

A TORRE DE HANÓI: CONTEXTO E APLICAÇÕES

Autora: Josilene Maria de Lima Torres (1); Co-autora: Josenilda Maria de Lima Abreu(2)

Faculdade do Belo Jardim – FBJ; josilenetorres@yahoo.com.br

RESUMO :Os conhecimentos básicos de matemática são essenciais para que o cidadão possa, num mundo cada vez mais complexo tomar decisões conscientes, independentes e criativas com uma educação que possibilite uma ação coletiva de construção do saber em seu sentido mais amplo, ao lado de uma consciência crítica na produção e utilização deste saber. Estudos apontam que o jogo da torre de Hanói pode desenvolver o raciocínio lógico resultando em uma função exponencial, sendo composto por uma base com três hastes e sete discos de tamanhos e cores diferentes, inicialmente os discos formam uma torre onde todos são colocados em um dos pinos de modo que cada movimento é feito somente com um disco, nunca havendo um disco maior sobre um disco menor. Através deste trabalho buscou-se verificar como a Torre de Hanói pode facilitar na compreensão do conteúdo de função exponencial, para tanto foi utilizada como base a pesquisa em livros, internet, revistas, entre outros e ainda uma pesquisa com alunos do 2º ano do Ensino Médio e Normal Médio tendo a finalidade de saber seu gosto por jogos e quais seus professores utilizaram. Após estas observações realizou-se uma oficina onde foi possível perceber que as turmas em sua grande maioria não conheciam o jogo, mas seguindo as regras conseguiram atingir os objetivos esperados. Neste contexto foram apresentadas algumas observações sistemáticas e argumentativas com relação à Torre de Hanói na proposta do ensino visando o desenvolvimento do raciocínio e do conteúdo de função exponencial.

Palavras-chave: Torre de Hanói, matemática, função exponencial.

INTRODUÇÃO

Os jogos tem sido ultimamente foco de estudos de vários teóricos, visto que seu uso, sendo bem planejado, pode favorecer o ensino e a aprendizagem. É importante destacar que os jogos matemáticos são utilizados pelos professores em sala de aula há certo tempo.

De acordo com Dell’Agli (2002, p. 48) “As pesquisas, de maneira geral, tem procurado fazer uma relação dos jogos com o desenvolvimento cognitivo e/ou buscar por

meio deles melhorar a aprendizagem de conteúdos escolares.”, fato que reforça a necessidade de estudos voltados para esta temática.

O jogo pode ser utilizado para favorecer a aquisição do conhecimento matemático em varias circunstancias: para introduzir um conteúdo novo, para amadurecer um conteúdo em andamento ou para concluí-lo. O jogo não deve ser usado apenas como jogo, isto é, como uma atividade lúdica, ele deve ser acompanhado de reflexões, indagações que o professor possa propor aos seus alunos e ter um objetivo. Nesse sentido, Macedo (2000) defende que “... é adotar uma metodologia de ensino que considere o aluno com um ser que pensa e que pode aprender qualquer matéria desde que o conteúdo trabalhado tenha algum significado ou possa remetê-lo a algo já conhecido.” (MACEDO, 2000, p. 33).

Neste contexto destacamos a Torre de Hanói por sua riqueza no desenvolvimento do raciocínio, trabalhando a lógica espacial e dedutiva do aluno, tendo o jogador que transferir todas as peças da torre para uma das outras duas posições do tabuleiro com menor número de movimentações possíveis e dentro de regras para a movimentação das peças, ainda defendemos o uso da Torre de Hanói no conteúdo de função exponencial ao qual ela se adapta consideravelmente.

A torre de Hanói é um exemplo clássico de estudo de recursividade, servindo também como um jogo educativo para o desenvolvimento do raciocínio. É um jogo originário do Vietnã que pode ser trabalhado com alunos de 10 anos até adultos, é de domínio público e conhecido internacionalmente.

As atividades e práticas propostas, além de adequadas aos objetivos, devem incentivar o trabalho em equipe, estimular a prática da observação, da investigação, da análise, da síntese, da generalização, e possibilitar o desenvolvimento da criatividade e do senso crítico. Desta forma a pesquisa tem como objetivo principal verificar se os alunos conhecem a torre de Hanói e sua relação com a função exponencial, e especificamente analisar como os alunos concebem o uso de jogos em sala de aula, investigar a pratica dos seus professores e observar a aprendizagem à partir deste jogo. No intuito de analisar a utilização da torre de Hanói foi tomado como base metodológica a pesquisa exploratória, envolvendo oficinas, observações e questionários.

Esta pesquisa parte do pressuposto que a torre de Hanói vem desmistificar o processo ensino aprendizagem de uma forma motivadora e atrativa criando no aluno o desejo de seguir as regras e chegar ao objetivo proposto entendendo seu processo e a sua relação matemática com a função exponencial.

METODOLOGIA

A pesquisa se configurou como de campo, de cunho qualitativo. Em conformidade com Rodrigues (2006) e Severino (2007), uma pesquisa de campo é a aquela que se realiza a partir da coleta de dados no local próprio de ocorrência do fenômeno, sem que haja necessidade de manuseio ou interferência por parte do pesquisador. A abordagem utilizada se assinalou como qualitativa, partindo do princípio da reflexão e análise da realidade observada pelo pesquisador através de técnicas que facilitem na compreensão do objeto estudado (c.f. OLIVEIRA, 2008).

Após estudos realizados em torno da necessidade do trabalho com jogos em sala de aula foi desenvolvida uma pesquisa nas turmas do 2º Ano do Ensino Médio e Normal Médio em uma escola estadual na cidade de Belo Jardim - PE, objetivando saber se os alunos gostavam de jogos e em que séries seus professores utilizaram os mesmos. Foram confeccionadas quatorze (14) Torres de Hanói com sete discos cada uma para efetivação de oficinas nas mesmas turmas pesquisadas.

Ao realizar as oficinas, primeiro mostrou-se a Torre de Hanói aos alunos com discussões acerca da sua história e as regras do jogo induzindo que os alunos pudessem perceber como deveriam agir para realizar as transferências dos discos conforme se aumentava a quantidade dos mesmos.

Logo após, foi aplicado o jogo e quando os alunos começaram a interagir lançou-se a proposta da construção de uma tabela na qual os mesmos deveriam comparar o número de discos com o menor número de movimentos necessários para realizar a transferência. Para finalizar o trabalho foi realizada outra pesquisa de opinião, esta em relação à Torre de Hanói.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A pesquisa em tela está de acordo com as orientações curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 28) onde:

O jogo oferece o estímulo propício que favorece o desenvolvimento espontâneo e criativo dos alunos e permite ao professor ampliar seu conhecimento de técnicas ativas de ensino, desenvolver capacidades pessoais e profissionais para estimular nos alunos a capacidade de comunicação e expressão, mostrando-lhes uma nova maneira lúdica, prazerosa e participativa, de relacionar-se com o conteúdo escolar levando a uma maior apropriação dos conhecimentos envolvidos.

A partir da pesquisa de campo e das questões respondidas pelos alunos, os dados foram contabilizados e representados através de gráficos para cada pergunta, sendo em sua grande maioria questões fechadas, respondidas pelos alunos envolvidos.

Indagados sobre a utilização de jogos em sala de aula por seus professores de matemática e em quais séries os alunos responderam conforme aponta o gráfico 1.

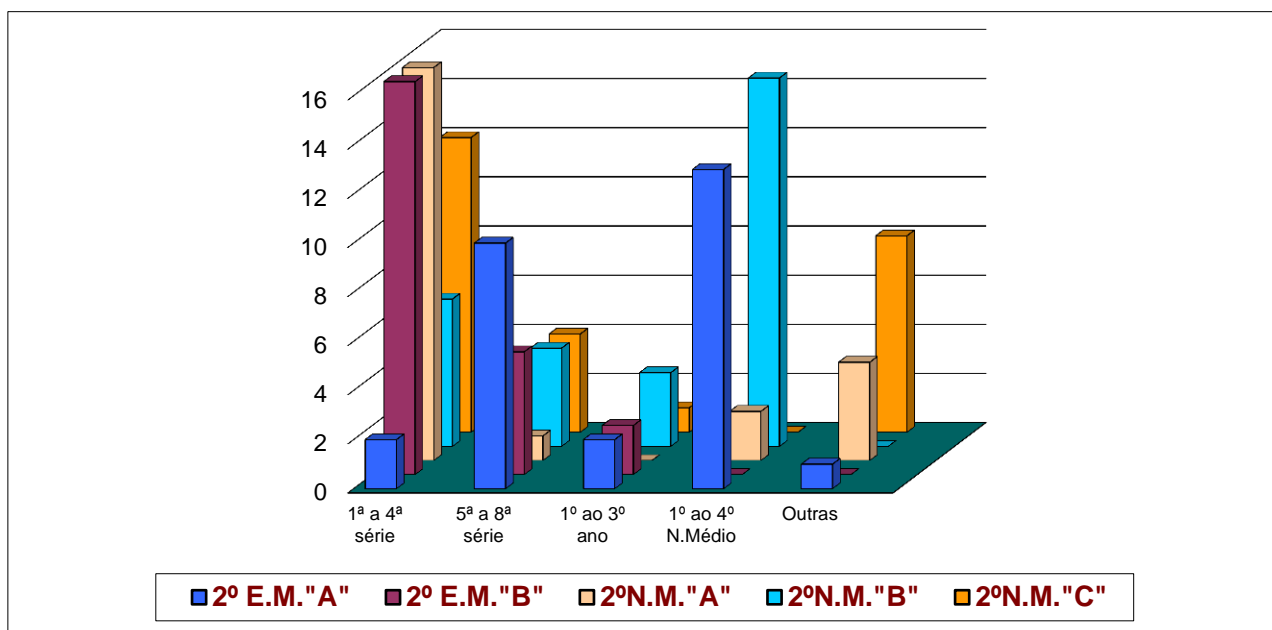


Gráfico 1: Utilização de jogos pelos alunos em séries anteriores.

Como é possível observar os professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (1ª a 4ª série) utilizam mais jogos em sala de aula do que nas demais séries iniciais do ensino fundamental. Muitos autores (KAMII; DEVERIES, 1991; GRANDO, 2000) destacaram em seus *trabalhos* a importância de se utilizar jogos na escola como meio que favorecesse o desenvolvimento e a aprendizagem de conceitos matemáticos pelas crianças.

Questionados sobre como artifícios como jogos deixam as aulas mais interessantes os alunos em sua maioria apontam que aprovam este recurso pedagógico de acordo com os dados do gráfico 2 a seguir.

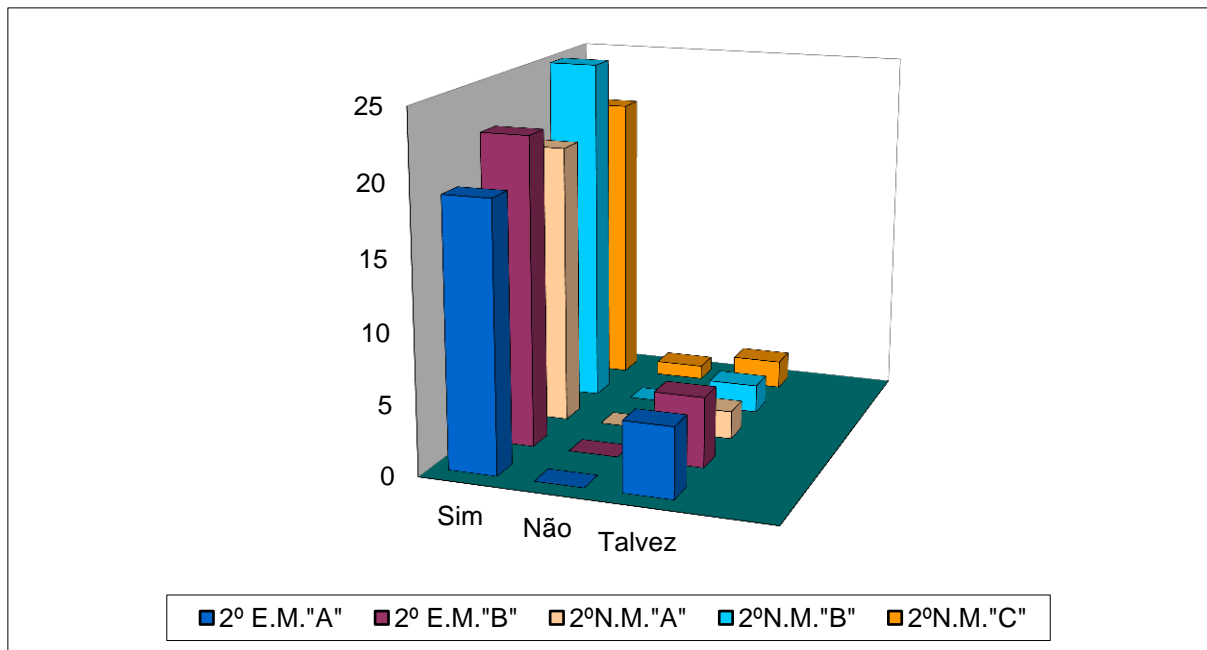


Gráfico 2: Apreciação da utilização de jogos em sala de aula.

É possível observar que a grande maioria dos alunos aprecia consideravelmente os jogos em sala de aula. O jogo visa permitir o enriquecimento do sujeito em suas estruturas mentais rompendo com o sistema cognitivo, Macedo (2000) pressupõe que esta situação possibilite transferir as estratégias utilizadas no contexto do jogo para outras situações.

Para analisar especificamente a Torre de Hanói foram realizadas oficinas nas turmas do 2º Ano do Ensino Médio e Normal Médio, adotando os seguintes passos: história, objetivo, regras e aplicação do jogo, momento em que foi observado a compreensão das turmas ao utilizar as regras do jogo fazendo as transferências dos discos conforme se aumentava a quantidade dos mesmos.

Foi proposto aos alunos que montassem uma tabela relacionando o número de discos com o menor número de movimentos necessários para a realização da transferência e, assim pudessem descobrir como a função exponencial estava inserida no jogo; os alunos ao descobrir acharam muito interessante a relação da função com o jogo e também a forma com que o jogo trabalha o desenvolvimento do raciocínio, em algumas turmas tivemos alunos que chegaram a descobrir a função $f(x) = 2^n - 1$.

As oficinas foram exitosas, visto que em todas as turmas houve um bom aproveitamento e apreciação do jogo como pode ser observado nos gráficos a seguir.

Com relação à aplicação das regras do jogo os alunos tiveram erros e acertos conforme aponta o gráfico 3.

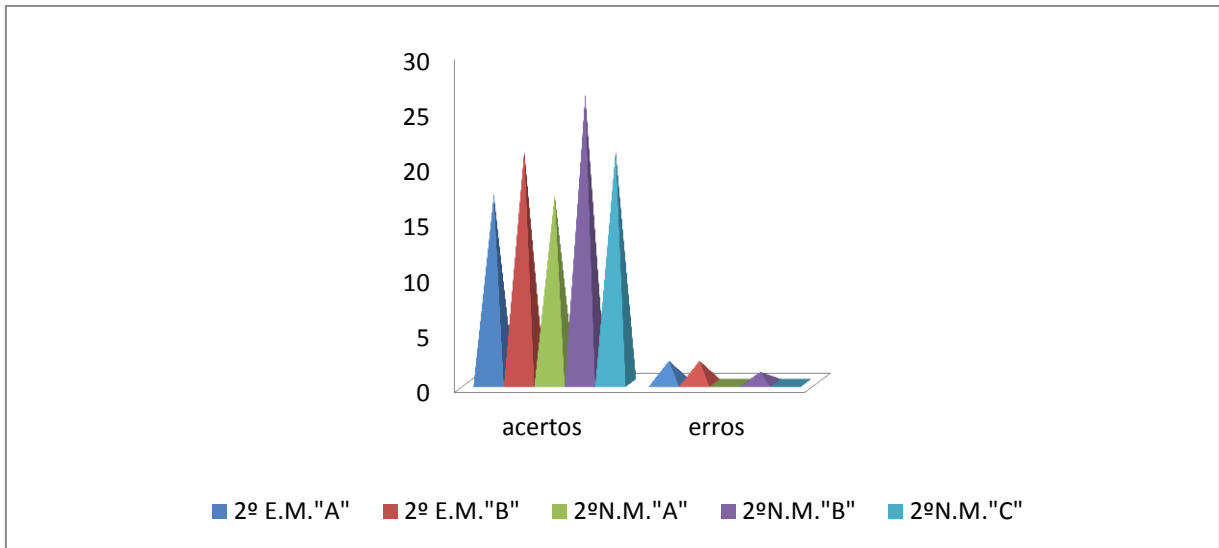


Gráfico 3: Índice de erros e acertos no jogo Torre de Hanói .

Os dados obtidos possibilita a observação de que a grande maioria dos alunos conseguiu mover os discos de acordo com as regras do jogo. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs (BRASIL, 1999) os jogos despertam no aluno um maior interesse pelo conteúdo estudado, pois, propicia ao mesmo uma maior interação.

Desafiados sobre o menor número de movimentos que são necessários para mover uma torre para outra haste os alunos obtiveram os resultados apontados no gráfico 4.

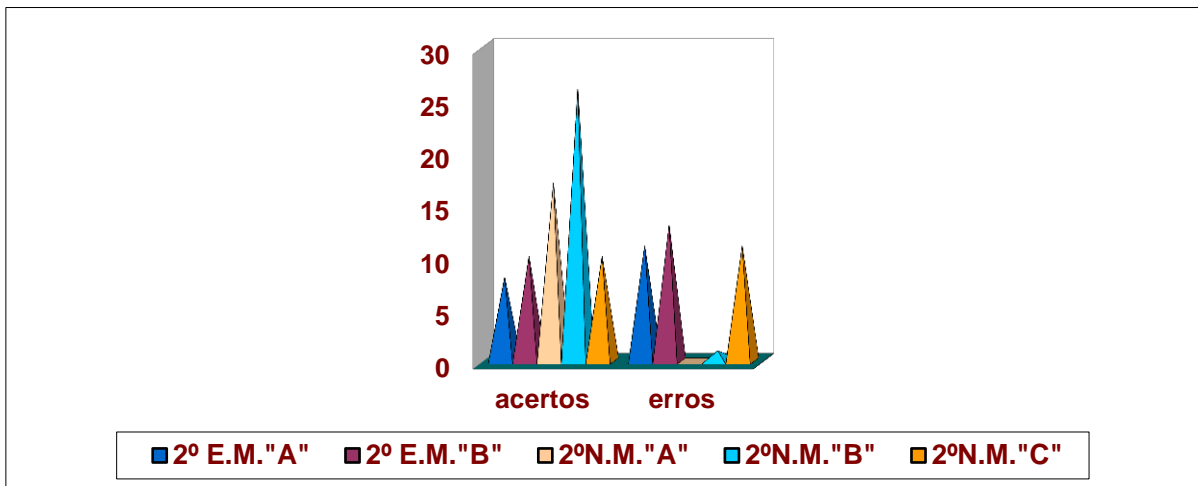


Gráfico 4: Menor numero de movimentos para mover os discos de uma haste para outra.

Nesta etapa da pesquisa observou-se que a grande maioria dos alunos conseguiu encontrar o procedimento mais econômico, ou seja, com o menor número de movimentos. Brenelli (1999, p. 141) aponta a importância no uso de atividades lúdicas afirmando que

“o jogo reveste-se de um significado funcional, por meio do qual a realidade é incorporada pela criança e transformada, quer em função de seus hábitos motores

(jogo do exercício), quer em função das necessidades do eu (jogo simbólico), quer em função das exigências de reciprocidade social (jogo de regras)”.

Diante destes resultados os alunos foram indagados sobre relação entre a quantidade de movimentos necessários para a execução e a quantidade de discos, ou seja, com duas, três, quatro, cinco, seis ou sete peças com os resultados expressos no gráfico 5 a seguir.

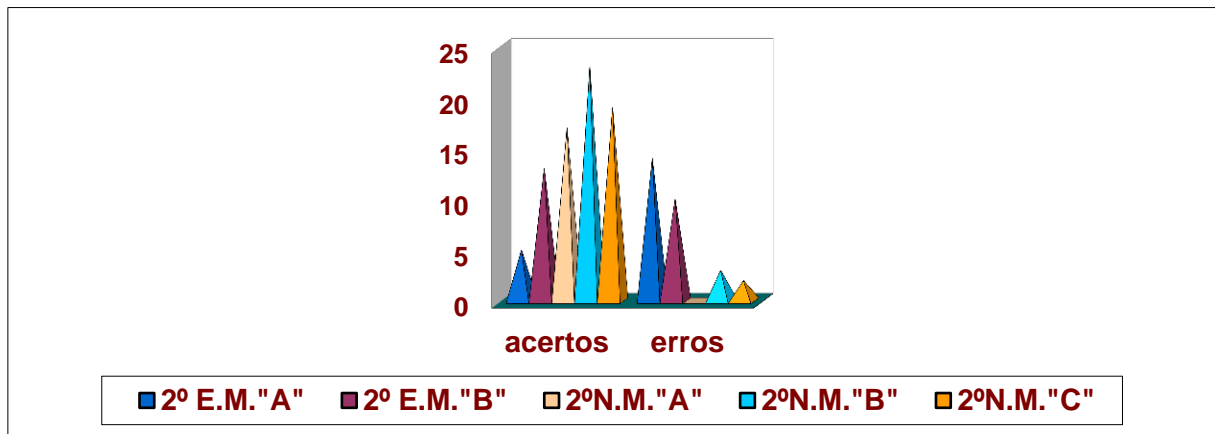


Gráfico 5: Relação do menor número de movimentos com a quantidade de discos.

Para auxiliar os alunos elaborou-se uma tabela com o objetivo de facilitar as respostas com relação a esta questão onde foi observado que os alunos tiveram maior facilidade em chegar aos resultados esperados.

No momento seguinte os alunos foram desafiados a encontrar uma relação matemática que relacionasse a menor quantidade de movimentos com a quantidade de discos contidos na torre, conforme aponta o gráfico 6 a seguir.

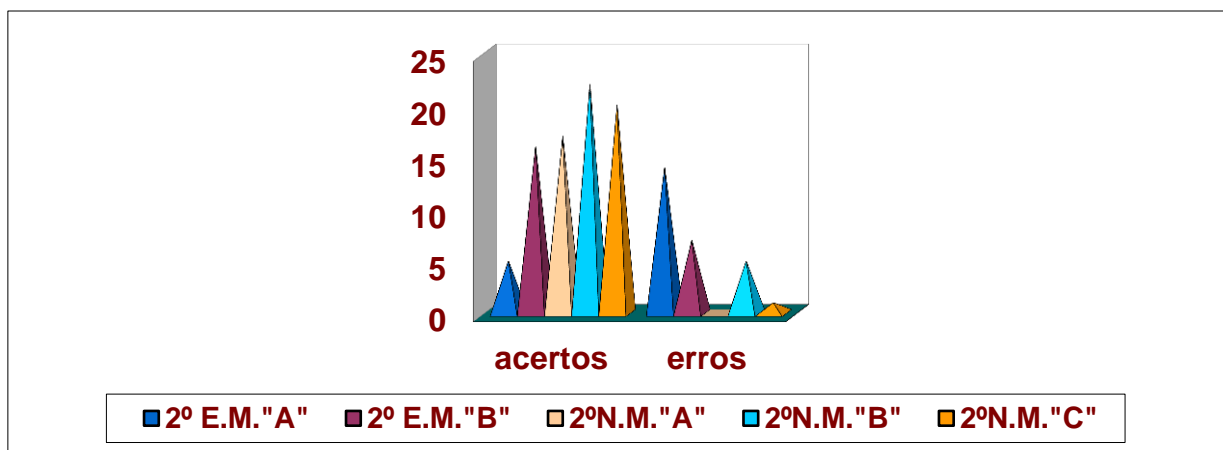


Gráfico 6: Relação conceitual de matemática da quantidade de discos com o menor número de movimentos.

A partir da organização da tabela os alunos deduziram a relação matemática, ou seja, a função exponencial para efetuar os movimentos sucessivos da estratégia mais econômica e conforme esperado os alunos chegaram a uma resposta satisfatória, conseguindo determinar a distribuição das peças nas sucessivas etapas da movimentação, supondo o caminho mais

econômico; utilizando para tal a função exponencial. Para Carraher *et alii* (2001, p. 12) “a aprendizagem da Matemática na sala de aula é um momento de interação entre a Matemática organizada pela comunidade científica, ou seja, a Matemática formal e a Matemática como atividade humana”.

Como pôde ser demonstrado nos resultados apresentados, os alunos gostam de jogos e acham que os mesmos ajudam na compreensão dos conteúdos, o fato de desconhecerem a Torre de Hanói foi um impulso para a continuação da pesquisa.

Analisando os resultados obtidos concluímos que o jogo é muito atrativo, o que leva o aluno a gostar do mesmo, seja por ser colorido, seja por serem regras práticas e fáceis de serem assimiladas; os mesmos conseguiram obter grande êxito na execução das etapas do jogo, ou seja, transferir os discos de uma haste para outra haste, relacionando os movimentos com a quantidade de discos e assim chegando às conclusões esperadas.

As análises apontam que a Torre de Hanói deve ser aplicada nas primeiras séries para desenvolver o raciocínio antes do professor trabalhar problemas, por exemplo, assim contribuirá para que o aluno esteja com seu raciocínio mais desenvolvido, facilitando a assimilação dos conteúdos.

A Torre de Hanói é um jogo muito rico de conteúdos e pode ser aplicada em diversas séries, desde a Pré-escola até o Ensino Médio, pelo princípio da indução finita prova-se que n discos sempre podem ser removidos com $2^n - 1$ movimentos conforme aponta Watanabe (2004, p. 134), assim a Função Exponencial pode ser melhor assimilada pelos alunos, os quais já tinham conhecimento do mesmo.

CONCLUSÕES

Os métodos tradicionais já não são suficientes no que se diz respeito ao interesse dos alunos, desta forma convém buscar outros métodos e o uso de jogos tem se mostrado como um instrumento eficaz na aprendizagem. A torre de Hanói é um jogo que permite discutir conteúdos sobre um novo olhar envolvendo a função exponencial e assim contribuindo na formação de conceitos e na prática de exercícios.

Através desta pesquisa foi possível demonstrar como um simples jogo como a Torre de Hanói pode auxiliar o trabalho do professor no ensino da função exponencial, visto que

após a execução do jogo o aluno passa a entender uma das aplicações do conteúdo o qual torna sua aprendizagem e desenvolvimento mais agradável e palpável.

A torre de Hanói propicia o desenvolvimento do espírito investigador, que pode ainda estimular o interesse e o raciocínio lógico, valorizando a autoestima do aluno na busca de soluções para os desafios do seu dia-a-dia.

A inclusão da torre de Hanói no processo de ensino aprendizagem pode ser mais uma ferramenta no estudo da função exponencial, onde constata-se a relação entre o número de discos e de movimentos em uma função exponencial. Verificou-se ao final que a aplicação da torre de Hanói possibilitou aos alunos uma melhor compreensão do conteúdo, fato que se torna gratificante ao se poder constatar que a pesquisa pôde contribuir para a aprendizagem desses alunos de maneira mais efetiva, ao utilizarem jogos matemáticos em sala de aula.

REFERENCIAS

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. V.2, 2006.

_____. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC, 1999.

BRENELLI, R. P. **Uma proposta psicopedagógica com jogo de regras**. Rio de Janeiro: Vozes, 1999.

CARRAHER, Teresinha; SCHLIEMANN, Ana Lúcia Dias; CARRAER, David. **Na vida dez, na escola zero**. 11. ed. São Paulo: Cortez, 2001.

DELL'AGLI, B. A. V. **O jogo de regras como recurso diagnóstico psicopedagógico**. Campinas, SP, 2002. Dissertação de mestrado. Faculdade de Educação, UNICAMP.

GRANDO, R. C. **A construção do conceito Matemático no jogo**. Revista Educação Matemática. SBEM-SP, Ano 5, n.3, p. 13-17, jan. 1997.

KAMII, C.; DEVERIES, R. **Jogos em grupo na educação infantil: implicações da teoria de Piaget**. São Paulo: Trajetória Cultural, 1991.

MACEDO, L. de; PETTY, A.L.S.; PASSOS, N.C. **Aprender com jogos e situações-problema**. Porto Alegre. Artes Médicas Sul, 2000.



OLIVEIRA, Alvim Antônio de. **Metodologia da pesquisa** – guia prático para apresentação de trabalhos acadêmicos. Florianópolis: Visual Books, 2008.

RODRIGUES, Auro de Jesus. **Metodologia científica**: completo e essencial para a vida universitária. São Paulo: Avercamp, 2006.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico**. São Paulo: Cortez, 2007.

WATANABE, Renate. **Uma lenda: Torre de Hanói**. In: HELLMEISTER, Ana Catarina P. (et al). Explorando o ensino da matemática: Atividades v.2, Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004.