PRINCÍPIO DA REFLEXÃO E RELAÇÕES COM A CARDIOIDE, UM ESTUDO INTERDISCIPLINAR.

Renato de Melo Filho (1); Lucas da Silva (2); Fábio Monteiro da Silva (3); Daniel Cordeiro de Morais Filho (4)

(1) Bolsista do Grupo PET-Matemática UFCG e Bacharelando em Matemática pela *Universidade Federal de Campina Grande* – renato.melo.fh@mat.ufcg.edu.br

(2) Bolsista do Grupo PET-Matemática UFCG e Licenciando em Matemática pela *Universidade Federal de Campina Grande* – lucastri09@gmail.com

(3) Bolsista do Grupo PET-Matemática UFCG e Licenciando em Matemática pela *Universidade Federal de Campina Grande* – fabio.monteiro2011@gmail.com

(4) Tutor do Grupo PET-Matemática UFCG e Professor Titular da *Universidade Federal de Campina Grande* - daniel@mat.ufcg.edu.br

INTRODUÇÃO

A interdisciplinaridade é hoje fundamental para o ensino e aprendizagem. Essa é uma ideia do senso comum, amplamente difundida nos noticiários e na mídia digital, sendo muitas vezes exposta de uma forma distorcida e pouco crítica, banalizando a ideia de interdisciplinaridade nas ciências, muitas vezes, apresentada de forma artificial e forçada. Porém, bons autores e bons textos trazem uma abordagem adequada desse conceito e, de maneira modesta, ansiamos seguir esse exemplo neste texto. Para Moraes (2002), a realidade é complexa, ela requer um pensamento abrangente, multidimensional, capaz de compreender a complexidade do real e construir um conhecimento que leve em consideração essa mesma amplitude. Daí podemos inferir que a interdisciplinaridade é necessária ao conhecimento humano na medida em que permite uma compreensão múltipla da realidade.

Além disso, na tentativa de caracterizar a interdisciplinaridade Japiassu (1976) comenta:

> Podemos dizer que nos reconhecemos diante de um empreendimento interdisciplinar todas as vezes em que ele conseguir incorporar os resultados de várias especialidades, que tomar de empréstimo a outras disciplinas certos instrumentos e técnicas metodológicos, fazendo uso dos esquemas conceituais e das análises que se encontram nos diversos ramos do saber, a fim de fazê-los integrarem e convergirem, depois de terem sido comparados e julgados. Donde podermos dizer que o papel específico da atividade interdisciplinar consiste, primordialmente, em lançar uma ponte para ligar as fronteiras que haviam sido estabelecidas anteriormente entre as disciplinas com o objetivo preciso de assegurar a cada uma seu caráter propriamente positivo, segundo modos particulares e com resultados específicos.

Na Matemática não poderia ser diferente. Para esse campo do conhecimento humano, a interdisciplinaridade é útil para se justificar modelos matemáticos, os quais são aplicáveis em várias disciplinas como a Química, a Biologia e a Física. Mais ainda, conhecimentos de outras disciplinas são essenciais para se compreender determinados conhecimentos matemáticos em uma troca salutar de conhecimentos. Portanto, o presente trabalho se propõe a discutir o princípio físico da reflexão óptica, usando uma aplicação de forma interessante, a partir da construção de uma curva conhecida como *cardioide*. Além disso, o tema discutido aqui utiliza conhecimentos relativos à Cinemática Rotacional e, dessa forma, pode ser visto como uma motivação para esse conteúdo. Esperamos que o presente trabalho possa elucidar questões que ratifiquem a importância da interdisciplinaridade como recurso auxiliar para o ensino-aprendizagem da Matemática.

METODOLOGIA

O trabalho se baseia em uma pesquisa de caráter bibliográfico cuja principal referência é o livro soviético traduzido para o Inglês “Straight Lines and Curves”. Também foram realizadas pesquisas complementares em livros de física e matemática e em artigos disponíveis na internet.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Quando se estuda as ondas luminosas dois importantes fenômenos se sobressaem: A refração e a reflexão da luz. O primeiro ocorre quando um feixe luminoso estreito passa por uma superfície que separa dois meios, por exemplo, um feixe que se propaga no ar e então encontra uma superfície plana de água. Já a reflexão ocorre quando determinada superfície reflete o feixe luminoso para o meio de origem, com
o ilustrado na Figura 1.
ilustrado na Figura 1

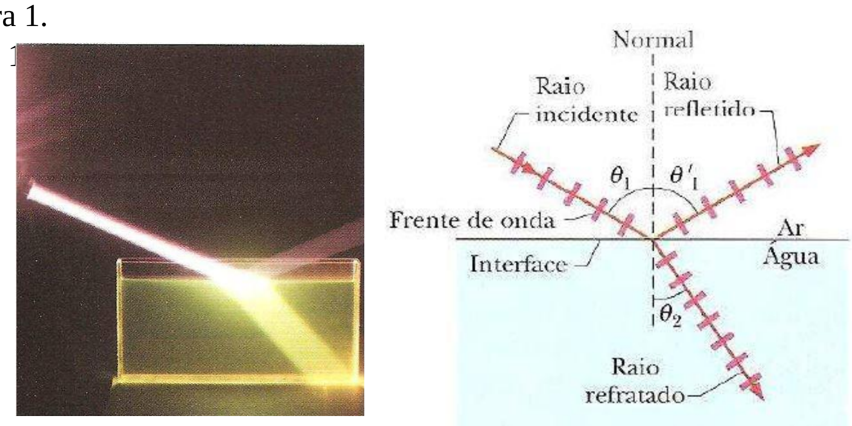

Figura 1: Reflexão e refração da luz

A orientação dos feixes luminosos e frente de onda associada é medida em relação a uma direção conhecida como normal (Figura 1), que é perpendicular à interface no ponto em que ocorrem a reflexão e a refração. Na figura 1, o ângulo de incidência é θ_1, o ângulo de reflexão é θ_1' e o ângulo de refração é θ_2; todos esses ângulos são medidos em relação à normal. O plano que contém o raio incidente e a normal é o plano de incidência. Neste trabalho, será utilizada apenas a lei de reflexão:

Lei da Reflexão: O raio refletido está no plano de incidência e tem um ângulo de reflexão igual ao ângulo de incidência. Na figura anterior isso significa que:

$$\theta_1 = \theta_1'$$

Existiria alguma relação entre esse princípio e a curva cardioide? Para responder à pergunta, é necessário conhecer melhor esse objeto matemático.

Descreve-se a cardioide como a curva gerada por um ponto P fixado a um círculo λ que rola, sem deslizar, sobre outro círculo θ de mesmo raio. A figura 2 ilustra uma cardioide.

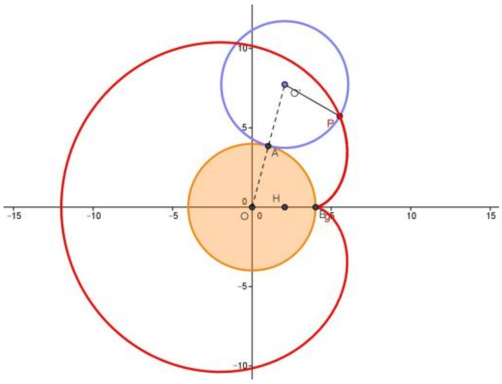

Figura 2: A cardioide

A palavra cardioide tem relação com o formato da curva, que se assemelha a um coração. Em grego coração é καρδιο "*cardio*" e, portanto, cardioide seria a curva coração. Existiria alguma relação entre essa curva e a reflexão da luz mencionada acima? Para responder a essa questão imagine o seguinte: Tomando um ponto fixo a uma circunferência do qual parte um feixe de luz que é refletido uma única vez pela curva, qual "figura" seria formada no interior da circunferência? Veja que aqui se fala de uma reflexão e esta obedece à lei da reflexão citada anteriormente, ou seja, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, ambos medidos em relação à tangente. As figuras abaixo ilustram esse fato:

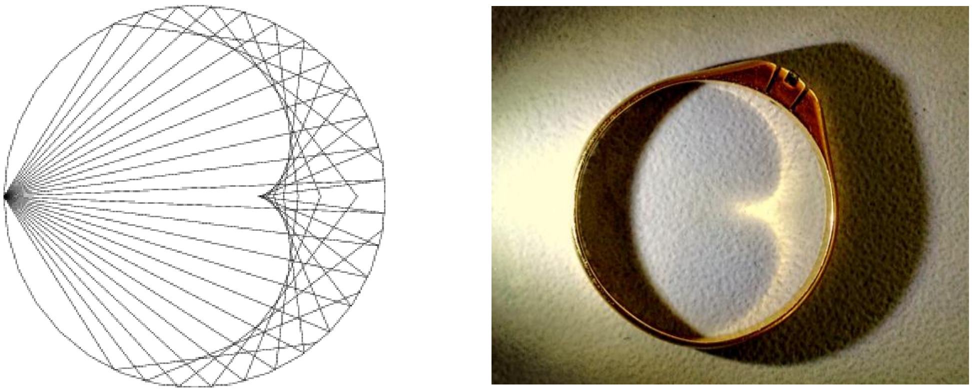

Figura 3: Observem os raios refletidos no interior de um anel. Esses raios formam uma cardióide. Interessante, não?

A partir da figura 3 nota-se que o feixe de luz produz incrivelmente uma cardioide no interior da circunferência. Perceba que todos os raios refletidos são tangentes à cardioide. Em outras palavras, o invólucro (envoltória) dos raios refletidos é uma cardioide. Neste ponto, faz-se necessário a formalização matemática da relação entre a figura formada e a cardioide. Para isso utilizar-se-á o seguinte resultado, que pode ser encontrado em Vasiliev e Gutenmacher, 1980 :

Teorema dos dois Círculos: Seja α um círculo de raio r que rola, sem escorregar, dentro de um círculo β de raio $2r$, tais que ambos rolam sobre uma superfície λ. Então o invólucro de todas as posições do diâmetro do círculo maior será o lugar geométrico descrito por um ponto M fixado na circunferência menor. A figura 4 exemplifica o teorema:

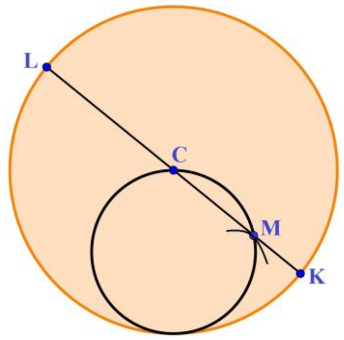

Figura 4: Teorema dos dois círculos

Com esse resultado e a definição de cardioide dada acima já é possível demonstrar que ela pode ser obtida como o invólucro dos raios refletidos sobre uma circunferência. Para isso considere a figura abaixo:

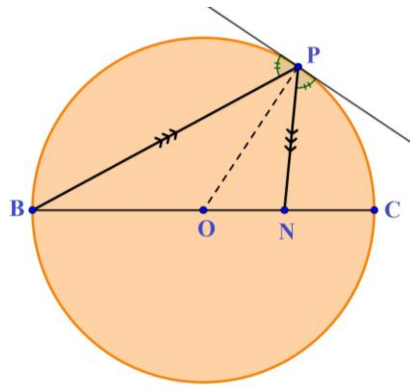

Figura 5: Reflexão de um raio de luz

Suponha um raio qualquer BP do feixe de luz. Este é emitido de uma fonte localizada em B sendo refletido em um ponto arbitrário P. O raio refletido intersecta o ponto N sobre o diâmetro BC. Logo:

$$P\hat{N}C = P\hat{B}N + B\hat{P}N$$
$$P\hat{N}C = P\hat{B}N + 2P\hat{B}N = 3P\hat{B}N$$

Assim, o ângulo que o raio refletido forma em relação ao diâmetro é três vezes maior que o ângulo do raio incidente em relação ao diâmetro. Por definição, a velocidade angular é a taxa com que o ângulo varia em relação ao tempo, ou seja, $\omega = \Delta\theta/\Delta t$. Disso, segue que ao rotacionar-se o raio BP em torno do ponto B com uma velocidade angular ω, o raio refletido será rotacionado com uma velocidade angular de 3ω em relação ao diâmetro BC. Ao mesmo tempo, o ponto de reflexão P irá rolar ao longo da circunferência de diâmetro BC com uma velocidade angular de 2ω (Observe que $P\hat{O}N=2P\dot{B}N$). Objetiva-se mostrar que o segmento PN (o raio refletido) é sempre tangente a cardioide, para assim, obtê-la por definição. Role uma circunferência de raio $2/3(OB)$, cujo centro é o ponto móvel *P*, ao longo de uma circunferência de raio *1/3(OB)* e centro *O* (Considerando que o diâmetro *KL* está, em um momento inicial, sobre o diâmetro *BC*).

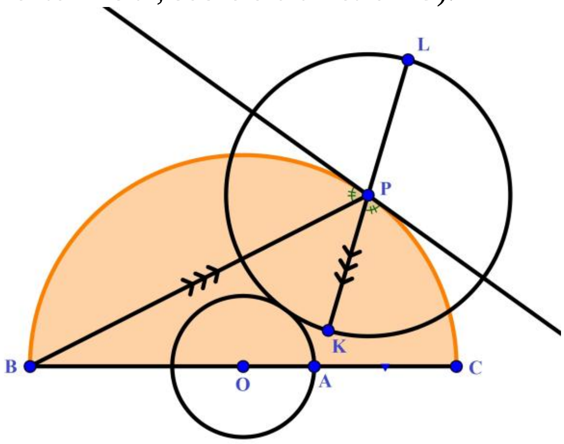

Figura 6: Construção da cardioide

Se o centro *P* da circunferência em movimento rola com uma velocidade angular de *2ω*, então diâmetro *KL* é rotacionado com uma velocidade angular de *3ω* em torno do diâmetro *BC*. Veja o porquê:

É possível enxergar a velocidade linear (Também conhecida como velocidade tangencial) do ponto *P* de duas formas

$$V_P = OB.2\omega$$

$$V_P = \frac{2OB}{3}\omega_{KL} \Rightarrow \omega_{KL} = 3\omega$$

Pelo teorema dos dois círculos, o invólucro das posições ocupadas pelo diâmetro *KL* é sempre tangente à trajetória descrita pelo ponto *M*, o qual pertence a uma circunferência de raio *1/3(OB)*. Como há duas circunferências de mesmo raio, uma fixa e a outra rolando sobre a primeira, então, por definição, o lugar geométrico descrito pelo ponto *M* é uma Cardioide, como ilustra a figura abaixo.

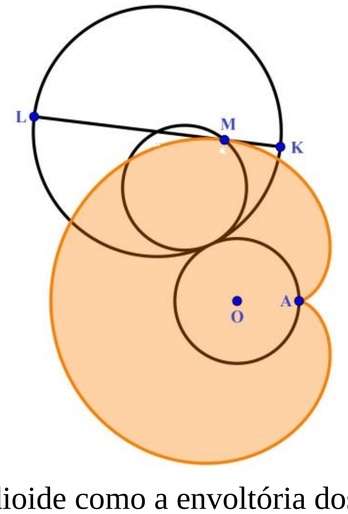

Figura 7: A cardioide como a envoltória dos raios refletidos

CONCLUSÕES

O estudo do princípio físico da reflexão permitiu detalhar a descrição de um fenômeno deveras interessante e peculiar: um feixe de luz que incide no interior de uma superfície reflexiva circular gera uma cardioide. A demonstração matemática e física da veracidade deste fenômeno foi feita utilizando-se conceitos e resultados de Geometria e Óptica básica, principalmente os relativos a ângulos e reflexão da luz, respectivamente. Percebe-se então que a contextualização, bem como a interdisciplinaridade são essenciais para o desenvolvimento das ciências, visto que suas diferentes áreas não existem de forma isolada, mas compartilham resultados e princípios umas com as outras. Além disso, o estudo de fenômenos observáveis no cotidiano, como o deste texto, proporcionam uma maior receptividade por parte do aluno, já que ele apreende um significado concreto e palpável ao conhecimento transmitido, contribuindo, assim, para a mitigação da fama da matemática apenas abstrata e sem sentido.

REFERÊNCIAS

MORAES, M. C. *O paradigma educacional emergente*. São Paulo: Papirus, 2002.

JAPIASSU, H. *Interdisciplinaridade e patologia do saber*. Rio de Janeiro: Imago, 1976.

VASILYEV, N.B; GUTENMACHER, V.L. *Straight Lines and Curves*. Tradução de Anjan Kundu. Moscou: Mir Publishers Moscow, 1980.

WALKER, J. et al. *Fundamentos de Física*, Volumes 1 e 4. 08.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

BAEZ, J. *Rolling Circles and Balls*. Disponível em <http://math.ucr.edu/home/baez/rolling/rolling_1.html>. Acesso em 02 de Fevereiro de 2016.