâmetros reais desse fenômeno biológico encontrados na literatura por Domingues (2010) e Domingues (2011), pois o real interesse, aqui, é uma análise mais detalhada da situação investigada voltada para sua abordagem como fator motivacional no ensino de Matemática. A prática pedagógica foi desenvolvida em contexto de sala de aula, apesar de ainda não ser aplicada, trazemos como uma possibilidade de proposta metodológica.

> O quantitativo tem a ver com o objetivo passível de ser mensurável. Ele carrega consigo as noções próprias ao paradigma positivista, que destaca como pontos importantes para a produção da ciência a razão, a objetividade, o método, a definição de conceitos, a construção de instrumentos para garantir a objetividade da pesquisa (...). O qualitativo engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções de respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências (BICUDO, 2004, p. 103-104).

Em outras palavras, pesquisas no paradigma qualitativo surgem como uma possibilidade para investigação. Nesta abordagem, a pesquisa pode ser concebida como uma trajetória inerente em torno do que se deseja compreender, não se preocupando exclusivamente com seus princípios, leis e generalizações, mas sim focando nos elementos que se constituem significativos para o pesquisador.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Modelagem Matemática na Biologia e a Dinâmica Populacional de tumores: Um breve tecer

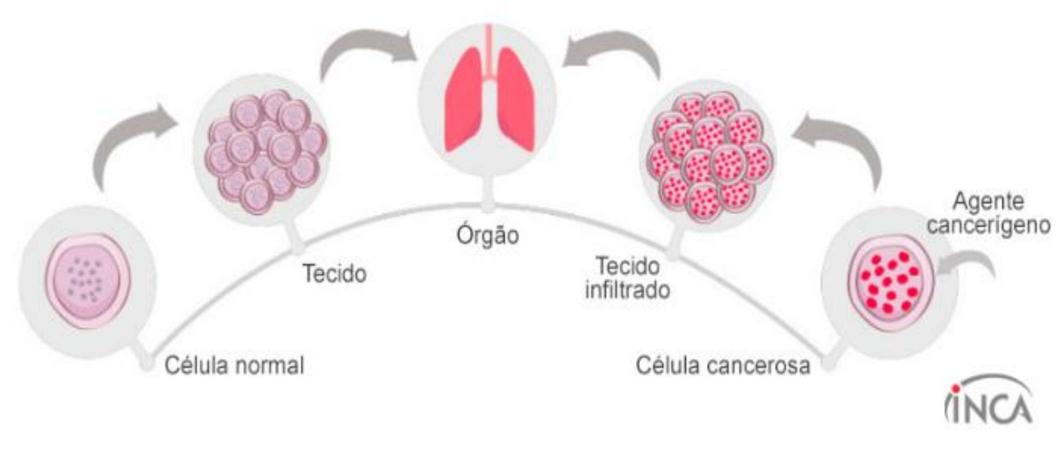
Aqui neste estudo, tratamos da dinâmica populacional de células cancerígenas no corpo humano, enfaticamente ao crescimento populacional de um tumor. Segundo o Instituto

Nacional de Câncer – INCA (2018), o tumor é causado por um desequilíbrio no sistema de divisão celular, em outras palavras, o crescimento excessivo de células anormais que acabam causando um aumento de tamanho em algum tecido do corpo, e assim atingindo algum órgão.

O tumor pode ser considerado benigno, quando não cancerígeno, ou maligno, quando afeta a saúde humana causando a doença responsável por cerca de 13% de todas as causas de mortes no mundo, o que representa aproximadamente sete milhões de pessoas doentes de Câncer. Ainda, segundo o INCA (2018), algo bastante alarmante dessa doença é o fato de como o tumor pode se desenvolver no corpo, podendo ser de forma lenta e gradativa ou com uma velocidade de multiplicação das células tão rápidas que acabam invadindo tecidos e órgãos, sejam vizinhos ou distantes, na área biológica conhecida como metástase.

Na figura a seguir são explanados alguns dos elementos principais envolvidos na dinâmica populacional de crescimento de um tumor.

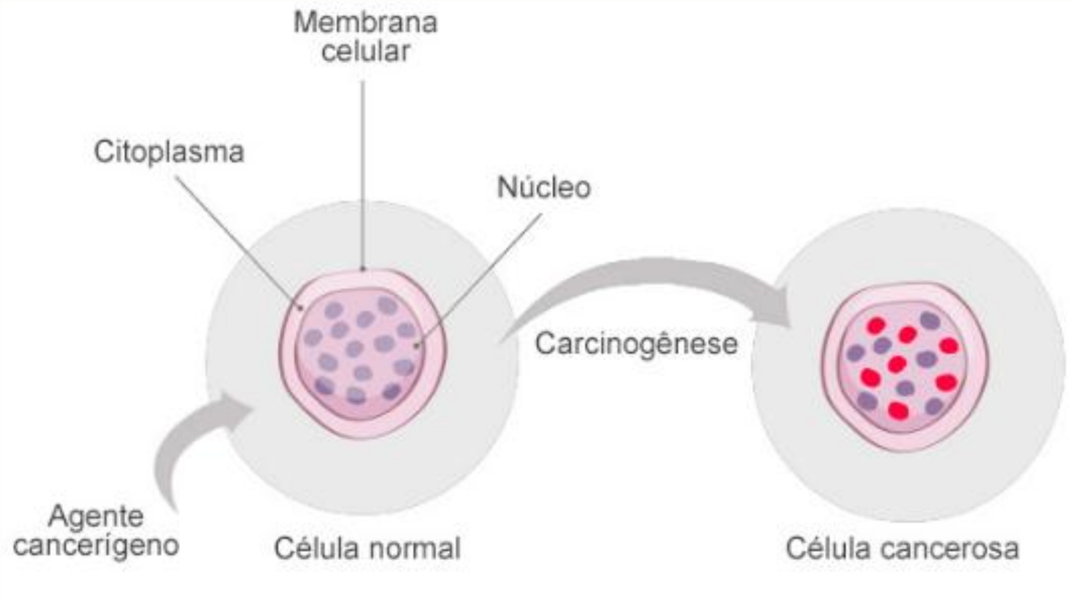
Figura 01: Elementos biológicos do tumor no corpo humano.



Fonte: INCA (2018).

Além disso, quando o individuo é diagnosticado com a doença logo surge a seguinte questão: como surgiu o câncer? Segundo INCA (2018), o câncer surge a partir de uma mutação genética, ou seja, de uma alteração no DNA da célula, que passa a receber instruções erradas para as suas atividades. As alterações podem ocorrer em genes especiais, denominados proto-oncogenes, que a princípio são inativos em células normais. Quando ativados, os proto-oncogenes tornam-se oncogênese, responsáveis por transformar as células normais em células cancerosas.

Figura 02: Conceitos biológicos no surgimento do câncer.



Fonte: INCA (2018).

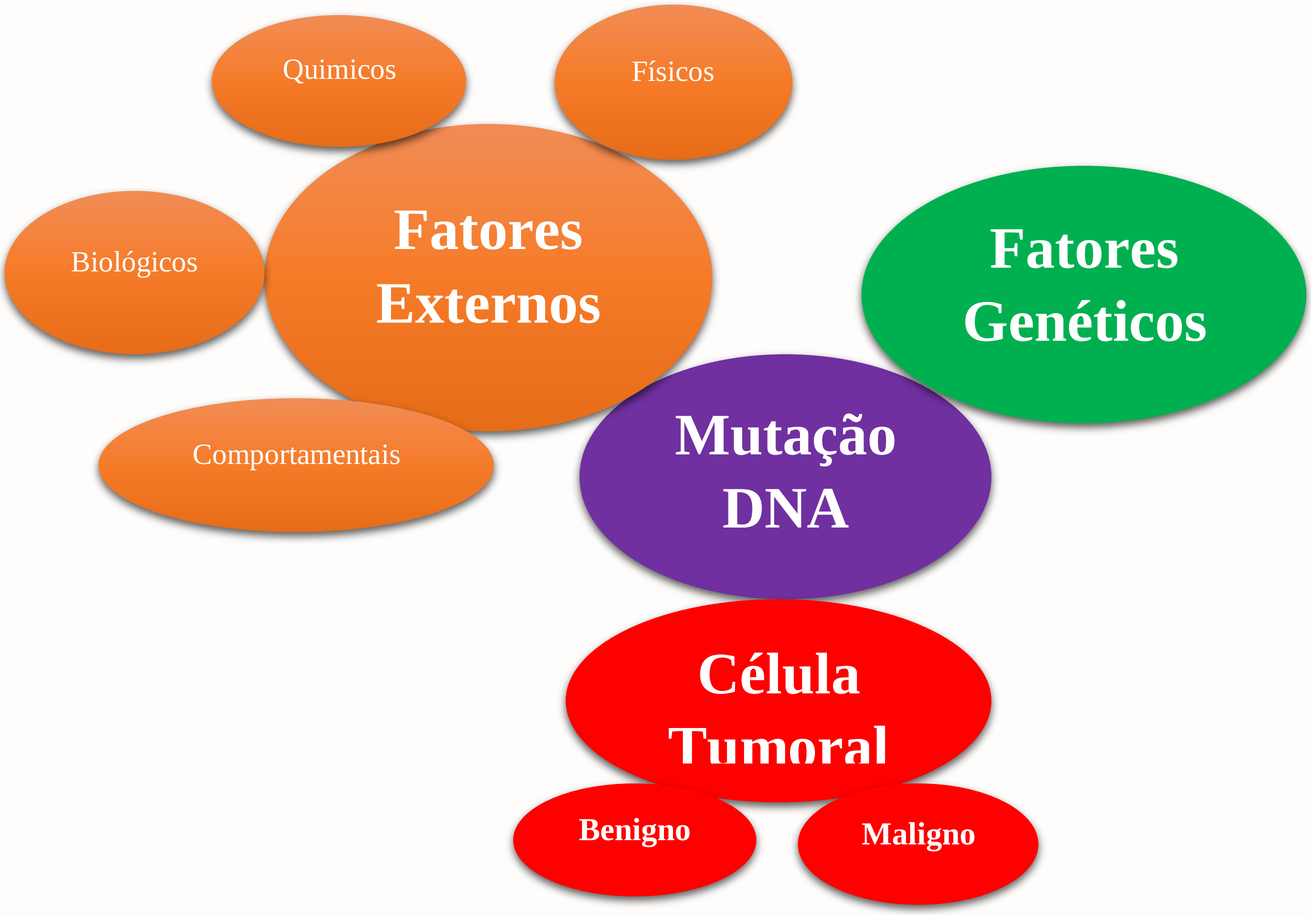
E assim, essas alterações no DNA podem ser decorrentes da influência tanto de fatores genéticos como de agente externos, que segundo a União Internacional Contra o Câncer - UICC (2018) são classificadas em três categorias de carcinógenos:

- Físicos (raios ultravioletas e radiação ionizante);
- Químicos (componentes advindos da poluição do ar, fumaça de tabaco, alimentos e água);
- Biológicos (advindos das infecções provocadas por vírus, bactérias e parasitas).

Independente da decorrência do fator do câncer, o paciente deve ser confirmado pelo resultado do exame histopatológico que dará um ponto de vista prognóstico e terapêutico da doença e partir daí deve-se iniciar uma anamnese que verificará o histórico familiar e o padrão de vida em relação à nutrição, trabalho, hábitos nocivos à saúde, como o consumo de tabaco e álcool, entre outros hábitos que também são fatores de risco da doença.

Em vista disso a UICC (2018) apresenta uma classificação da evolução tumoral para se determinar a melhor forma de tratamento do paciente.

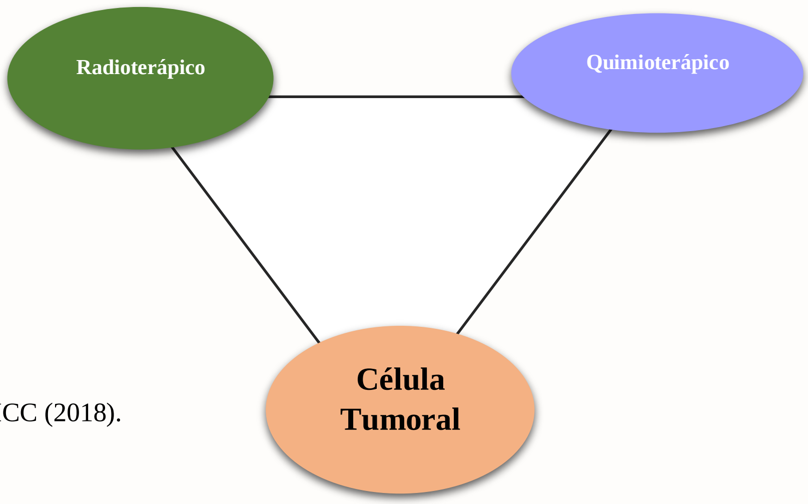
Figura 03: Diagrama dos fatores que levam a classificação da evolução tumoral benigna e maligna.



Fonte: Adaptado de UICC (2018).

Nesse sentido, quando o tumor é classificado clinicamente, é iniciado o tratamento, podendo ser: cirúrgico; radioterápico; e quimioterápico. Esses tipos de tratamento podem ser realizados em conjunto ou de forma singular, dependendo de sua importância no tratamento mais adequado ao paciente e de acordo com o processo de desenvolvimento da doença, bem como seus sintomas.

Figura 04: Diagrama dos tipos de tratamento da doença.



Fonte: Adaptado de UICC (2018).

O processo de desenvolvimento da doença ocorre de forma gradativa e passa pelas seguintes estágios (INCA, 2018):

i. Estágio de iniciação: onde a célula sofre e passa por vários estágios carcinógenos que provoca a modificação no DNA;
ii. Estágio de promoção: depois as alterações no DNA, a célula é transformada em uma célula maligna, gradualmente;
iii. Estágio de progressão: pela multiplicação descontrolada de células, esse estágio é caracterizado por progressivo, onde a doença já está instalada e evolui até as primeiras manifestações clinicas.

Crescimento de Tumores: Modelo de Gompertz

A primeira aplicação, aqui, a ser abordada é justamente o crescimento tumoral a partir do modelo de Gompertz. Beijamin Gompertz, no ano de 1938, desenvolveu uma equação muito famosa, pois mesmo como matemático, se interessou em fazer um estudo que até então naquela época era pesquisado apenas em áreas biológicas. O matemático, com o intuito de entender mais sobre a doença conseguiu descrever o crescimento de tumores sólidos com um modelo denominado Equação de Gompertz (DOMINGUES, 2010).

Pode-se encontrar na literatura diferentes tipos de representação desse modelo, pois, deve-se considerar que o modelo de Gompertz não foi o primeiro e nem o único a ser construído e desenvolvido ao decorrer da história. Na verdade, os estudos sobre crescimento populacional começou a ser estudado há décadas antes, um exemplo disso é um modelo bastante conhecido que foi apresentado pelo economista inglês Thomas Malthus no ano de 1798, o qual até hoje é considerado como um modelo percursor que deu suporte a criação de vários outros que foram e são ainda usados e aperfeiçoados conforme a demanda de novas pesquisas científicas. Alguns desses modelos supracitados podem ser encontrados em um dos capítulos da obra de Bassanezi (2002), intitulado por *Evolução de Modelos*.

Neste trabalho, consideramos o modelo de Gompertz da forma escrita em uma de nossas referências (BOYCE; DIPRIMA, 2002), porém levando em conta algumas modificações em relação à notação de parâmetros, que também é colocada segundo nossa referência de aplicação, Domingues (2011), dada por:

$$\frac{dN}{dt} = -r\,N \ln\left(\frac{N}{K}\right) \tag{01}$$

onde,

$N(t)$ é a população de células tumorais no instante t;

t é o instante considerado para cada quantidade de população de células;

r é a constante positiva de crescimento interno da célula;

K é o tamanho máximo que o tumor pode atingir com os nutrientes disponíveis, ou seja, nossa capacidade de suporte.

Primeiramente, apresenta-se a solução do modelo usando alguns métodos para a resolução analítica de uma EDO, conforme são trabalhadas na Licenciatura em Matemática.

Dada à equação,

$$\frac{dN}{dt} = -r\,N \ln\left(\frac{N}{K}\right) \qquad (02)$$

Fazendo uma mudança de variável, tem-se:

$$u = \ln\left(\frac{N}{K}\right) \Rightarrow N = Ke^{u} \qquad (03)$$

$$\Longrightarrow \frac{dN}{dt} = Ke^{u}\frac{du}{dt}$$

Substituindo em (02)

$$Ke^{u}\frac{du}{dt} = -ru\,Ke^{u} \Longrightarrow \frac{du}{dt} = -ru \qquad (04)$$

Separando as varáveis e Integrando, tem-se:

$$\frac{du}{u} = -rdt \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -\int rdt \qquad (05)$$

$$\ln(u) = -rt + C \Rightarrow \ln\left(\frac{N}{K}\right) = e^{-rt}e^{C} \qquad (06)$$

$$N = Ke^{e^{-rtc^{C}}} \qquad (07)$$

E sendo $N(0) = N_0$

Logo,

$$N(t_0) = Ke^{-e^{rt}\ln\left(\frac{N_0}{k}\right)}, \qquad (08)$$

que é solução do PVI:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN\ln\left(\frac{K}{N}\right) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

Agora, nesse momento, deve-se levar em consideração os conhecimentos prévios e específicos da aplicação evolvida, nesse caso, sobre os conceitos biológicos acerca do crescimento de um tumor no corpo humano. Pois, tendo em vista que as populações de células com anomalia não podem ser excedidas por um certo limite suporte de células tumorais, traz-se então, um estudo de Friberg e Mattson (1997), no qual a carga letal de células tumorais está entre $10^{12} - 10^{13}$ células, ou seja, um dos parâmetros adotados no modelo (DOMINGUES, 2011).

Desse modo, considera-se para os cálculos, que a capacidade de suporte será K=10^{13} células. Os parâmetros da solução da equação de Gompertz utilizados neste trabalho são reportados na literatura Domingues (2011).

Logo, a equação (08) com esses valores adotados torna-se:

$$N(t) = 10^{13}e^{-e^{-0{,}0024\ln(10)t}} \quad , \qquad (09)$$

onde,

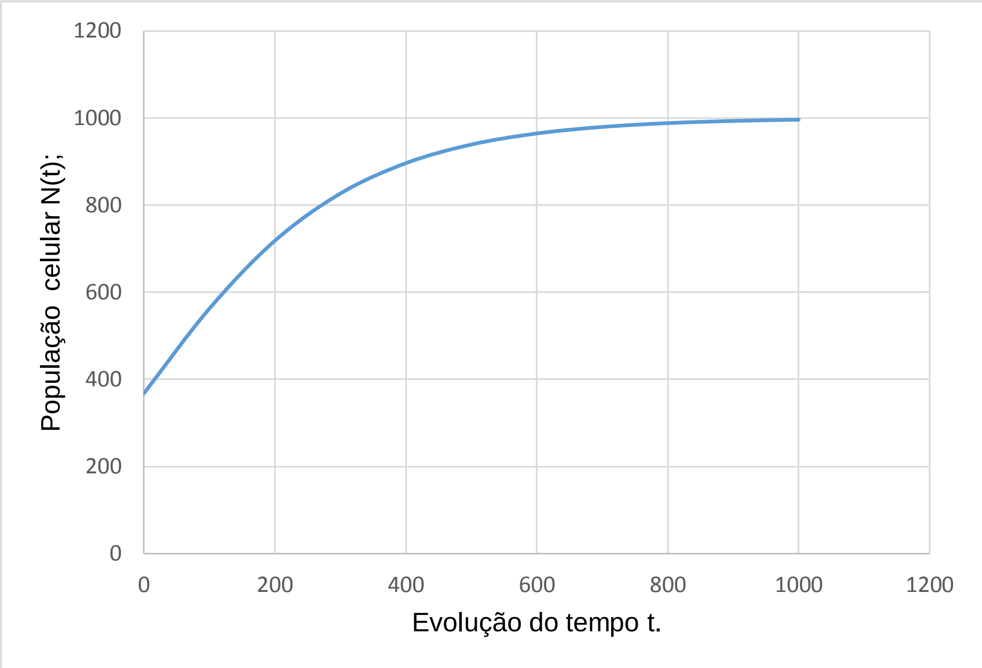
r = 0, 0060;

K = 10^{13};

N_0 = 10^{9}.

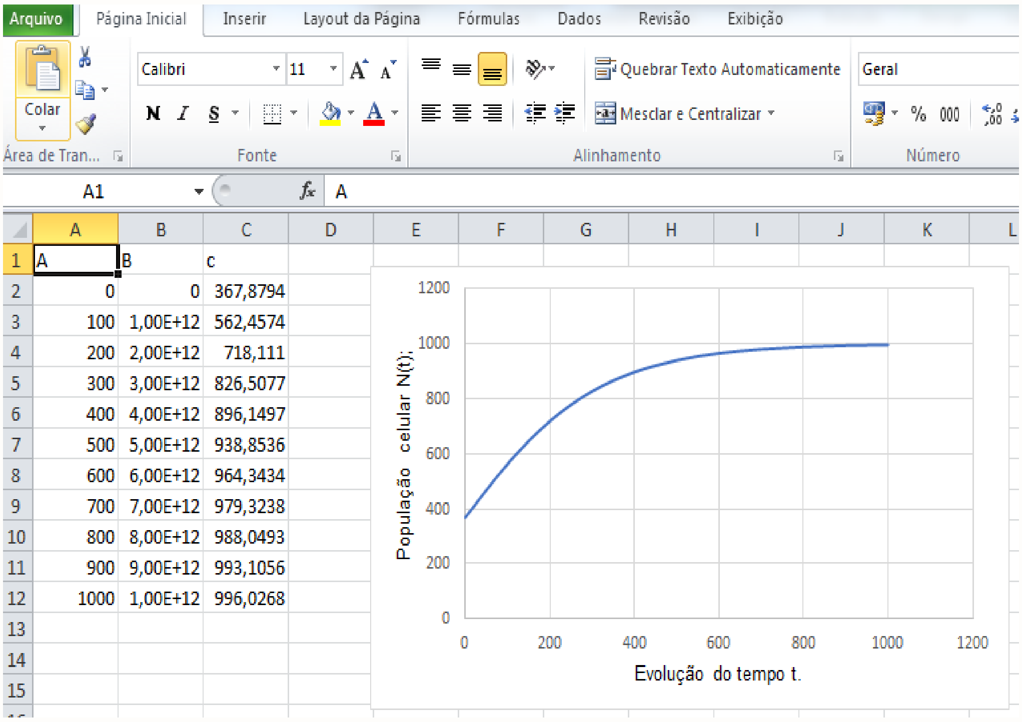
E assim, é neste momento que é possível explorar a solução da EDO além de sua resolução analítica, pois agora é possível representar e analisar graficamente esta solução por meio de recursos digitais. Primeiramente, com o auxilio da ferramenta Excel, construímos o gráfico da evolução temporal de crescimento populacional descrito pelo modelo de Gompertz, de acordo com os dados e estudos realizados em Domingues (2011), posteriormente uma análise comparativa de resultados.

Figura 05: Gráfico da evolução temporal de crescimento populacional de células tumorais – Modelo de Gompertz.



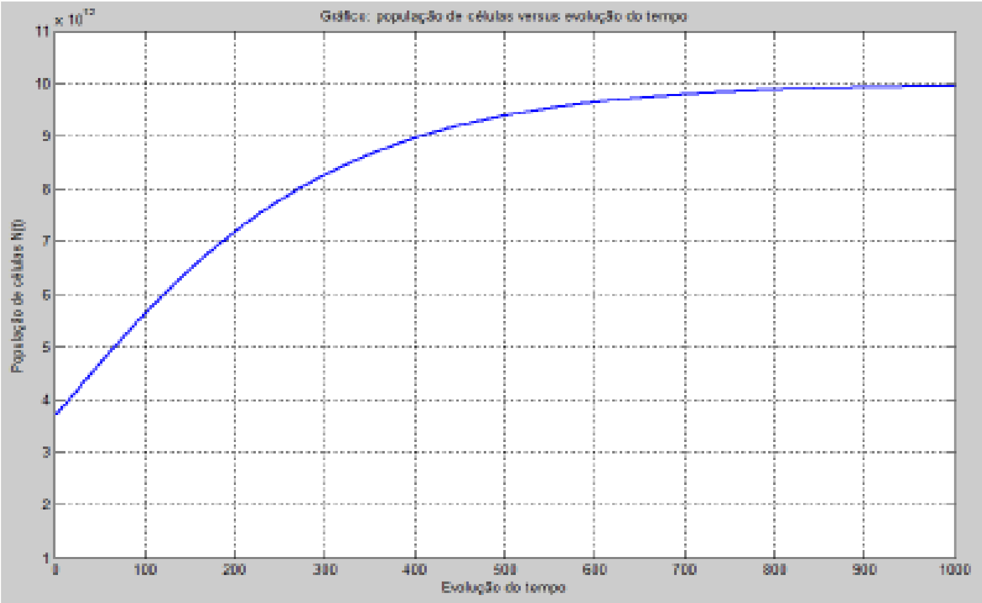
Fonte: Própria.

Figura 06: Construção do Gráfico da evolução tumoral pelo modelo de Gompertz.



Fonte: Própria.

Figura 07: Gráfico da evolução temporal de crescimento populacional de células tumorais com um fator inibidor.



Fonte: Domingues (2011).

É possível perceber graficamente que o crescimento do tumor pode ser considerado com uma taxa de crescimento acelerado ou controlado das células. Pela contextualização da aplicação sabe-se que essa variação só se torna possível se existir ou não um fator de tratamento inibidor. Domingues (2011) realizou um estudo computacional onde é inserido um fator de tratamento baseado em *endostatina* e percebe-se que tal fator, teoricamente, impede o crescimento acelerado das células. Por outro lado, para um determinado tempo *t* suficientemente grande, mesmo com o tratamento, as células tumorosas alcançará a capacidade suporte, conforme mostra o gráfico acima.

Crescimento de Tumores: Modelo Logístico

É sabido, que inicialmente a equação que descreve o crescimento ou decrescimento de populações foi dada pelo modelo de Malthus no ano de 1798, cujo modelo é descrito por:

$$\frac{d(P)}{d(t)} = kP, com\ k > 0,$$

onde, a população em relação ao tempo apresenta um crescimento exponencial não limitado. Assim, essa equação diverge substancialmente do previsto, o que torna o modelo não tão eficaz para algumas aplicações que necessitam de resultados mais precisos ou mais próximos da realidade (ZILL; CULLEN, 2001).

.

Nesse sentido, surge o biólogo-matemático Pierre François Verhulst, um matemático belga que introduziu a equação de crescimento logístico onde a população deverá crescer até um limite máximo sustentável, isto é, ela tende a se estabilizar num determinado valor. O modelo de Verhulst é, essencialmente, o modelo de Malthus modificado, considerando a variação de crescimento dependendo da própria população em cada instante e satisfazendo algumas propriedades (BASSANEZI, 2002).

Em nossa referência conceitual, Bassanezi (2002), encontra-se o modelo de crescimento logístico, também denominado por Equação de Verhulst, dada por:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP), com\ k > 0,$$

onde a e b são constantes positivas, as quais complementam a equação do crescimento populacional exponencial proposto por Malthus que produz taxas infinitas de populações com o crescimento do tempo que pode vir a descrever bem inicialmente, mas, para tempos suficientemente grandes foge da realidade das populações reais.

Para nosso estudo, corroborado por Domingues (2011), usaremos o modelo de crescimento logístico, apresentado por Verhulst em 1838, porém adaptado nos moldes de nossa aplicação, crescimento de tumores, que é dado pelos seguintes termos:

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N, \tag{10}$$

Observe que se usássemos o modelo de crescimento de tumor pelo estudo de Malthus seria:

$$\frac{dN}{dt} = rN \tag{11}$$

O qual tem como solução, por separação de variáveis, e sendo a condição inicial $N(0) = n_0$, a função:

$$N(t) = n_0\, e^{rt} \tag{12}$$

E utilizando os dados reportados em Domingues (2011), a equação fica da seguinte forma:

$$N(t) = 10^{13}\, e^{0{,}006t} \tag{13}$$

Entretanto, observa-se que para $t \to \infty$, $N(t) \to \infty$ que para o crescimento tumoral não é real para tempos indefinidamente grandes. E já, para o modelo logístico, isso não acontece como veremos ao resolvermos a equação.

Sendo $N(0) = n_0$, temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = r\left(1 - \dfrac{N}{K}\right)N \\ N(0) \end{cases}$$

De fato,

$$\frac{dN}{dt} = r\left(\frac{K-N}{K}\right)N \Longrightarrow \frac{K}{N(K-N)}dN = r\,dt \tag{14}$$

Por frações parciais, temos que:

$$\frac{K}{N(K-N)} = \frac{1}{N} + \frac{1}{K-N} \tag{15}$$

Assim, integrando ambos os membros da equação têm-se:

$$\int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{K-N}\right)dN - \int r\,dt$$

$$\int \left(\frac{1}{N}\right)dN + \int \left(\frac{1}{K-N}\right)dN = rt + C$$

$$\ln N - \ln(K-N) = rt + C$$

$$\ln\left(\frac{N}{K-N}\right) = rt + C$$

$$\frac{N}{K-N} = e^{rt}.e^{k} \Longrightarrow N = (K-N)e^{rt}.e^{C}$$

$$\Longrightarrow N = Ke^{rt}.e^{C} - Ne^{rt}.e^{C}$$

$$\Longrightarrow N + Ne^{rt}.e^{C} = Ke^{rt}.e^{C}$$

$$\Longrightarrow N(t) = \frac{Ke^{rt}.e^{C}}{1+e^{rt}.e^{C}} \tag{16}$$

E das condições iniciais e fazendo os ajustes necessários, a solução do PVI é dada por:

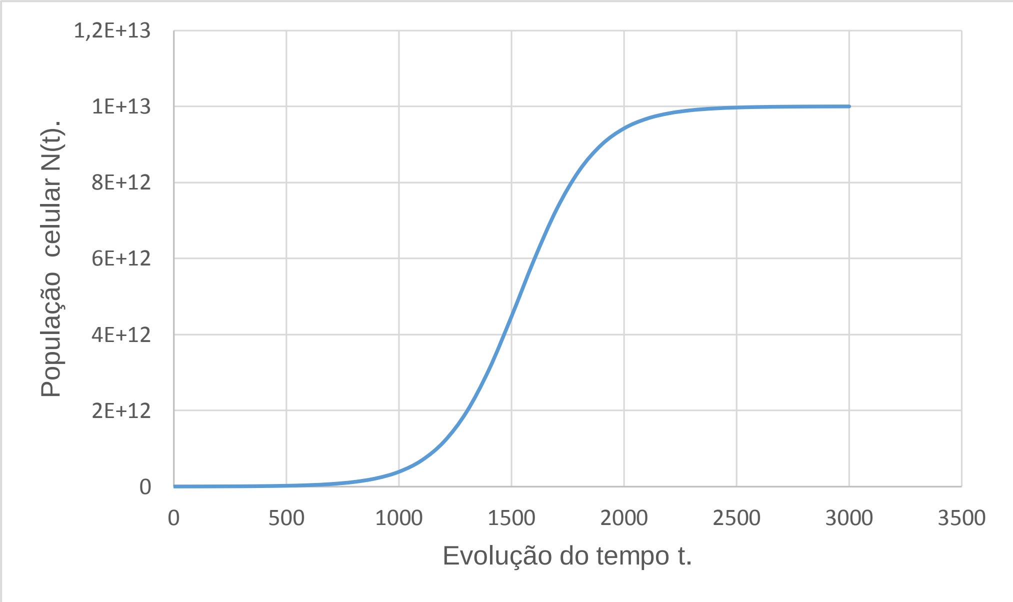
$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0+(K-N_0)e^{-rt}} \tag{17}$$

Como os dados já citados anteriormente, a equação (17) fica da seguinte forma:

$$N(t) = \frac{10^{22}}{10^9 + (10^{13} - 10^9)e^{-0,006t}}, \tag{18}$$

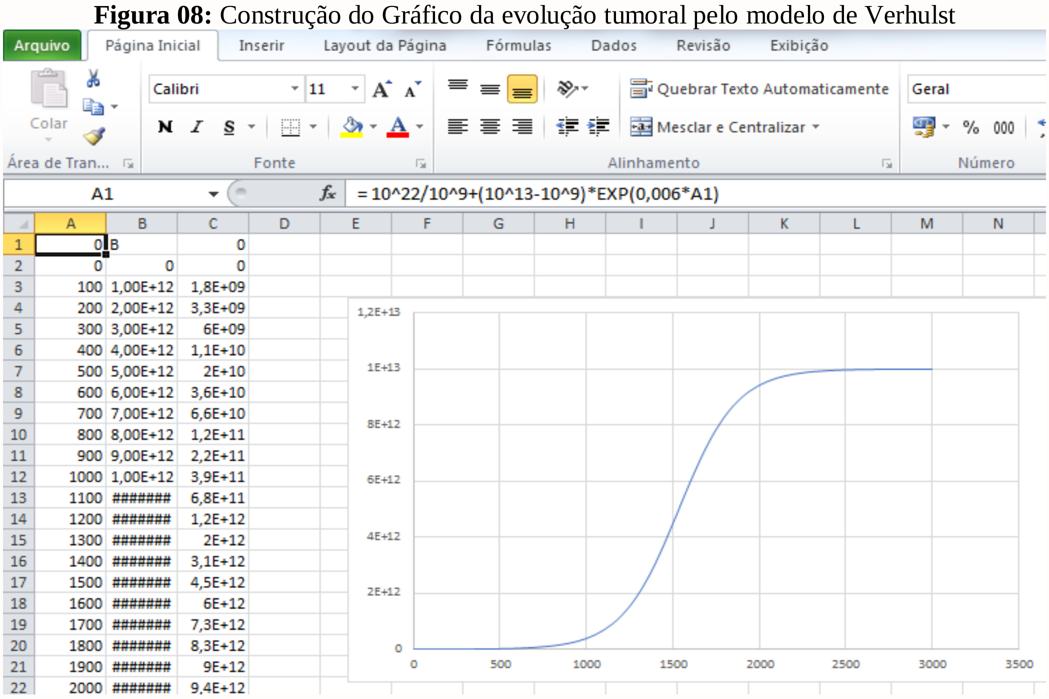
Que, de acordo com nossas aplicações, tem como representação gráfica:

Figura 07: Gráfico da Evolução Tumoral – Modelo Logístico



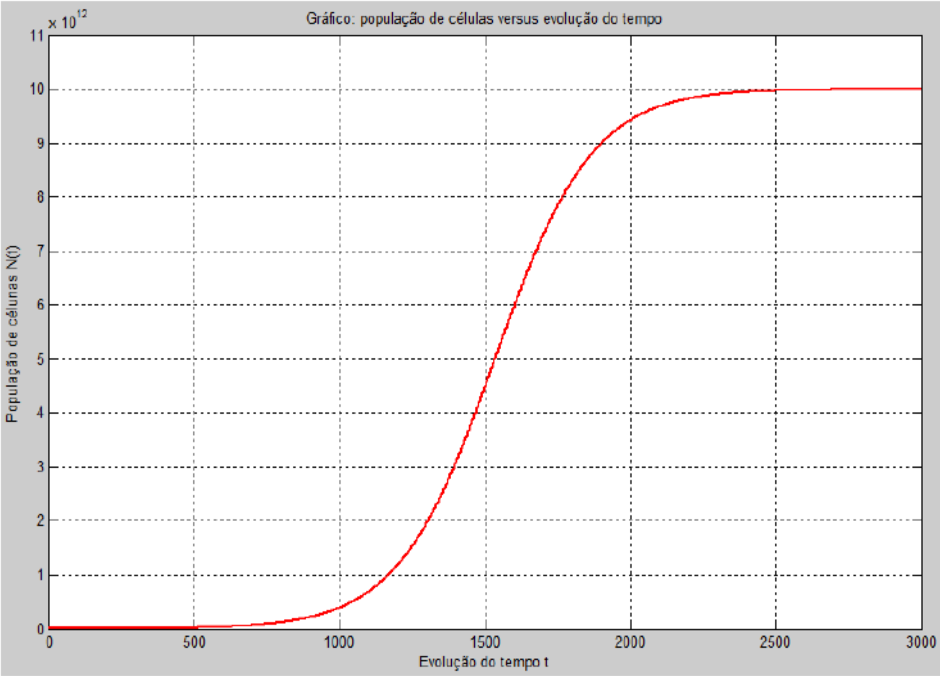
Fonte: Própria.

Figura 08: Construção do Gráfico da evolução tumoral pelo modelo de Verhulst



Fonte: Própria.

Figura 09: Gráfico da evolução temporal de crescimento populacional de células tumorais - Modelo logístico



Fonte: Domingues (2011).

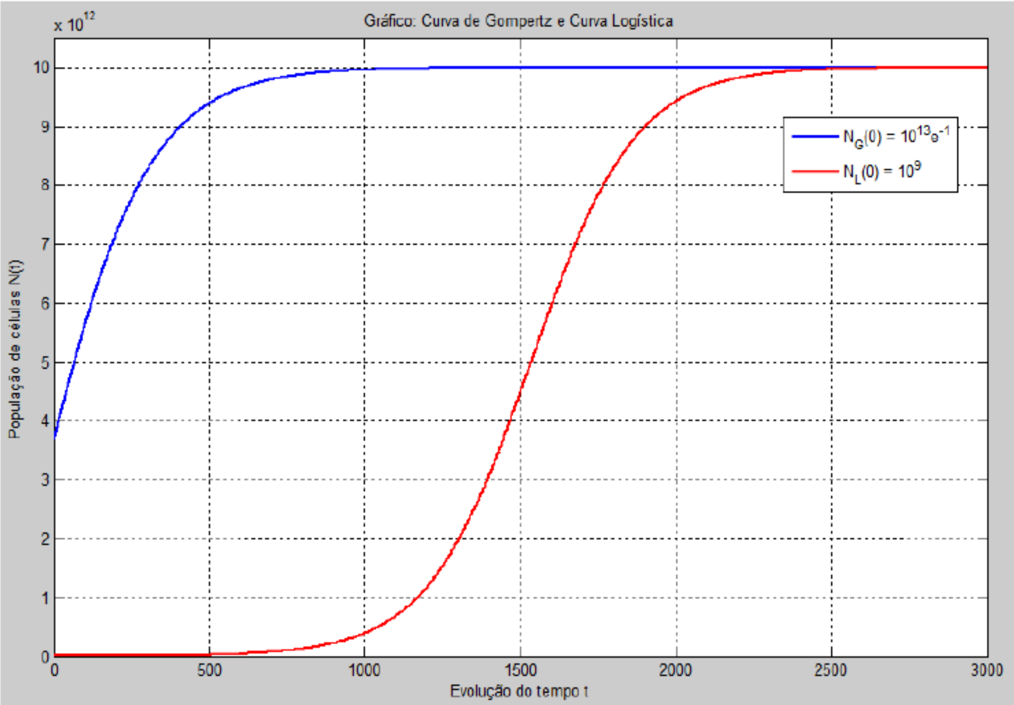
Geometricamente, pode-se observar que, diferente do modelo de crescimento exponencial, já mencionado, quanto $t \to \infty$ temos que $N(t) \to 10^{13}$. Em outras palavras, para um tempo suficientemente grande, a população de células tumorais tende para a capacidade de suporte K. E isso, mesmo com o modelo não contendo um fator de tratamento que, como já dito, impede o crescimento acelerado das células.

Para ambos modelos, para $t \to \infty$, a população de células tende a capacidade suporte. Porém, graficamente, observa-se que há diferenças na evolução das células tumorais com o tempo.

No modelo logístico, a população de células cresce bem mais lentamente do que o modelo de Gompertz. Entretanto, para um tempo suficientemente grande, tendem a capacidade de carga. Como apresentado em Domingues (2011), o gráfico abaixo apresenta ambos os modelos plotados no mesmo plano, no qual é possível ver graficamente a diferença que até então é expressa de forma algébrica.

Observe no gráfico abaixo que, inicialmente, o modelo de Gompertz tem crescimento rápido, já o modelo logístico forma uma curva chamada *sigmóide*, onde para tempos iniciais o crescimento é mais lento. Vale destacar também que o modelo logístico, ao analisar graficamente, demora, praticamente, duas vezes e meia a mais que o modelo de Gompertz para chegar à capacidade suporte.

Figura 10: Gráfico da evolução temporal: Modelo de Gompertz e Modelo logístico.



Fonte: Domingues (2011).

Lembrando que para ambos os modelos apresentados neste capitulo, não partimos de hipóteses iniciais e nem levantamento de dados conforme as etapas da modelagem descritas por Bassanezi (2002). Denominamos essas ações por *experimentação* e *abstração*, já que apresentamos a problemática já modelada. Visto que, com os modelos descritos por equações diferenciais ordinárias, passamos a resolvê-lo analiticamente com as técnicas de resolução apresentadas no capitulo três, etapa esta denominada por *resolução*. Já a *validação* se dá ao compararmos os dados experimentais, reportados na literatura analisada Domingues (2011), a partir de outros recursos digitais, o que é possível ao inserir a tecnologia em sala de aula. E, por esse motivo, ressaltamos importância da *aplicação* destes estudos com o auxilio das mídias digitais o qual nos permitiu fazer reflexões acerca da situação tanto algebricamente quanto graficamente.

Um papel bastante importante na formação curricular de um aluno de matemática, como também para um futuro professor, pois se observa que ao explorar a aplicação através de suas diferentes representações o aluno interage de forma produtiva na resolução e na situação-problema, estendendo-se até para sua vida cotidiana, o que pode gerar dados importantes para a tomada de decisões, principalmente em melhores maneiras de fornecer um tratamento adequado para o paciente ou até mesmo para previsões de crescimento muito descontrolados no ponto de vista biológico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sabemos que normalmente, o conteúdo da disciplina de Equações Diferenciais, em geral, se delimita a apresentação da definição, posteriormente é desenvolvida técnicas de resolução analítica dessas equações e, isso quando, são abordadas algumas aplicações, retiradas de livros de texto, o que não deixa de também ser importante na aprendizagem matemática.

Nesse sentido, nos concentrávamos não apenas na resolução de uma EDO, mas sim no comportamento de suas soluções, visto que, o foco não era mais apenas resolver uma equação com técnicas preditas e sim modelos que a partir de uma contextualização numa situação-problema se desperta a necessidade e a preocupação de, além de resolvê-las cuidadosamente em termos algébricos, compreender sua resolução e consequente sua solução para que pudesse fazer sentido na aplicação. Para isso as mídias tecnológicas se tornam fator fundamental nesse processo de desenvolvimento cognitivo.

Nas aplicações foram apresentados dois modelos matemáticos, sendo o primeiro, o Modelo de Gompertz e o segundo, o modelo de Verhulst, também conhecido por Modelo Logístico. Modelos já desenvolvidos para descrever o crescimento populacional de tumores, mas que agora foi trabalhado numa abordagem, além da algébrica, a gráfica e numérica, baseadas em estudos de Domingues (2011), na qual pudemos ver o que havia por trás de tantos termos analíticos. Vale ainda, ressaltar a importância do papel do software nessa em questão, pois a partir dele pudemos também desenvolver algumas atividades do processo de Modelagem Matemática, expostas por Bassanezi (2002), como validar tais modelos através de sua aplicação.

Do que apresentamos nesta pesquisa, sugerimos, para cada modelo nas áreas do conhecimento abordadas, a criação de sequências didáticas para o ensino de EDO por meio da Modelagem Matemática em consonância com as tecnologias da Informação e Comunicação. Como dito na Introdução, não estamos defendendo o ensino deste tópico matemático sem seu enfoque formal, mas que tenha a possibilidade de apresentar suas aplicações de forma exploratória, pois elas surgiram, justamente, para resolver problemas de outras ciências. Tornar isso fato em sala de aula é fundamental.

O termo Modelagem Matemática aparece na Educação Matemática sob várias concepções diferenciadas em aspectos de sua definição. Existem pesquisadores que a utilizam como uma como uma abordagem de ensino. Para outros, a Modelagem Matemática é uma linha da Matemática Aplicada que a utiliza para resolver problemas da realidade.

Neste trabalho a Modelagem Matemática não surgiu nem como a concepção da Educação Matemática nem como a da Matemática Aplicada como elementos distintos, mas sim como Aplicação Matemática, ou seja, a estratégia de estudar modelos matemáticos clássicos da literatura, neste caso, o modelo de Gompertz e o modelo de Verhulst, utilizando a abordagem qualitativa, através das tecnologias digitais.

Pensamos que isto contribuiu para uma melhor compreensão conceitual, embora ainda que persistam várias das dificuldades relacionadas à aprendizagem deste conteúdo, também cabe destacar que ao propor uma forma de trabalho diversificada da que estão acostumados possa ser algo motivador ao que se trata de ensinar e aprender na Educação Superior.

Acredita-se que indicar novos caminhos para o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias pode ser a expectativa de algum leitor. Talvez esse trabalho traga elementos que possam auxiliar pessoas interessadas no ensino dessa disciplina e assim motiva-los também a elaborarem suas próprias propostas de ensino. Iniciar o curso de EDO com a ideia de Modelagem Matemática/Aplicação, ou seja, iniciar com o estudo de modelos matemáticos clássicos da literatura, explorando-os com o auxílio das TIC, pode trazer mais possibilidades e, talvez assim, conseguir atribuir algum significado para essa disciplina.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. **Equações Diferenciais Ordinárias - Um curso introdutório**. São Paulo: UFABC, 2002.

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia.** São Paulo: Editora Contexto, 2002.

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Qualitativa Segundo a Abordagem Fenomenológica**. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. de. Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferenciais ordinárias. Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, v. 6, n. 2, p. 91-122, 2004.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. Tradução de Horacio Macedo. 6. ed. rev. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

BRASIL. Ministério da Saúde. Instituto Nacional de Câncer José de Alencar Gomes da Silva. Tipos de cânceres. Rio de Janeiro: INCA, acesso em 2018. Disponível em: hhttp://www.inca.gov.br/wps/wcm/connect/tiposdecancer/site/home/mamai.

DOMINGUES, J. S. **Modelo matemático e computacional do surgimento da angiogênese em tumores e sua conexão com as células-tronco.** In. Dissertação de Mestrado - Belo Horizonte - MG. CEFET, 2010.

DOMINGUES, J. S. Análise do modelo de gompertz no crescimento de tumores sólidos e inserção de um fator de tratamento. **Biomatemática IMECC - Unicamp**, Campinas, n. 21, p. 103–112, 2011.

DULLIUS, M. M.; VEIT, E. A.; ARAUJO, I. S. O uso do software Powersim no aprendizado de equações diferenciais. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 36., 2008, São Paulo, SP. **Anais** [...]. São Paulo: EDP, 2008.

FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. **Equações diferenciais aplicadas**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

FINNEY, R. L. **Cálculo de George B. Thomas Jr.** São Paulo, SP: Addison Wesley, 2002.

FROTA, M. C. R.; NASSER, L. **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**. Recife: SBEM, 2009.

HABRE, S. Exploring Students' Strategies to Solve Ordinary Differential Equations in a Reformed Setting. **Journal of Mathematical Behaviour**, 18 (4), p.455–472, 2000.

HABRE, S. Investigating students' approval of a geometrical approach to differential equations and their solutions**. International Journal of Mathematical Educations in Science and Technology**, London, v. 34, n. 5, p. 651 - 662, 2003.

IGLIORI, S. B. C. (2009) **Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais.** In FROTA, M. C. R; NASSER, L. (Orgs.) Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 11 – 26.

STEPHAN, M.; RASMUSSEN, C. Classroom mathematical practices in differential equations. **Journal of Mathematical Behavior**, Norwood, v. 21, n. 4, p. 459-490, 2002.

RASMUSSEN, C. New directions in differential equations A framework for interpreting' understandings difficulties. **Journal of Mathematical Behavior**, Norwood, N.J, v. 20, n. 1, p. 55 - 87, 2001.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. vol..