DEMONSTRAÇÃO DE IRRACIONALIDADE DE ALGUNS NÚMEROS USANDO DOBRADURAS

Caio Antony de Matos Andrade (1); Ismael Sandro da Silva (2);

Daniel Cordeiro de Morais Filho (3)

1 - Bolsista do Grupo PET-Matemática UFCG e Bacharelando em Matemática pela *Universidade Federal de Campina Grande* - caio@mat.ufcg.edu.br

2 - Bolsista do Grupo PET-Matemática UFCG e Licenciando em Matemática pela *Universidade Federal de Campina Grande* – Ismael.negro1@hotmail.com

3 - Tutor do Grupo PET-Matemática UFCG e Professor Titular da *Universidade Federal de Campina Grande* - daniel@mat.ufcg.edu.br

INTRODUÇÃO

A Matemática é marcada, em maior ou menor grau, dependendo de cada caso, pelo rigor e abstração. Com relação aos níveis mais básicos de estudo, mais especificamente no ensino fundamental e ensino médio, há uma discussão recorrente na comunidade docente da Matemática sobre qual seria uma maneira coerente de se apresentar conceitos matemáticos de modo a acatar esse rigor sem, contudo, exacerbar na formalidade apresentada nos temas matemáticos direcionados a esse público. Outra questão que se pode considerar paralelamente a essa perspectiva do ensino de Matemática é interdisciplinaridade, que visa correlacionar conceitos matemáticos com temas de outras disciplinas. Sobre isso disserta os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (1998):

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais explicitam o papel da Matemática no ensino fundamental pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas.

Um dos tópicos que provocam estranheza ou dificuldade de interpretação por parte dos alunos é o conceito de número irracional, já presente na ementa do ensino fundamental e médio. Os números irracionais já aparecem na Matemática desde a Antiga Grécia no século VI a.C. e tem sido estudado há centenas de anos. Entretanto, na maioria das vezes, os exemplos nos livros didáticos de números irracionais se limitam a Pi (π) e algumas raizes quadradas. Além dessa escassez de exemplos de números irracionais, poucos livros trazem demonstração, ou mesmo justificativas menos formais, da irracionalidade desses números. Diante dessa particularidade relativa ao tema e da realidade presenciada nos livros e na formação dos alunos, procuramos neste trabalho apresentar alguns exemplos não comuns de números irracionais, bem como demonstrar a irracionalidade desses números de forma diferente: faremos uma demonstração geométrica, visual, bem palpável, usando dobraduras. Certamente existem demonstrações algébricas da irracionalidade desses números, mas nossa proposta é oferecer uma demonstração diferente com uma abordagem geométrica.

Nossa escolha em trabalhar o referido resultado pauta-se no fato do mesmo promover uma relação entre áreas distintas da Matemática, assim preconizados nos PCNs. Para obtenção do resultado a ser apresentado recorremos ao método do "*paper-folding*" – que convencionamos por **dobradura** – citado no artigo *"Origami" proofs of irrationality of square roots* de [CWIKEL]. O método mencionado consiste em efetuar dobraduras considerando a perspectiva geométrica da demonstração. Contamos que esse método possa incitar a criatividade e interpretação do aluno, unindo o desenvolvimento manual e artístico com a matemática e trazendo para discussão a importância de usar figuras para descobrir, formular e demonstrar resultados matemáticos. Nossa pesquisa também se baseou em [CASSELMAN].

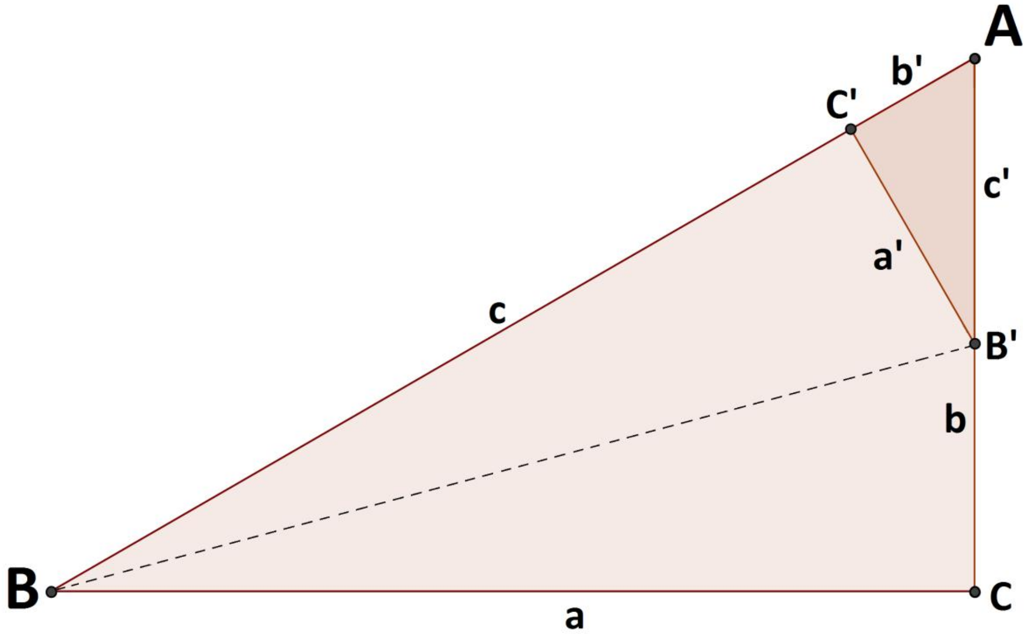
METODOLOGIA

O seguinte trabalho é fruto de uma pesquisa bibliográfica feita pelos bolsistas do grupo PET-MATEMÁTICA-UFCG, se baseando no artigo *"Origami" proofs of irrationality of square roots* [CWINKEL], donde foi extraído o método da dobradura.

DISCUSSÃO E RESULTADOS

O objetivo do trabalho é mostrar uma abordagem geométrica às demonstrações da irracionalidade de números da forma $\sqrt{n^2+1}$, para todo n inteiro e $\sqrt{n^2-1}$, para todo n inteiro maior que um.

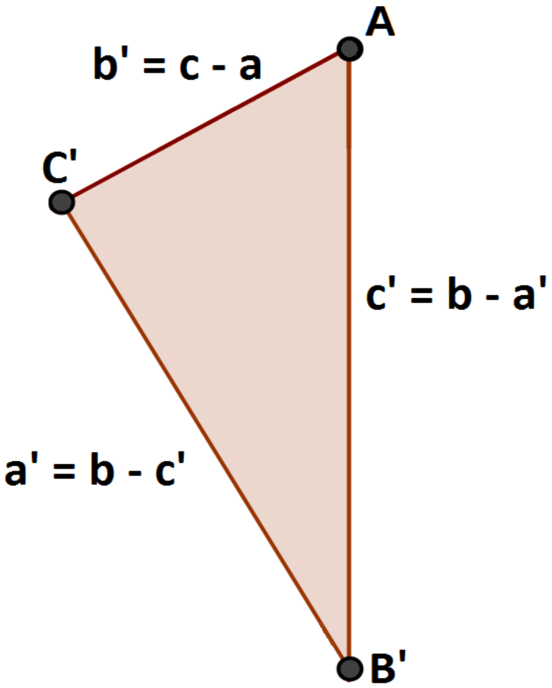
A demonstração se baseia na seguinte construção (Figura 1):



(Figura 1)

Consideremos o triângulo retângulo ABC mostrado na figura acima. Ao efetuarmos uma dobra sobrepondo o lado BC ao lado AB, obtemos o triângulo AB'C', triângulo semelhante a ABC e com lados de medidas estritamente menores.

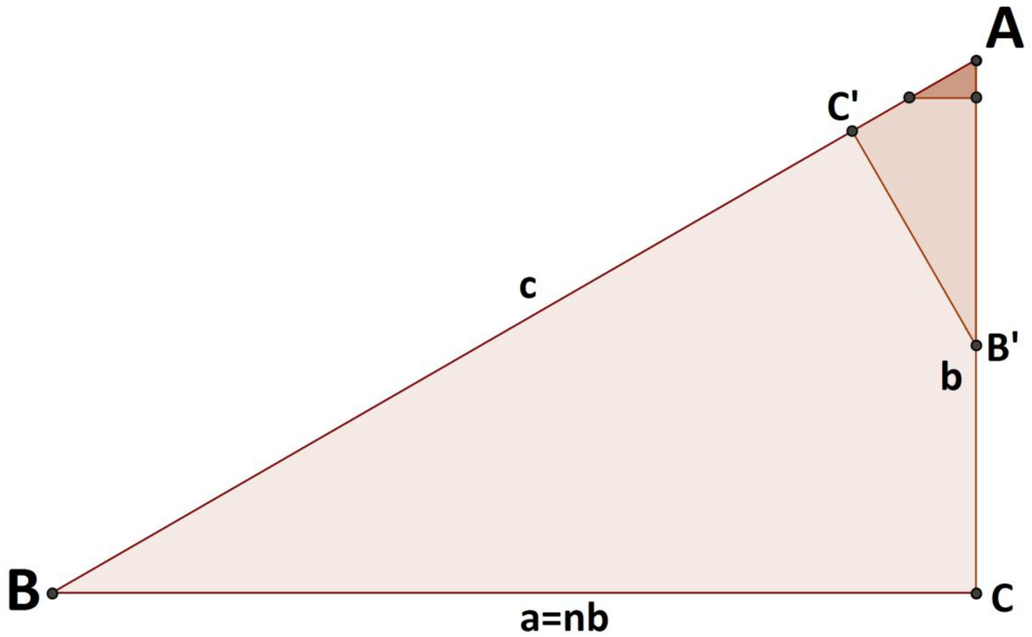
Note que, caso o triângulo ABC tenha lados inteiros, e $c = nb$ ou $a = nb$ para algum n inteiro, então o triângulo AB'C' também terá lados inteiros, e valerá $c' = nb'$ ou $a' = nb'$, fato que decorre das equações dos lados do triângulo AB'C' mostradas na (Figura2):



(Figura 2)

Se supusermos $\sqrt{n^2+1}$ racional, isto é, $\sqrt{n^2+1} = c/b$, com c e b naturais, geometricamente, teríamos um triângulo retângulo de lados c, b e nb conforme a Figura 3.

(83) 3322.3222
contato@conapesc.com.br
www.conapesc.com.br



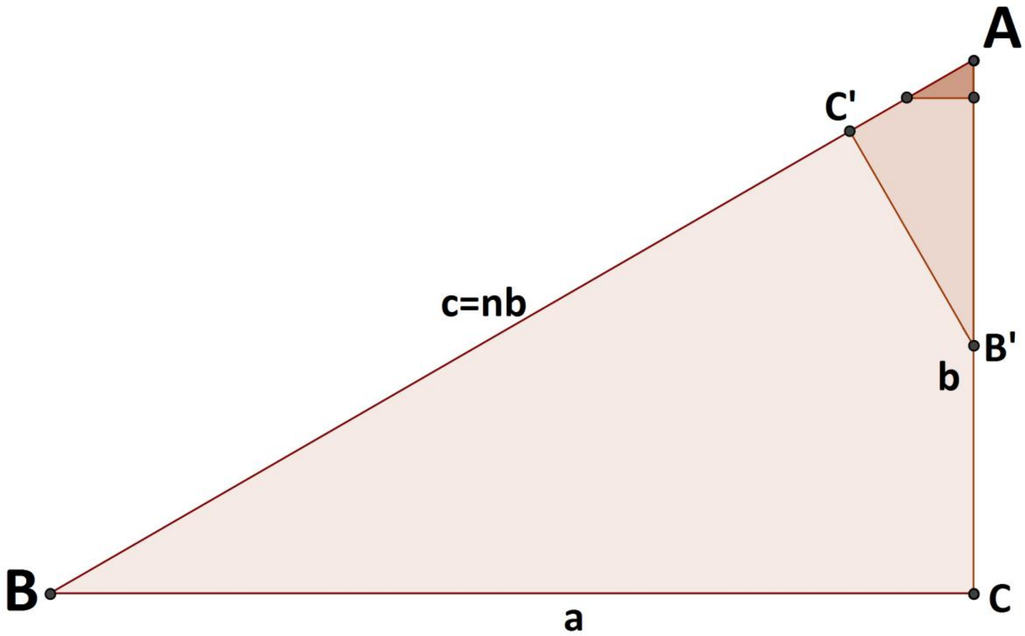
(Figura 3)

Uma vez que o triângulo ABC é retângulo e tem lados inteiros podemos aplicar o métedo da dobradura, efetuando uma dobra similar ao feito no caso anterior e, com isso, obter um triângulo semelhante ao triângulo ABC, de lados também inteiros e estritamente menores que os de ABC. Aplicando o processo indefinidamente (vide Figura 3), chegaríamos a um absurdo, porquanto obteríamos uma sequência estritamente decrescente de números naturais, o que não pode ocorrer. Concluímos então que $\sqrt{n^2+1}$é irracional.

Demonstração da irracionalidade de $\sqrt{n^2-1}$:

Para o caso de supormos $\sqrt{n^2-1} = a/b$, com a e b naturais, desde que $n \neq 1$ poderíamos formar o triângulo da Figura 4 incorrendo num absurdo por um processo análogo ao caso anterior.

(83) 3322.3222
contato@conapesc.com.br
www.conapesc.com.br



(Figura 4)

O método utilizado possibilita que o aluno tenha contato com uma perspectiva geométrica do conceito de irracionalidade e a manipulação para efetuar as dobraduras referidas o propiciam o contato com o aspecto concreto, gráfico e abstrato do conteúdo. Isso nos permite consolidar a ideia de que o método trabalhado, paulatinamente, incita as distintas habilidades requeridas de um estudante de matemática, fazendo do método uma excelente proposta de um tópico extra para ser trabalhado em sala.

CONCLUSÃO

Por envolver uma abordagem geométrica e trabalhar com dobraduras, opinamos que o método apresentado, de fato, mostra-se como uma forma mais assimilável para estudantes com menos experiência, não só da irracionalidade dos números aqui trabalhados, mas de demonstrações matemáticas de forma geral.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CWIKEL, M.. *"Origami" proofs of irrationality of square roots*. Technion, Israel Institute of Technology, Haifa 32000, Israel. Disponível em: <http://www.math.technion.ac.il/~mcwikel/paperfold.pdf> Acesso em 3 de setembro de 2015.

BARBOSA, J. L. M.. *Geometria Euclidiana Plana.* Editora SBM – Coleção do Professor de Matemática.

SINGH, S. *O Último Teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos;* Tradução de Jorge Luiz Calife. – 2ª ed. – Rio de Janeiro: Record, 1998.

CASSELMAN, B. *Pictures and Proofs.* Notices of the AMS, 47, no10, 2000. pp.1257-1266.

PARÂMETROS Curriculares Nacionais: matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/ SEF, 1998. 146 p.