

DEMONSTRAÇÃO DE UMA SITUAÇÃO EXÓTICA USANDO O ESTUDO DE PIRÂMIDES

Joselito Elias de Araújo¹
José Vinícius do Nascimento Silva²

INTRODUÇÃO

O Egito está situado no nordeste da África, entre os desertos do Saara e da Núbia. É cortado pelo rio Nilo no sentido sul-norte, formando duas regiões distintas: o vale, estreita faixa de terra cultivável, apertada entre desertos, denominado Alto Egito e o delta, em forma de leque, com maior extensão de terras aráveis, pastos e pântanos; denominado Baixo Egito.

Por volta de 3100 a.C. o Egito foi unificado dando início ao chamado Antigo Império cuja capital era Mênfis. Durante este período seis dinastias governaram o país, cada uma delas encabeçada por uma linhagem de faraós que eram venerados como um deus e considerados um intermediário entre os deuses e os mortais. Este papel nutriu o desenvolvimento da monumental arquitetura egípcia incluindo as pirâmides, a construção de sepulturas reais e de grandes templos como os de Luxor e Karnak. O poder absoluto dos faraós atingiu o auge durante a IV dinastia cujos faraós Quéops, Quefren e Miquerinos mandaram construir enormes pirâmides.

O conhecimento que temos hoje da matemática egípcia provém de cinco papiros, dos quais os mais importantes são o papiro Rhind e o papiro Moscou. Estes dois documentos datam provavelmente do século XVIII a.C. mas seu conteúdo trata de documentos ainda mais antigos. O papiro Rhind foi descoberto por volta de 1850 provavelmente nas ruínas de uma pequena construção próxima ao templo mortuário de Ramssés II em Tebas. Foi trazido para Luxor por Alexander Henry Rhind. Após a morte de Rhind o papiro foi comprado pelo Museu Britânico em 1865. Hoje ele é formado por um rolo contendo 14 folhas de papiros com cerca de 40 cm de largura e 23 cm de altura, coladas em um de seus lados perfazendo 513 cm de comprimento mas parece que o rolo original continha 20 folhas. Ele contém 87 problemas e suas soluções e é considerado a fonte da matemática egípcia mais compreensiva.

¹ AUTOR: Licenciado em Matemática - UEPB, Especialista em Metodologia do Ensino de Matemática e Física - UNINTER, Mestrando em Educação Matemática - UEPB - UFCG. elias8matematico@gmail.com.

² COAUTOR: Licenciado em Matemática - UEPB, Especialista em Educação para o Semi-Árido Brasileiro - UFPB, Mestre em Matemática - PROFMAT - UEPB. vinnyuepb@gmail.com.

O papiro Moscou é considerado o segundo papiro matemático mais importante, data do Médio Império e é um pouco mais antigo que o papiro Rhind. Foi comprado em 1893 por V. S. Golenishchev. Um fragmento dele encontra-se bem preservado no Museu das Finas Artes em Moscou formado por folhas de 8 cm de comprimento por um quarto de altura. Escrito cerca de 1850 a.C. por um escriba desconhecido, este papiro contém 25 problemas e nele estão dois resultados notáveis da matemática egípcia: a fórmula para o volume do tronco de pirâmide e a solução para um problema que alguns acreditam tratar-se da área de um hemisfério.

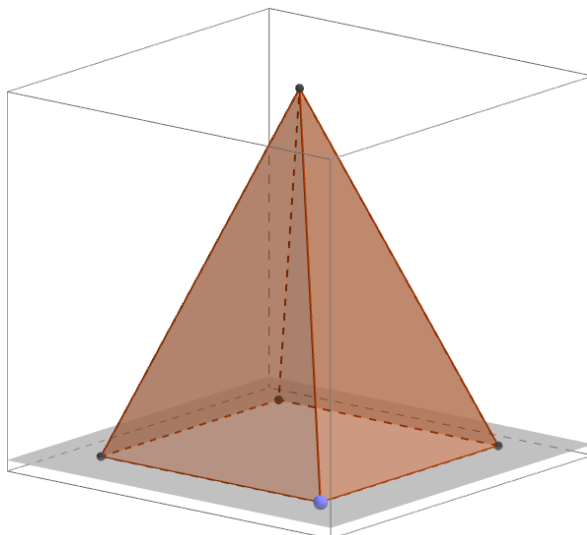
A história do Egito e da evolução da matemática proveniente dos egípcios é fascinante e admirável. Principalmente por tratar de temas diversos e também do estudo das pirâmides.

Nessa perspectiva, dois matemáticos Joselitowsky e Vinischenko, herdaram um artefato piramidal reto, de base quadrada, com aresta da base medindo 1 u.m. e altura igual a 3 u. m., o que a torna com um volume de 1 u. v., totalmente revestido em ouro que lembra as pirâmides do Egito. Na divisão do objeto eis que surge a dúvida cruel: como dividi-lo em partes iguais? Tal problema seria facilmente resolvido se decidissem dividir a base em duas partes iguais. Porém, Vinischenko quer ficar com uma miniatura da pirâmide e Joselitowsky deve ficar com o tronco da pirâmide.

METODOLOGIA

O corte que deve ser efetuado na pirâmide deve ser paralelo à base. E o ponto crucial da divisão de tal pirâmide será o objetivo deste artigo: A que altura deve ser feito o corte na pirâmide, paralelo à base, de modo que o volume da nova pirâmide remanescente coincida com o volume do tronco da pirâmide inicial?

Consideremos um caso particular para uma pirâmide regular de base quadrada (Figura 1) cujo lado mede 1 e altura 3 unidades de medida, tal que seu volume é igual a 1 unidade de volume.



De fato, já sabemos que o volume de uma pirâmide é dado por:

$$V_{pirâmide} = \frac{AB \cdot H}{3}, \text{ com } \begin{cases} AB = \text{Área da base} \\ H = \text{Altura} \end{cases}$$

Como, $AB = 1^2 = 1$ e $H = 3$, temos que $V_{pirâmide} = \frac{1 \cdot 3}{3} = 1$.

■

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nosso objetivo consiste em dividir o volume da pirâmide em duas partes iguais, com um corte paralelo a base. Com isso, encontraremos que a altura deve ser considerada para que esse corte deixe objetos de mesmo volume.

Bom, nesse caso teremos uma pirâmide e um tronco de pirâmide de altura $h \text{ u.m}$ e $(3 - h) \text{ u.m}$, respectivamente, como podemos ver na (Figura 2) seguir:

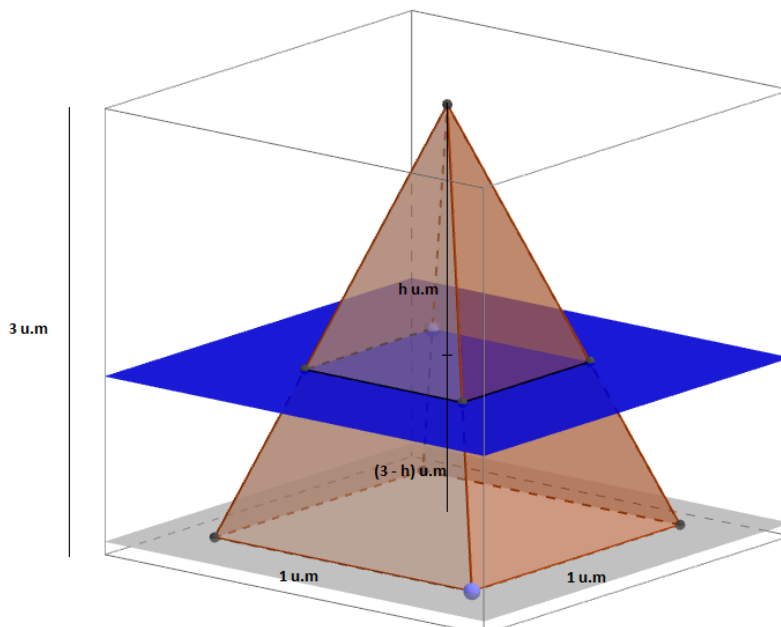


Figura 2

Da semelhança da pirâmide menor de altura h u. m com a pirâmide maior de altura 3 u. m é valido que a razão entre o volume da pirâmide menor (v) e o volume da pirâmide maior (V) será igual ao cubo da razão entre as suas alturas, isto é:

$$\frac{v}{V} = \left(\frac{h}{3}\right)^3 \Rightarrow \frac{v}{V} = \frac{h^3}{27} \Rightarrow v = \frac{1 \cdot h^3}{27} \Rightarrow v = \frac{h^3}{27}$$

Daí, como queremos dividi-la de modo que os volumes sejam iguais e o volume da pirâmide inicial (Figura 1), é 1 u. v, temos que o volume da pirâmide menor será igual a $\frac{1}{2}$ u.v.

Com isso temos que:

$$v = \frac{h^3}{27} = \frac{1}{2} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{27}{2}} \Rightarrow h \cong 2,3811.$$

Observe que, 2,3811 ocupa 19,37% da altura inicial tomada. Assim, pode-se verificar que, de fato, tal altura dividi-a em duas partes de iguais volumes.

A pirâmide menor terá volume (v) tal que:

$$\frac{Ab}{AB} = \left(\frac{2,3811}{3}\right)^2 \Rightarrow Ab \cong 0,63.$$

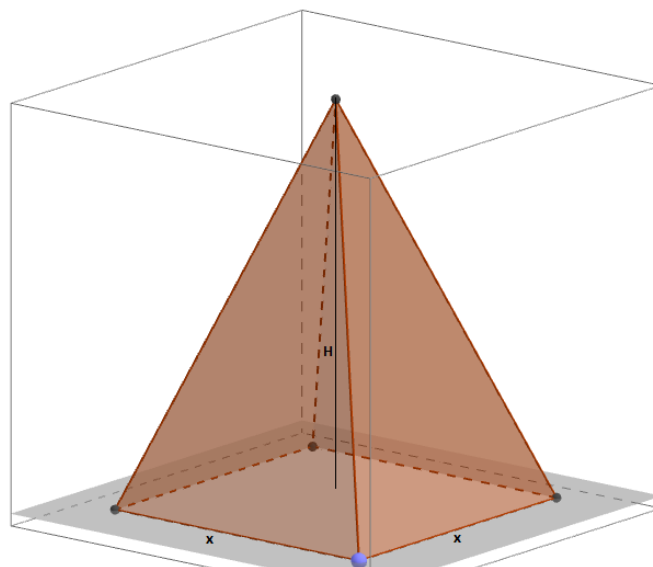
Onde, Ab = área da base menor. Daí,

$$v = \frac{(0,63) \cdot (2,3811)}{3} = 0,4998 \cong 0,5 = \frac{1}{2} V.$$

Analogamente, teremos que o volume do tronco será dado por:

$$\begin{aligned} V_{Tronco} &= \frac{h}{3} (AB + Ab + \sqrt{AB \cdot Ab}) = \frac{0,6139}{3} (1 + 0,63 + \sqrt{0,63}) \\ &= \frac{0,6139}{3} \cdot 2,424 \cong 0,50 = \frac{1}{2} V \end{aligned}$$

Podemos generalizar este caso para uma pirâmide regular de base quadrada de altura H e aresta da base medindo x . (Figura 3).



CONCLUSÃO

Nosso objetivo é passar um plano paralelo a base de altura $(H - h)u.m$ de modo que o volume da nova pirâmide remanescente coincida com o volume do tronco da pirâmide inicial, como mostra a figura a seguir.

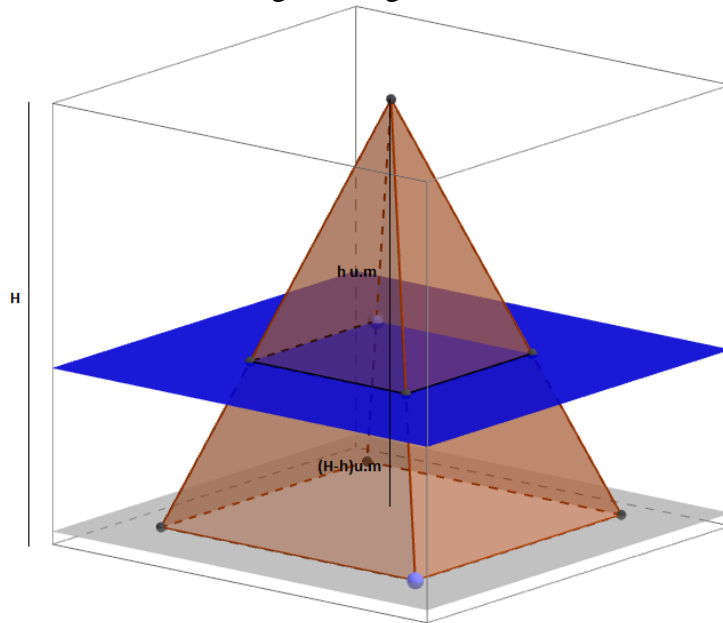


Figura 4

Considerando (v) e (V) os volumes das pirâmides maior e menor respectivamente, temos que:

$$\frac{v}{V} = \left(\frac{h}{H}\right)^3 = \frac{h^3}{H^3} \Rightarrow \frac{v}{V} = \frac{h^3}{H^3} \Rightarrow v = V \cdot \frac{h^3}{H^3} \Rightarrow v = V \cdot \left(\frac{h}{H}\right)^3 \quad (I)$$

Queremos dividi-la de modo que os volumes da pirâmide remanescente e do tronco da pirâmide sejam iguais. O volume da pirâmide (Figura 3), é dado por:

$$V = \frac{AB \cdot H}{3} = \frac{x^2}{3} \Rightarrow V = \frac{x^2}{3} \quad (II)$$

Logo,

$$v = \frac{V}{2} \Rightarrow v = \frac{x^2 \cdot H}{6} \quad (III)$$

Assim, substituindo (II) e (III) em (I), obtemos:

$$\frac{x^2 \cdot H}{6} = \frac{x^2 \cdot H}{3} \cdot \left(\frac{h}{H}\right)^3 \Rightarrow \frac{H}{6} = \frac{H}{3} \cdot \frac{h^3}{H^3} \Rightarrow \frac{H}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{h^3}{H^2} \Rightarrow \frac{H}{6} = \frac{h^3}{3H^2} \Rightarrow h^3 = \frac{3H^3}{6}$$

$$\Rightarrow h^3 = \frac{H^3}{2} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{H^3}{2}} \Rightarrow h = \frac{H}{\sqrt[3]{2}}$$

Observe que podemos verificar que, de fato, tal altura divide a pirâmide em duas partes de iguais volumes. Vejamos:

$$\frac{Ab}{AB} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 \Rightarrow \frac{Ab}{AB} = \left(\frac{\frac{H}{\sqrt[3]{2}}}{H}\right)^2 \Rightarrow \frac{Ab}{AB} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 \Rightarrow \frac{Ab}{AB} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow Ab = \frac{x^2}{\sqrt[3]{4}}$$

Portanto,

$$v = \frac{Ab \cdot h}{3} = \frac{\frac{x^2}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{H}{\sqrt[3]{2}}}{3} = \frac{\frac{H \cdot x^2}{\sqrt[3]{8}}}{3} = \frac{\frac{H \cdot x^2}{2}}{3} = \frac{H \cdot x^2}{6}$$

Espera-se que, com esse trabalho alunos de ensino médio, graduação e pós-graduados possam analisar e verificar a importância dos sólidos geométricos no cotidiano, em particular a pirâmide regular de base quadrada. Acreditamos contribuir para a exploração de novos trabalhos e uma nova abordagem ao estudo de tais poliedros, uma vez que o problema da divisão de uma pirâmide por um plano paralelo à base rendendo um tronco de pirâmide e uma nova pirâmide de volume menor que a inicial trata de uma situação que pode acontecer no nosso cotidiano.

■

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. TRAD. GOMIDE, E.; BIKLEN, S. K. **História da Matemática**. 2ª edição: Editora São Paulo, 1996, p. 486.

ROBINS, G. & SHUTE C. **The Rhind Mathematical Papyrus. An ancient Egyptian Text**. 1ª ed. New York: Dover publications Inc., 1987. P.60.

NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar, volume 2: Geometria Euclidiana Plana**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NETO, A. C. M. **Geometria – Coleção PROFMAT**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

