LÓGICA E POSSIBILIDADES PARA RESPONDER À PERGUNTA: O QUE É MATEMÁTICA?

Maxwell Gonçalves Araújo [1]

RESUMO

Este artigo deriva de uma experiência realizada em sala de aula, no intuito de responder algumas questões pertinentes à utilidade do conhecimento matemático. Ele traz uma sugestão para a Introdução à Reflexão sobre "O que é Matemática", suas aplicações, sua estrutura lógica, sua funcionalidade como linguagem. Começa-se com este questionamento e termina-se com a exploração de um problema, evoluindo de um caso de tentativa e erro para uma forma lógico-combinatória de se resolver determinadas situações-problema. Na análise e elaboração da resolução, faço uma abordagem tanto numérico/operacional básica, como também, exploro conceitos/características de Séries Simples, como é o caso das Progressões Aritméticas, tudo isso sem perder de vista as características investigativas que a matemática nos proporciona, dependendo de como é feita sua abordagem. Como aporte a esta parte, trabalho com algumas ideias sobre Investigação Matemática em Sala de Aula, dos professores de Matemática: João Pedro da Ponte, Joana Brocardo e Hélia Oliveira. Falo, também, sobre: o Obstáculo da linguagem, a estrutura lógica que uma linguagem deve ter, a completude simbólica exigida para se comunicar eficientemente uma ideia, a interpretação dos fatos na Resolução de Problemas, a análise dos dados e suas propriedades e a generalização dos possíveis resultados. Para tanto, dialogarei com os professores: Júlio César de Melo e Sousa (Malba Tahan) e Luiz Carlos Pais, além de uma rápida conversa com o psicólogo, antropólogo e sociólogo Carlos Rodrigues Brandão sobre Educação. Concluo, justificando a álgebra e o valor das generalizações, com um exemplo bem simples: Matemágica, parafraseando Walt Disney.

Palavras-chave: Educação, Matemática, Investigação, Lógica, Possibilidades.

INTRODUÇÃO

Antes de esboçar as ideias iniciais que me levaram a realizar esta experiência, lembro que Malba Tahan, em seu mais famoso livro, já nos deixou uma forma bastante convincente de se responder aos questionamentos, sempre presentes, sobre o conhecimento matemático: O que é e para que serve a Matemática? Em seu livro, Tahan começa sua narrativa falando sobre a inveja, uma das características e um determinado vizir da corte de Al-Motacém chamado Nahum Ibn-Nahum. Ao ver o prestígio de Beremiz (o homem que calculava) crescer perante o califa, Nahum "deliberou embaraçar o meu talentoso amigo e colocá-lo em situação ridícula e falsa. Assim foi que se aproximou do rei e disse-lhe destilando as palavras" (TAHAN, 2001, p. 104-105):

> – Acabo de observar, ó Emir dos Crentes, que o calculista persa, nosso hóspede desta tarde, é exímio na contagem de elementos ou figuras de uma coleção. Contou as quinhentas e tantas palavras escritas na parede do salão,

[1] Doutorando em Educação pela Universidade de Santiago de Compostela - Espanha, mxnte@yahoo.com.br.

> citou dois números amigos, falou da diferença (64 que é cubo e quadrado) e acabou por contar, uma por uma, as franjas dos saiotes das lindas bailarinas. Mal servidos ficaríamos nós se os nossos matemáticos se dispusessem a cuidar de coisas tão pueris, sem utilidade prática de espécie alguma. Realmente! Que nos adianta saber se há, nos versos que nos enlevam, 220 ou 284 palavras e se esses números são amigos ou não? A preocupação de quantos admiram um poeta não é contar as letras dos versos. [...] Tampouco nos interessa saber se no vestido desta bela e graciosa bailarina há 312, 309 ou 1.000 franjas. Tudo isso é ridículo e de mui escasso interesse para os homens de sentimentos que cultivam a Beleza e a Arte.

O vizir encerra seu discurso, nada amistoso, com as ideias que, geralmente, povoam o pensamento daqueles desavisados sobre a origem mais comum da construção científica: o simples prazer em investigar fatos, coerências, características, conjecturas:

> O engenho humano, amparado pela ciência, deve consagrar-se à resolução dos grandes problemas da Vida. Os sábios – inspirados por Allah, o Exaltado – não ergueram o deslumbrante edifício da Matemática para que essa nobre ciência viesse ter a aplicação que lhe quer atribuir o calculista persa. Parece-me, pois, um crime reduzir a ciência de um Euclides, de um Arquimedes ou de um maravilhoso Omar Khayyãm (Alá o tenha em sua glória!) a essa mísera situação de avaliadora numérica de coisa e seres. Interessa-nos, pois, ver esse calculista aplicar as teorias (que diz possuir) na solução de problemas de serventia real, isto é, problemas que se relacionem com as necessidades e os reclamos da vida corrente! (TAHAN, 2001, p. 105)

De certa forma somos, periodicamente, desafiados com afirmações parecidas como essa, induzindo-se ao errôneo pensamento de que a ciência se obriga a justificar toda teoria por meio de sua aplicabilidade imediatamente prática. A isso, o autor respondeu:

> – Os doutores e ulemás, ó Rei dos Árabes, não ignoram que a Matemática surgiu com o despertar da alma humana; mas não surgiu com fins utilitários. Foi a ânsia de resolver o mistério do Universo, diante do qual o homem é simples grão de areia, que lhe deu o primeiro impulso. Seu verdadeiro desenvolvimento resultou, antes de tudo, do esforço em penetrar e compreender o Infinito. E ainda hoje, depois de havermos passado séculos a tentar, em vão, afastar o espesso velário, ainda hoje é à busca do Infinito que nos leva para diante. O progresso material dos homens depende das pesquisas abstratas ou científicas do presente, e será aos homens de ciência que a trabalham para fins puramente científicos, sem nenhum intuito de aplicação de suas doutrinas, que a humanidade ficará devedora em tempos futuros (TAHAN, 2001, p. 106).

A construção do pensamento científico possui, dentre suas características, a sequencialidade do conhecimento, ou seja, uma nova teoria deve ter como aporte uma outra pré-existente. O autor ainda justifica:

> - Quando o matemático efetua seus cálculos, ou procura novas relações entre os números, não busca a verdade para fins utilitários. Cultivar a ciência pela utilidade prática, imediata, é desvirtuar a alma da própria ciência!
> A teoria estudada hoje, e que nos parece inútil, terá aplicações no futuro? [...] É bem possível que as investigações teóricas de hoje forneçam dentro de mil ou dois mil anos, recursos preciosos para a prática.
> É preciso, ainda, não esquecer que a Matemática, além do objetivo de resolver problemas, calcular áreas e medir volumes, tem finalidades muito mais elevadas.
> Por ter alto valor no desenvolvimento da inteligência e do raciocínio, é a Matemática um dos caminhos mais seguros por onde podemos levar o homem a sentir o poder do pensamento, a mágica do espírito (TAHAN, 2001, p. 106-107).

E finaliza suas justificativas, considerando a beleza de se fazer ciência, comparando-a com a elevação do espírito que nos acolhe quando contemplamos a natureza e enxergamos nela a linguagem científica. Este é o objetivo: traduzir o que acontece no mundo em simbologia analítica. A ciência em vida!

> A matemática é, enfim, uma das verdades eternas, e, como tal, produz a elevação do espírito – a mesma elevação que sentimos ao contemplar os grandes espetáculos da Natureza, através dos quais sentimos a presença de Deus, Eterno e Onipotente! Há, pois, ó ilustre vizir Nahum Ibn-Nahum, como já disse, um pequeno erro de vossa parte. Conto os versos de um poema, calculo a altura de uma estrela, avalio o número de franjas, meço a área de um país, ou a força de uma torrente – aplico, enfim, fórmulas algébricas e princípios geométricos – sem me preocupar com os louros que possa tirar de meus cálculos e estudos! Sem o sonho e a fantasia a ciência se abastarda. É ciência morta! (TAHAN, 2001, p. 107)

Para finalizar, o rei que presenciou este diálogo, impressionado com a eloquência de Beremiz, ergueu-lhe a mão direita e disse: “- A teoria do cientista sonhador venceu e vencerá sempre o imediatismo grosseiro do ambicioso sem ideal filosófico!” (TAHAN, 2001, p. 108)

Estes recortes, a meu ver, já justificariam o fato de estudarmos e desenvolvermos ciência. Contudo, apresento aos alunos a justificativa filosófica (esta, brilhantemente escrita pelo professor Júlio César de Melo e Sousa), mas também apresento uma justificativa teórica, voltada aos conhecimentos matemáticos na prática. Apresento um problema matemático comum e o transformamos em objeto investigativo. Começamos avaliando a existência de padrões. Caso sejam identificados, elabora-se conjecturas, as quais serão investigadas. Se encontradas, para sua validade, as mesmas devem ser generalizadas. Vamos ao método.

METODOLOGIA

Segundo a lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, em seu artigo primeiro, “a educação abrange os processos formativos que se desenvolvem na vida familiar, na convivência humana, no trabalho, nas instituições de ensino e pesquisa, nos movimentos sociais e organizações da sociedade civil e nas manifestações culturais”. Ainda, em seu parágrafo segundo, vemos que “a educação escolar deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social” (BRASIL, 1996). Mesmo sendo uma lei recente, considerando, principalmente, a anterior (lei nº 4.024, de 20 de dezembro de 1961), estes princípios me acompanham desde as primeiras aulas ministradas ao Ensino Fundamental II, na época, 5ª. a 8ª. Séries; o ano era o de 1988. Duas perguntas me inquietaram sempre, considerando o que a Educação deve ser: a primeira, a própria: O que é Educação? A segunda: O que é Matemática? Fazendo uma reflexão sobre a primeira, segundo Brandão (1987, p.10):

> [...] A educação pode existir livre e, entre todos, pode ser uma das maneiras que as pessoas criam para tornar *comum*, como saber, como idéia, como crença, aquilo que é *comunitário* como bem, como trabalho ou como vida. [...] A educação é, como outras, uma fração do *modo de vida* dos grupos sociais que a criam e recriam, entre tantas outras invenções de sua cultura, em sua sociedade.

Como arte de criar e recriar, comecei a imaginar como a educação deveria agir sendo intermediária do aprendizado da matemática. Com este princípio, iniciei minha investigação sobre o conceito de matemática e para quê ela serve em termos de trabalho, de vida.

Ao começar a trabalhar com formação de professores nos idos anos 90, comecei a notar uma certa dificuldade em justificar o conhecimento matemático. Para quê isto vai servir em minha vida professor? Esta pergunta, no início atribuída aos alunos do ensino básico, também era insistente no ambiente acadêmico. A necessidade do *porque* traz consigo o *para que* e *o que* devemos ensinar. Pensando nisso, uma forma que encontrei de iniciar estas discussões com os futuros professores foi a seguinte:

Primeiramente a pergunta: O que é Matemática? Nesse momento, considero a matemática como uma linguagem utilizada para expressar, representar e solucionar problemas que envolvam cálculos. Como linguagem, ela não pode, apenas, ser expressa simbolicamente. Deve carregar em sua essência uma lógica, no mínimo, organizacional para uma comunicação efetiva de suas ideias. Um exemplo é a seguinte sequência: **25,R 90$180**. O que este grupamento de símbolos quer dizer? Qual a ideia comunicada? Não sabemos exatamente não é mesmo? Isso porque está faltando lógica em sua organização. Quando utilizamos os mesmos símbolos da seguinte forma: **R$ 25981,00** agora sim, temos a exata ideia do que estamos falando. Este é um primeiro obstáculo enfrentado na aprendizagem da matemática, o obstáculo da linguagem. Além desta perspectiva, ainda temos a questão dos significados. “É o caso de um aluno afirmou que o quadrado não tinha nenhuma propriedade, pois o sentido atribuído por ele à palavra *propriedade* seria uma casa, um terreno ou uma moto, tal como as pessoas se expressam no contexto de sua vida familiar" (PAIS, 2006, p. 77-78).

Esta característica matemática se evidencia quando comparada com nossa língua materna. Existe um quebra-cabeça linguístico que ilustra esta aproximação lógica, significativa e complementar entre as linguagens. A palavra complementar, nesse caso, se refere à falta de algum símbolo em sua comunicação. Não basta, apenas, a lógica. A simbologia deve estar completa. Vamos ao quebra-cabeça: no recorte "MARIA TOMA BANHO PORQUE SUA MÃE DISSE ELA TRAGA-ME A TOALHA", qual a mensagem a ser transmitida? Existe lógica na ordenação dos símbolos, porém parece que falta alguma coisa não é mesmo? E falta sim: faltam duas vírgulas e um ponto, sem os quais, dificilmente concluímos a verdadeira mensagem a que se refere o recorte. A solução deixa clara a complexidade dos significados. Muitos não conseguem resolver este quebra-cabeça devido a esta propriedade linguística, dificultada ainda mais pela riqueza de significados que algumas palavras têm em nossa língua portuguesa. A dificuldade reside na análise da palavra "SUA". Aqui, ela não é um pronome possessivo e sim um verbo. Logo, teremos:

MARIA TOMA BANHO PORQUE SUA. MÃE, DISSE ELA, TRAGA-ME A TOALHA.

O Segundo Passo é mostrar que a Matemática é uma linguagem que trabalha com a Lógica e com as Possibilidades. Para tanto, utilizamos o exemplo da resolução do Quadrado Mágico 3 x 3. Para quem não conhece, o Quadrado Mágico é um quebra-cabeça onde são disponibilizados números distintos cuja soma na vertical, na horizontal e na diagonal é sempre a mesma. No caso do 3 x 3 clássico, os números a serem utilizados são os de 1 a 9 e a soma constante (na vertical, na horizontal e na diagonal) é 15. Num primeiro contato, o método utilizado para se resolver este tipo de passatempo é o método da tentativa e erro. Distribui-se, aleatoriamente, os números no quadrado e começa a torcida para que as regras sejam atendidas como num passe de mágica. Porém, podemos resolver este problema de uma forma Lógica, verificando as Possibilidades de solução. Para ilustrarmos o problema, trabalhamos com o seguinte quadrado:

O problema: Considerando o Quadrado Mágico 3 x 3 acima, preenche-lo com os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9, de forma que as somas na horizontal, vertical e diagonal sejam sempre 15. O problema pode ser redefinido da seguinte forma: com os números de 1 a 9, encontrar as adições possíveis, com três parcelas distintas, cuja soma seja sempre 15. As possibilidades estão representadas na tabela a seguir:

1 + 9 + 5	3 + 7 + 5	1 + 8 + 6	3 + 8 + 4
2 + 8 + 5	4 + 6 + 5	2 + 7 + 6	4 + 9 + 2

A Lógica está nas propriedades do problema:

1ª. lógica) Temos oito Adições necessárias (três na vertical, três na horizontal e duas na diagonal). Logo, termos oito adições possíveis. Ao encontra-las, podemos encerrar esta fase da solução;

2ª. lógica) Temos três tipos de parcelas dentre as adições possíveis: as que estarão nas “casas dos cantos”; as que estarão nos “meios laterais” e a situada no centro do quadrado. Esta última, deverá aparecer em quatro adições possíveis (uma vertical, uma horizontal e duas diagonais); as parcelas dos “meios laterais”, aparecem em duas adições possíveis (uma vertical e uma horizontal) e as parcelas “dos cantos”, aparecem em três adições (uma vertical, uma diagonal e uma horizontal). As Possibilidades estão ilustradas na tabela a seguir:

Casas	Parcelas
“dos cantos”	2, 4, 6, 8
Centro	5
“meios laterais”	1, 3, 7, 9

Considerando a Lógica e as Possibilidades para preencher o quadrado, temos:

2	**7**	**6**
9	**5**	**1**
4	**3**	**8**

A solução do problema já está determinada, porém, com estes critérios de resolução, concluímos algo bastante interessante no final da análise do problema.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Se a sequência de números for em uma mesma razão, o raciocínio não muda, tanto em relação à quantidade de adições possíveis, quanto aos critérios de preenchimento do quadrado. Para ilustrar, podemos considerar agora os números: 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28 e 29. As adições possíveis estão ilustradas na seguinte tabela:

21 + 29 + 25	21 + 28 + 26
22 + 28 + 25	22 + 27 + 26
23 + 27 + 25	22 + 29 + 24
24 + 26 + 25	23 + 28 + 24

As Possibilidades estão ilustradas na tabela a seguir:

Casas	Parcelas
“dos cantos”	22, 24, 26, 28

Centro	25
“meios laterais”	21, 23, 27, 29

Considerando a Lógica e as Possibilidades para preencher o quadrado, temos:

22	**27**	**26**
29	**25**	**21**
24	**23**	**28**

A soma constante, nesse caso, passa a ser 75. Estas Lógicas nos levam ao desfecho interessante deste quebra-cabeça. Como o método é válido para toda sequência numérica com razão constante, serve para qualquer Progressão Aritmética com nove termos. Assim, se considerarmos a Sequência: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 e 27, teremos:

6	**21**	**18**
27	**15**	**3**
12	**9**	**24**

a) Se a razão é constante, o número de adições e as possibilidades permanecem as mesmas e

b) Sendo assim, as respostas possíveis também serão as mesmas (considerando que podemos rotacionar ou inverter a posição dos números) e, então, o posicionamento dos números também serão os mesmos. Logo, para toda Progressão Aritmética, vale o seguinte quadro comparativo (veja que independe dos números e da razão, desde que esta seja a mesma em toda a Sequência Numérica):

	Posicionamento								
Números Iniciais	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Sequência 02	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Sequência 03	3	6	9	12	15	18	21	24	27
Sequência 04 (Extra)	103	106	109	112	115	118	121	124	127
Sequência 05 (Extra)	52	56	60	64	68	72	76	80	84

Considerando os posicionamentos para preencher o Quadrado, basta compararmos com o Quadrado Mágico inicial. Assim, teremos as seguintes soluções:

106	**121**	**118**
127	**115**	**103**
112	**109**	**124**

56	**76**	**72**
84	**68**	**52**
64	**60**	**80**

No primeiro Quadrado, a soma constante é 345 e no segundo, a soma é 204.

Então, se devemos, no final, apenas comparar com a solução inicial, podemos concluir que:

a) As somas dos termos da Progressão Aritmética são sempre constantes. De fato, a solução sempre será do tipo:

A_2	A_7	A_6
A_9	A_5	A_1
A_4	A_3	A_8

Logo, considerando as oito possibilidades de adição possíveis (três na horizontal, três na vertical e duas na diagonal), temos que (Lembre-se que: na Progressão Aritmética, todo termo será do tipo: $\mathbf{A_n = A_1 + (n - 1).\ r}$):

$$A_2 + A_7 + A_6 = A_2 + A_5 + A_8 = A_2 + A_9 + A_4 = \ldots \rightarrow A_1 + r + A_1 + 6r + A_1 + 5r = \boxed{3.A_1 + 12.\ r}$$

Onde o índice indica a posição do número na Progressão Aritmética e o r indica a razão da progressão. Assim, A_2 refere-se ao segundo termo da sequência e a razão é a diferença entre os termos. No caso da sequência: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 e 27, a razão “r” será 3;

b) A Soma constante (S_c) será igual a 3. A_1 +12. r, ou seja:

$$\mathbf{S_c = 3.\ A_1 + 12.r = 3.(A_1 + 4.r) = 3.A_5.}$$

Então, para sabermos a Soma constante, basta multiplicarmos o quinto termo da Progressão por 3. Como exemplo, seja a sequência 4106, 4112, 4118, 4124, 4130, 4136, 4142, 4148 e 4154. Qual será a solução e qual será a soma constante? A Soma constante será: Sc = 3 . 4130 = 12390. A solução será:

4112	**4142**	**4136**
4154	**4130**	**4106**
4124	**4118**	**4148**

O exemplo do Quadrado-Mágico 3 x 3, mostrou uma boa aplicação prática do tabalho com sequências numéricas. É uma teoria que envolve,à primeira vista, termos e suas posições na sequência. Se esta última for fixa e considerando particularidades próprias, a Sequência recebe nomes especiais, identificando sua principal característica. Em nosso caso, trabalhamos com Progressões Aritméticas, onde a diferença entre seus termos é sempre a mesma. Porém, podemos nos deparar, também, com casos que levam em consideração, apenas, os elementos e suas posições. É o caso de uma "mágica" matemática antiga, onde a "adivinhação" funciona da seguinte forma:

De um baralho completo, ou seja, com 52 cartas, considere 27 delas. Peça alguém para escolher qualquer uma das cartas e, sem você olhar, coloque-a no baralho novamente e embaralhe quantas vezes quiser. Desta vez, faça três montes ou colunas de cartas, na mesma sequência, e peça que a pessoa diga em qual monte a carta escolhida está. Ao identificar o monte, recolha cada monte ou coluna, mantendo a sequência das cartas, colocando o monte identificado no meio dos outros dois. Repita o processo três vezes. Da quarta vez em diante, a carta "secreta" será a 14ª. carta distribuída, ou seja, será a quinta carta do monte ou coluna do meio. É claro que a pessoa que escolheu a carta não pode saber deste detalhe final. Essa é a "mágica" que faz você "adivinhar" a carta escolhida. Vamos à Lógica e às Possibilidades:

Seja a Sequência aleatória de cartas: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16}, A_{17}, A_{18}, A_{19}, A_{20}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{24}, A_{25}, A_{26}, A_{27}. Suponhamos que a carta escolhida esteja na posição A_4. Assim, na primeira distribuição de cartas, teremos as seguintes possibilidades de montes ou colunas:

Coluna ou Monte 01	**Coluna ou Monte 02**	**Coluna ou Monte 03**
A_1	A_2	A_3
A_4	A_5	A_6
A_7	A_8	A_9
A_{10}	A_{11}	A_{12}
A_{13}	A_{14}	A_{15}
A_{16}	A_{17}	A_{18}
A_{19}	A_{20}	A_{21}
A_{22}	A_{23}	A_{24}
A_{25}	A_{26}	A_{27}

Veja que, nesse primeiro momento, a carta se encontra na primeira coluna ou primeiro monte. Temos duas possibilidades de juntar as cartas novamente, lembrando que, a coluna onde se encontra a carta, deve vir no meio. Assim, teremos:

Possibilidade de Sequência 01

A_2, A_5, A_8, A_{11}, A_{14}, A_{17}, A_{20}, A_{23}, A_{26}, A_1, $\mathbf{A_4}$, A_7, A_{10}, A_{13}, A_{16}, A_{19}, A_{22}, A_{25}, A_3, A_6, A_9, A_{12}, A_{15}, A_{18}, A_{21}, A_{24}, A_{27}, ou:

Possibilidade de Sequência 02

A_3, A_6, A_9, A_{12}, A_{15}, A_{18}, A_{21}, A_{24}, A_{27}, A_1, $\mathbf{A_4}$, A_7, A_{10}, A_{13}, A_{16}, A_{19}, A_{22}, A_{25}, A_2, A_5, A_8, A_{11}, A_{14}, A_{17}, A_{20}, A_{23}, A_{26}.

Observe que o A_4 escolhido ocupa a mesma posição nas duas possibilidades, ou seja, a 11ª. posição na nova sequência. Distribuindo-se, novamente, as cartas, teremos:

Possibilidade de Sequência 01

Coluna ou Monte 01	Coluna ou Monte 02	Coluna ou Monte 03
A_2	A_5	A_8
A_{11}	A_{14}	A_{17}
A_{20}	A_{23}	A_{26}
A_1	$\mathbf{A_4}$	A_7
A_{10}	A_{13}	A_{16}
A_{19}	A_{22}	A_{25}
A_3	A_6	A_9
A_{12}	A_{15}	A_{18}
A_{21}	A_{24}	A_{27}

Possibilidade de Sequência 02

Coluna ou Monte 01	Coluna ou Monte 02	Coluna ou Monte 03
A_3	A_6	A_9
A_{12}	A_{15}	A_{18}
A_{21}	A_{24}	A_{27}
A_1	$\mathbf{A_4}$	A_7
A_{10}	A_{13}	A_{16}
A_{19}	A_{22}	A_{25}
A_2	A_5	A_8
A_{11}	A_{14}	A_{17}
A_{20}	A_{23}	A_{26}

Veja que, nesse segundo momento, a carta se encontra na segunda coluna ou segundo monte. Temos duas possibilidades de juntar as cartas novamente. Assim, teremos:

Possibilidade de Sequência 01

A_2, A_{11}, A_{20}, A_1, A_{10}, A_{19}, A_3, A_{12}, A_{21}, A_5, A_{14}, A_{23}, **A_4**, A_{13}, A_{22}, A_6, A_{15}, A_{24}, A_8, A_{17}, A_{26}, A_7, A_{16}, A_{25}, A_9, A_{18}, A_{27}, ou:

A_8, A_{17}, A_{26}, A_7, A_{16}, A_{25}, A_9, A_{18}, A_{27}, A_5, A_{14}, A_{23}, **A_4**, A_{13}, A_{22}, A_6, A_{15}, A_{24}, A_2, A_{11}, A_{20}, A_1, A_{10}, A_{19}, A_3, A_{12}, A_{21}.

Possibilidade de Sequência 02

A_3, A_{12}, A_{21}, A_1, A_{10}, A_{19}, A_2, A_{11}, A_{20}, A_6, A_{15}, A_{24}, **A_4**, A_{13}, A_{22}, A_5, A_{14}, A_{23}, A_9, A_{18}, A_{27}, A_7, A_{16}, A_{25}, A_8, A_{17}, A_{26}, ou:

A_9, A_{18}, A_{27}, A_7, A_{16}, A_{25}, A_8, A_{17}, A_{26}, A_6, A_{15}, A_{24}, **A_4**, A_{13}, A_{22}, A_5, A_{14}, A_{23}, A_3, A_{12}, A_{21}, A_1, A_{10}, A_{19}, A_2, A_{11}, A_{20}.

Repare que o A_4 escolhido ocupa as mesmas posições nas quatro possibilidades, ou seja, a 13ª. posição nas novas sequências. Distribuindo-se, novamente, as cartas, teremos:

Possibilidade de Sequência 01

Coluna ou Monte 01	Coluna ou Monte 02	Coluna ou Monte 03
A_2	A_{11}	A_{20}
A_1	A_{10}	A_{19}
A_3	A_{12}	A_{21}
A_5	A_{14}	A_{23}
A_4	A_{13}	A_{22}
A_6	A_{15}	A_{24}
A_8	A_{17}	A_{26}
A_7	A_{16}	A_{25}
A_9	A_{18}	A_{27}

Coluna ou Monte 01	Coluna ou Monte 02	Coluna ou Monte 03
A_8	A_{17}	A_{26}
A_7	A_{16}	A_{25}
A_9	A_{18}	A_{27}
A_5	A_{14}	A_{23}
A_4	A_{13}	A_{22}
A_6	A_{15}	A_{24}
A_2	A_{11}	A_{20}
A_1	A_{10}	A_{19}
A_3	A_{12}	A_{21}

Possibilidade de Sequência 02

Coluna ou Monte 01	Coluna ou Monte 02	Coluna ou Monte 03
A_3	A_{12}	A_{21}
A_1	A_{10}	A_{19}
A_2	A_{11}	A_{20}
A_6	A_{15}	A_{24}
$\mathbf{A_4}$	A_{13}	A_{22}
A_5	A_{14}	A_{23}
A_9	A_{18}	A_{27}
A_7	A_{16}	A_{25}
A_8	A_{17}	A_{26}

Coluna ou Monte 01	Coluna ou Monte 02	Coluna ou Monte 03
A_9	A_{18}	A_{27}
A_7	A_{16}	A_{25}
A_8	A_{17}	A_{26}
A_6	A_{15}	A_{24}
$\mathbf{A_4}$	A_{13}	A_{22}
A_5	A_{14}	A_{23}
A_3	A_{12}	A_{21}
A_1	A_{10}	A_{19}
A_2	A_{11}	A_{20}

Veja que, nesse terceiro momento, a carta se encontra na primeira coluna ou primeiro monte. Temos oito possibilidades de juntar as cartas novamente. Assim, teremos:

Possibilidade de Sequência 01

A_{11}, A_{10}, A_{12}, A_{14}, A_{13}, A_{15}, A_{17}, A_{16}, A_{18}, A_2, A_1, A_3, A_5, $\mathbf{A_4}$, A_6, A_8, A_7, A_9, A_{20}, A_{19}, A_{21}, A_{23}, A_{22}, A_{24}, A_{26}, A_{25}, A_{27}, ou:

A_{20}, A_{19}, A_{21}, A_{23}, A_{22}, A_{24}, A_{26}, A_{25}, A_{27}, A_2, A_1, A_3, A_5, $\mathbf{A_4}$, A_6, A_8, A_7, A_9, A_{11}, A_{10}, A_{12}, A_{14}, A_{13}, A_{15}, A_{17}, A_{16}, A_{18}, ou:

A_{17}, A_{16}, A_{18}, A_{14}, A_{13}, A_{15}, A_{11}, A_{10}, A_{12}, A_8, A_7, A_9, A_5, $\mathbf{A_4}$, A_6, A_2, A_1, A_3, A_{26}, A_{25}, A_{27}, A_{23}, A_{22}, A_{24}, A_{20}, A_{19}, A_{21}, ou:

A_{26}, A_{25}, A_{27}, A_{23}, A_{22}, A_{24}, A_{20}, A_{19}, A_{21}, A_8, A_7, A_9, A_5, $\mathbf{A_4}$, A_6, A_2, A_1, A_3, A_{17}, A_{16}, A_{18}, A_{14}, A_{13}, A_{15}, A_{11}, A_{10}, A_{12}.

Possibilidade de Sequência 02

A_{12}, A_{10}, A_{11}, A_{15}, A_{13}, A_{14}, A_{18}, A_{16}, A_{17}, A_3, A_1, A_2, A_6, $\mathbf{A_4}$, A_5, A_9, A_7, A_8, A_{21}, A_{19}, A_{20}, A_{24}, A_{22}, A_{23}, A_{27}, A_{25}, A_{26}, ou:

A_{21}, A_{19}, A_{20}, A_{24}, A_{22}, A_{23}, A_{27}, A_{25}, A_{26}, A_3, A_1, A_2, A_6, $\mathbf{A_4}$, A_5, A_9, A_7, A_8, A_{12}, A_{10}, A_{11}, A_{15}, A_{13}, A_{14}, A_{18}, A_{16}, A_{17}, ou:

A_{18}, A_{16}, A_{17}, A_{15}, A_{13}, A_{14}, A_{12}, A_{10}, A_{11}, A_9, A_7, A_8, A_6, $\mathbf{A_4}$, A_5, A_3, A_1, A_2, A_{27}, A_{25}, A_{26}, A_{24}, A_{22}, A_{23}, A_{21}, A_{19}, A_{20}, ou:

A_{27}, A_{25}, A_{26}, A_{24}, A_{22}, A_{23}, A_{21}, A_{19}, A_{20}, A_9, A_7, A_8, A_6, $\mathbf{A_4}$, A_5, A_3, A_1, A_2, A_{18}, A_{16}, A_{17}, A_{15}, A_{13}, A_{14}, A_{12}, A_{10}, A_{11}.

Desta vez, o A_4 escolhido ocupa a mesma posição nas oito possibilidades, ou seja, a 14ª. posição nas novas sequências. Distribuindo-se, novamente, as cartas, teremos:

Uma das Possibilidades de Sequência 01

Coluna ou Monte 01	Coluna ou Monte 02	Coluna ou Monte 03
A_{11}	A_{10}	A_{12}
A_{14}	A_{13}	A_{15}
A_{17}	A_{16}	A_{18}
A_2	A_1	A_3
A_5	$\mathbf{A_4}$	A_6
A_8	A_7	A_9
A_{20}	A_{19}	A_{21}
A_{23}	A_{22}	A_{24}
A_{26}	A_{25}	A_{27}

Uma das Possibilidades de Sequência 02

Coluna ou Monte 01	Coluna ou Monte 02	Coluna ou Monte 03
A_{12}	A_{10}	A_{11}
A_{15}	A_{13}	A_{14}
A_{18}	A_{16}	A_{17}
A_3	A_1	A_2
A_6	$\mathbf{A_4}$	A_5
A_9	A_7	A_8
A_{21}	A_{19}	A_{20}
A_{24}	A_{22}	A_{23}
A_{27}	A_{25}	A_{26}

Por indução, podemos imaginar qual será a posição, agora, da carta escolhida, em todas as oito possibilidades: a 14ª. Posição. Para verificarmos isso, consideremos as duas possibilidades de cada tabela anterior, onde teremos:

A_{11}, A_{14}, A_{17}, A_2, A_5, A_8, A_{20}, A_{23}, A_{26}, A_{10}, A_{13}, A_{16}, A_1, $\mathbf{A_4}$, A_7, A_{19}, A_{22}, A_{25}, A_{12}, A_{15}, A_{18}, A_3, A_6, A_9, A_{21}, A_{24}, A_{27}, ou:

A_{12}, A_{15}, A_{18}, A_3, A_6, A_9, A_{21}, A_{24}, A_{27}, A_{10}, A_{13}, A_{16}, A_1, $\mathbf{A_4}$, A_7, A_{19}, A_{22}, A_{25}, A_{11}, A_{14}, A_{17}, A_2, A_5, A_8, A_{20}, A_{23}, A_{26}, ou:

A_{12}, A_{15}, A_{18}, A_3, A_6, A_9, A_{21}, A_{24}, A_{27}, A_{10}, A_{13}, A_{16}, A_1, $\mathbf{A_4}$, A_7, A_{19}, A_{22}, A_{25}, A_{11}, A_{14}, A_{17}, A_2, A_5, A_8, A_{20}, A_{23}, A_{26}, ou:

A_{11}, A_{14}, A_{17}, A_2, A_5, A_8, A_{20}, A_{23}, A_{26}, A_{10}, A_{13}, A_{16}, A_1, $\mathbf{A_4}$, A_7, A_{19}, A_{22}, A_{25}, A_{12}, A_{15}, A_{18}, A_3, A_6, A_9, A_{21}, A_{24}, A_{27}.

A partir desse momento, esta carta ocupará sempre esta posição. Isso fica claro quando verificamos que as Sequências se repetem duas a duas. De fato:

Coluna ou Monte 01	**Coluna ou Monte 02**	**Coluna ou Monte 03**
A_{11}	A_{14}	A_{17}
A_2	A_5	A_8
A_{20}	A_{23}	A_{26}
A_{10}	A_{13}	A_{16}
A_1	$\mathbf{A_4}$	A_7
A_{19}	A_{22}	A_{25}
A_{12}	A_{15}	A_{18}
A_3	A_6	A_9
A_{21}	A_{24}	A_{27}

Coluna ou Monte 01	**Coluna ou Monte 02**	**Coluna ou Monte 03**
A_{12}	A_{15}	A_{18}
A_3	A_6	A_9
A_{21}	A_{24}	A_{27}
A_{10}	A_{13}	A_{16}
A_1	$\mathbf{A_4}$	A_7
A_{19}	A_{22}	A_{25}
A_{11}	A_{14}	A_{17}
A_2	A_5	A_8
A_{20}	A_{23}	A_{26}

Organizando as sequências possíveis, temos:

A_{11}, A_2, A_{20}, A_{10}, A_1, A_{19}, A_{12}, A_3, A_{21}, A_{14}, A_5, A_{23}, A_{13}, $\mathbf{A_4}$, A_{22}, A_{15}, A_6, A_{24}, A_{17}, A_8, A_{26}, A_{16}, A_7, A_{25}, A_{18}, A_9, A_{27}, ou:

A_{17}, A_8, A_{26}, A_{16}, A_7, A_{25}, A_{18}, A_9, A_{27}, A_{14}, A_5, A_{23}, A_{13}, $\mathbf{A_4}$, A_{22}, A_{15}, A_6, A_{24}, A_{11}, A_2, A_{20}, A_{10}, A_1, A_{19}, A_{12}, A_3, A_{21}, ou:

A_{12}, A_3, A_{21}, A_{10}, A_1, A_{19}, A_{11}, A_2, A_{20}, A_{15}, A_6, A_{24}, A_{13}, $\mathbf{A_4}$, A_{22}, A_{14}, A_5, A_{23}, A_{18}, A_9, A_{27}, A_{16}, A_7, A_{25}, A_{17}, A_8, A_{26}, ou:

A_{18}, A_9, A_{27}, A_{16}, A_7, A_{25}, A_{17}, A_8, A_{26}, A_{15}, A_6, A_{24}, A_{13}, $\mathbf{A_4}$, A_{22}, A_{14}, A_5, A_{23}, A_{12}, A_3, A_{21}, A_{10}, A_1, A_{19}, A_{11}, A_2, A_{20}.

Novamente temos a 14ª. posição, como queríamos verificar.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A escolha do passatempo "Quadrado-mágico" não foi aleatória. A base de sua solução está concentrada nas operações fundamentais, consideradas o princípio da abstração e assimilação do conhecimento matemático. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 55),

> O conceito de número ocupa um lugar de destaque na Matemática escolar. Desenvolver o sentido do número, ou seja, adquirir uma compreensão global dos números e das operações e usá-la de modo flexível para analisar situações e desenvolver estratégias úteis para lidar com os números e as operações é um objetivo central da aprendizagem da Matemática. As investigações numéricas contribuem, de modo decisivo, para desenvolver essa compreensão global dos números e operações, bem como capacidades matemáticas importantes como a formulação e teste de conjecturas e a procura de generalizações. Os alunos podem realizar pequenas investigações que conduzem à descoberta de fatos, propriedades e relações entre conjuntos de números. Podem investigar aspectos relacionados com as dízimas, os divisores ou os múltiplos de diferentes números. Podem, ainda, explorar sequências numéricas, descobrindo relações numéricas e apreendendo progressivamente a ideia de variável. Podem, também, estabelecer conexões entre os números e a Geometria.

Ainda segundo os mesmoss autores, "para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades" (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2013, p. 13). Estas considerações levaram-me a procurar um ponto de partida elementar mas, ao mesmo tempo, que exigisse um raciocínio Lógico e uma Percepção matemática um pouco mais robusta. Trabalhando com formação de professores, procuro considerar situações visualmente triviais, porém, com certa elegância de raciocínio. Problemas com estas caracterírsticas corroboram com o desenvovimento da criatividade, da autonomia, da análise, do olhar generalizante. Estes requisitos estão em falta, em sua grande maioria, na formação atual dos novos docentes da área de Matemática.

Contudo, não podemos deixar de considerar as observações de Pais (2006, p. 13), quando dizem que:

> Os argumentos usados para defender a existência da Matemática escolar são vários. Da educação infantil ao ensino médio, essa disciplina tem sido considerada capaz de contribuir na formação intelectual do aluno. Entretanto, esse argumento, por si mesmo, não traz nenhuma garantia de realização dos objetivos previstos. Há uma grande distância entre o que pode ser realizado em termos de objetivos e a efetiva realização do possível. A superação dessa distância certamente depende de muitas variáveis: formação de professores, redefinição de métodos, expansão dos atuais campos de pesquisa, criação e diversificação de estratégias, incorporação do uso qualitativo das tecnologias digitais e, ainda de uma boa dose de disponibilidade para revirar concepções enrijecidas pelo tempo.

Logo, planejar, diversificar, contextualizar, exemplificar, explorar, ainda continuam fazendo muito diferença na hora de se tentar ensinar, pois, este verbo, há muito, deixou de ser, apenas, repassar conhecimento, transmitir, instruir. “A natureza do homem, na sua dupla estrutura corpórea e espiritual, cria condições especiais para a manutenção e transmissão da sua forma particular e exige organizações físicas e espirituais, ao conjunto das quais damos o nome de educação” (BRANDÃO, 1987, p.14). Hoje, para tanto, [...] “os alunos precisam saber interpretar criticamente o modo como os números são usados na vida de todos os dias e a escola deve procurar desenvolver esse tipo de competência” (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2013, p. 70). Afinal, formar para vida requer mais do que repetir, imitar, seguir algoritmos, manipular processos. Exige criticidade, criatividade, autonomia, perspectivas, lógica em suas diversas possibilidades.

REFERÊNCIAS

BRANDÃO, Carlos Rodrigues. *Educação? Educações:* aprender com o índio. In: BRANDÃO, Carlos Rodrigues. *O que é educação?* 19 ed. São Paulo: Brasiliense, 1987. p. 7-12.

BRANDÃO, Carlos Rodrigues. *Quando a escola é a aldeia.* In: BRANDÃO, Carlos Rodrigues. *O que é educação?* 19 ed. São Paulo: Brasiliense, 1987. p. 13-26.

BRASIL. *Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.* Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L9394.htm#art92. Acesso em: 09 Ago. 2019.

PAIS, Luiz Carlos. *Por que ensinar matemática.* In: PAIS, Luiz Carlos. *Ensinar e aprender matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 13-23.

PAIS, Luiz Carlos. *Representação, linguagem e obstáculos.* In: PAIS, Luiz Carlos. *Ensinar e aprender matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 69-79.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigar em matemática.* In: PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações Matemáticas em sala de aula.* 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013. p. 13-24.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações numéricas.* In: PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações Matemáticas em sala de aula.* 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013. p. 55-70.

TAHAN, Malba. *Narra o que se passou no divã real. Os músicos e as bailarinas gêmeas. Como Beremiz identificou Iclímia e Tabessã. Surge um vizir invejoso que critica Beremiz. O elogio dos teóricos e sonhadores, feito por Beremiz. O rei proclama a vitória da Teoria sobre o imediatismo grosseiro.* In: TAHAN, Malba. *O homem que calculava.* Rio de Janeiro: Record, 2001. p. 101-108.