DEMONSTRAÇÃO DOS TEOREMAS DE NAPOLEÃO E PITÁGORAS COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA

Ana Clecia Capistrano de Maria[1], Leandro Santos Ribeiro[2], Ana Clívia Capistrano de Maria[3].

1. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará/Campus Bragança,/thiagojose41@gmail.com
2. Universidade Federal do Pará/Campus Bragança,/leandros@ufpa.br
3. Universidade Federal do Pará/Campus Bragança, /
4. Universidade Federal do Pará/Campus Bragança,/cleciacapistrano@gmail.com

RESUMO: Esse artigo tem a finalidade de apresentar as demonstrações dos Teoremas de Napoleão e Pitágoras. Sendo que as figuras dos mesmos foram produzidas com auxílio do software livre Geogebra. Contudo, apresento alguns resultados dispostos no livro Geometria Euclidiana Plana, de João Lucas Marques Barbosa, que me levaram a concluir as demonstrações dos teoremas em questão.

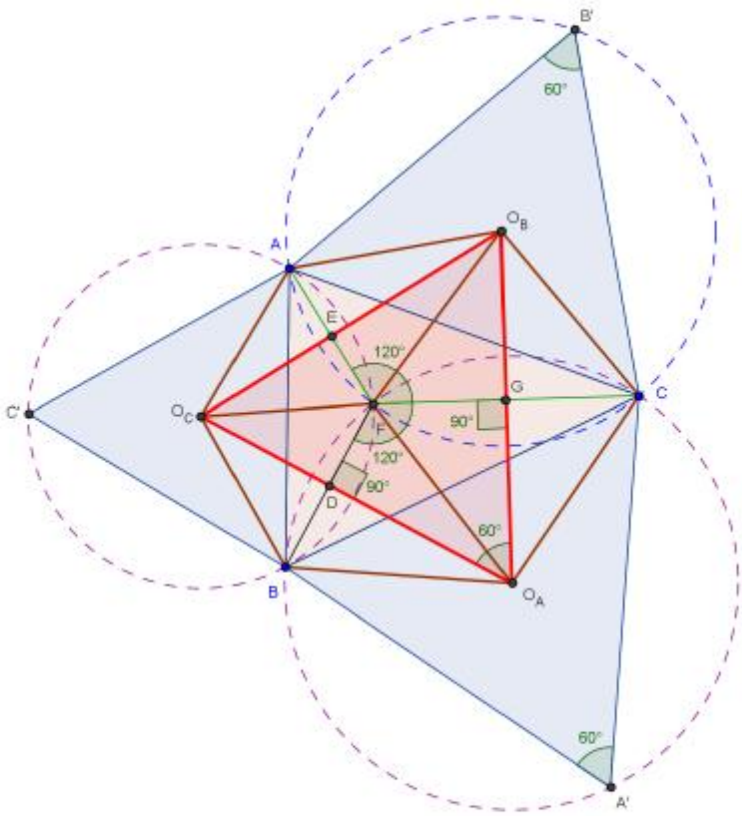
Palavras chaves: Demonstração, teorema, Napoleão, Pitágoras.

INTRODUÇÃO

O Teorema de Napoleão (geralmente atribuído a Napoleão Bonaparte, que teria enunciado em 1787) consiste em projetar um triângulo qualquer onde cada lado forme um triângulo equilátero, e marcando o baricentro (ou ortocentro) de cada triângulo equilátero e juntando tais pontos sempre se obterá um triângulo equilátero. Já o Teorema de Pitágoras é provavelmente o mais celebre teoremas da Matemática. Enunciado pela vez por filósofos gregos chamados de pitagóricos, estabelece uma relação simples entre o comprimento dos lados de um triângulo retângulo: “Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”.

Segundo as histórias, outros matemáticos, muito antes de Pitágoras, conheciam o teorema, contudo, nenhum deles, até então, havia conseguido demonstrar que ele era válido para qualquer triângulo retângulo. Talvez nenhuma outra relação geométrica seja tão utilizada em Matemática como o Teorema de Pitágoras. E ao longo dos séculos foram sendo registrados muitos problemas curiosos, cujas soluções têm como base este famoso teorema.

Teorema de Napoleão: Dado um triângulo qualquer ABC e os triângulos equiláteros formados sobre os lados do ΔABC. Temos que os baricentros desses triângulos equiláteros formam igualmente um triângulo equilátero.



Demonstração:

Primeiramente construamos, no Geogebra, um triângulo qualquer *ABC*. Em seguida, construamos os triângulos equiláteros: *AB'C* sobre o segmento *AC*, *ABC'* sobre o segmento *AB* e *A'BC* sobre o segmento *BC*. Posteriormente, determinemos os baricentros O_A, O_B, *e* O_C dos triângulos equiláteros *A'BC, AB'C e ABC'*, respectivamente. E, em seguida, construamos as circunferências circunscritas em tais triângulos. Note que tais circunferências se interceptam num único ponto *F*. Como provaremos mais adiante.

Logo após, construamos as cordas (segmento) *AF, BF e CF*. Observe que o quadrilátero *A'BFC* está inscrito no círculo de centro em O_A e pela proposição 8.12; segundo Barbosa (2004, p.136), que diz: "um quadrilátero pode ser inscrito em um círculo se, e somente se, possui um par de ângulos opostos suplementares". Ou seja, a soma de ambos é igual a 180º.

Temos o seguinte:

$$B\hat{F}C + \widehat{A}' = 180º \Rightarrow B\hat{F}C = 180º - \widehat{A}'$$

Da mesma forma, no quadrilátero $AB'CF$, temos:

$$A\hat{F}C + \widehat{B}' = 180º \Rightarrow A\hat{F}C = 180º - \widehat{B}'$$

E note que:

$$A\hat{F}B + A\hat{F}C + B\hat{F}C = 360º \Rightarrow A\hat{F}B = 360º - (A\hat{F}C + B\hat{F}C)$$

Segue daí,

$$A\hat{F}B = 360º - (180º - \hat{A}') - (180º - \widehat{B}') \Rightarrow \boldsymbol{A\hat{F}B = \hat{A}' + \widehat{B}'}$$

Mas, $\widehat{A}' + \widehat{B}' + \widehat{C}' = 180º$, pois são ângulos internos de um triângulo, ou ainda, $\widehat{A}' + \widehat{B}' += 180º - \widehat{C}'$. Então, obteremos:

$$A\hat{F}B = \hat{A}' + \hat{B}' = 180º - \hat{C}' \Rightarrow A\hat{F}B + \hat{C}' = 180º$$

Dessa forma, chegaremos à conclusão que $A\hat{F}B$ e $\hat{C}'$ são suplementares. Assim, provamos também, que quadrilátero $AFBC'$ está inscrito num círculo que é concorrente com os círculos de centro O_A e O_B no ponto F.

Além disso, de resultados da Geometria Euclidiana Plana sabe-se que a reta que passa pelos centros de dois círculos que se interceptam é perpendicular a corda comum dos dois círculos. Podemos, também, utilizar o Teorema 4.9 (3º caso de congruência de triângulos) e a proposição 4.8, segundo Barbosa (2004,p.50) , para provar que o segmento $\overline{O_A O_C}$ é perpendicular ao segmento $\overline{BF}$ no ponto que chamaremos de D e o segmento $\overline{O_A O_B}$ é perpendicular ao segmento $\overline{CF}$ no ponto perpendicular que chamaremos de G. Então, temos o quadrilátero $DFGO_A$, onde:

$$\widehat{O}_A + \widehat{D} + \widehat{F} + \widehat{G} = 360º \Rightarrow \widehat{O}_A + 90^0 + \widehat{F} + 90^0 = 360^0 \Rightarrow$$

$$\widehat{O}_A + B\widehat{F}C = 360^0 - 180^0 \Rightarrow B\widehat{F}C + \widehat{O}_A = 180^0$$

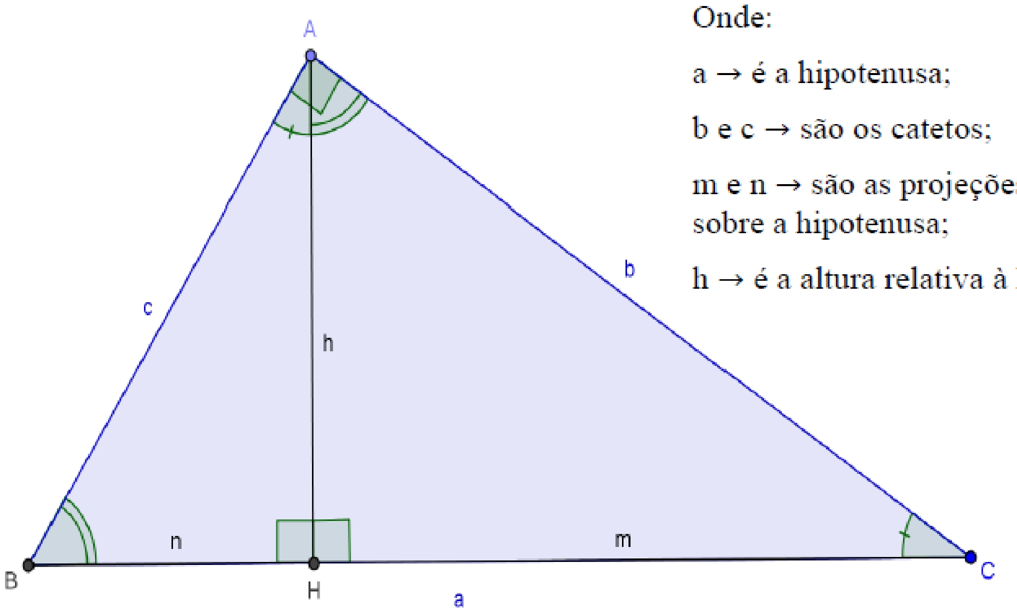
Mas já vimos que $B\hat{F}C + \hat{A}' = 180^0$. Logo, $\widehat{O}_A = \hat{A}'$.

Analogamente, mostraremos que $\widehat{O}_B = \hat{B}'$ e $\widehat{O}_C = \hat{C}'$ e, como $\hat{A}' = \hat{B}' = \hat{C}' = 60^0$, teremos $\widehat{O}_A = \widehat{O}_B = \widehat{O}_C = 60^0$. Então, o triângulo $O_A O_B O_C$ é equilátero.

Teorema de Pitágoras: Em todo triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

Demonstração:

Dado o triângulo retângulo ABC, retângulo em A, veja figura abaixo:



Onde:

a → é a hipotenusa;

b e c → são os catetos;

m e n → são as projeções dos catetos sobre a hipotenusa;

h → é a altura relativa à hipotenusa.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow am = b^2 \qquad (1)$$

Por outro lado, temos que pela semelhança dos triângulos ABC e *AHB:*

$$\frac{c}{n} = \frac{a}{c} \Rightarrow an = c^2 \qquad (2)$$

Agora, somando os resultados (1) e (2), teremos:

$$a.m + a.n = b^2 + c^2 \Rightarrow a(m+n) = b^2 + c^2$$

Logo,

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Queremos provar que $a^2 = b^2 + c^2$.

Se traçarmos a altura relativa (h) à hipotenusa, iremos forma dois triângulos $(AHB\ \ e\ \ AHC)$ que são semelhantes pelo caso (AAA), além de dividirmos a hipotenusa em duas partes **m** e **n** ditas projeções dos catetos sobre a hipotenusa, com $a = m + n$.

Onde vale a proporção pela semelhança dos triângulos ABC e AHC:

CONCLUSÃO

É evidente que tanto na demonstração do Teorema de Napoleão quanto no Teorema de Pitágoras utilizei resultados da Geometria Euclidiana Plana, como: Semelhança de Triângulos e Sistemas de Cordas. Além da Propriedade Fundamental da Proporção. Sendo que a demonstração utilizada por mim para a comprovação do Teorema de Napoleão recebe o nome de Demonstração Sintética.

Contudo, deixo claro, que há inúmeros resultados para a comprovação dos mesmos teoremas. Cito para a demonstração do Teorema de Napoleão pela Complexidade Algébrica, pela Trigonometria através das Leis do Cosseno, através das Transformações no Plano e Usando Arcos Capazes. E para o Teorema de Pitágoras, cito a demonstração através da comparação de áreas na construção de um quadrado cujo lado mede (a + b), que para alguns autores foi a própria demonstração dada por Pitágoras; além, é claro, da soma das áreas dos quadrados menores cujos que resultam na área de um quadrado maior, onde seus lados, quando sobrepostos seus vértices, formam um triângulo retângulo. Então, deixo a cargo do leitor pesquisar outras fontes, além das minhas referências a seguir, que lhe mostrem tais resultados.

Referências

BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria Euclidiana Plana. Sociedade Brasileira de Matemática, 6ª Edição, RJ, 2004.

REIS, Gabriela Aparecida dos. Tsuchiya, Luciana Yoshie. AGUSTINI, Edson. Complexidade algébrica em demonstrações de geometria euclidiana plana: o teorema de Napoleão e propriedade. FAMAT em revista, número 09. P. 231 a 258. Outubro de 2007.