# COMPLETUDE DOS NÚMEROS REAIS E O TEOREMA DOS INTERVALOS ENCAIXANTES EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA – ALUNOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA PRECISAM REALMENTE DE ANÁLISE REAL?

Daniel Cordeiro de Morais Filho 1; Mireli Morais de Oliveira 2
1 UFCG, mireli_morais@hotmail.com
2 UFCG, demoraisfilho@gmail.com

## 1.Introdução

Um dos assuntos delicados que os livros didáticos de Matemática do Ensino Médio enfrentam é apresentar de modo satisfatório o conjunto dos números reais para alunos do primeiro ano. Para este fim, a passagem da apresentação dos números racionais para os números irracionais passam por um conceito importante e - segundo nossa opinião - não muito simples de ser repassado e formalizado: o conceito de completude dos números reais. Basicamente todo livro didático toca nesse assunto de forma mais ou menos velada, tentando sempre encontrar a melhor maneira de explicar o tema.

Nesse sentido, a ideia usada pela maioria dos livros didáticos é convencer os leitores que nem todo ponto da reta representa um número racional e depois associar biunivocamente o conjunto dos números reais aos pontos de uma reta e afirmar que essa reta numérica “não tem buracos”, ou seja, é "completa". Os livros tratam de convencer os leitores de que essa "reta" torna-se "completa" juntando-se os números irracionais ao conjunto dos números racionais, formando finalmente o conjunto dos números reais.

Já nos cursos de Análise, na maioria das vezes, um estudante da Licenciatura em Matemática e futuro professor, que usará os livros mencionados acima, aprende, após trabalhar com números racionais e números irracionais, que o conjunto dos números reais é um corpo arquimediano, ordenado e completo. Nos fixemos nessa noção de "completo", objetivo principal de nosso trabalho.

A definição de "completo", como podemos constatar em Lima (2016), Figueiredo (1996) e em Ávila(2001), livros geralmente adotados nessas disciplinas, é dada usando-se o chamado:

*Axioma de Dedekind: todo subconjunto de números reais não-vazio limitado superiormente possui um supremo.*

Dessa forma, alunos da Licenciatura aprendem como definição, que o conjunto dos números reais é completo por satisfazer o Axioma de Dedekind. Recordemos agora a ideia de ser completo, dada nos livros didáticos: o conjunto dos números reais é um conjunto completo pois a reta que o representa é completa, sem "buracos", e todo ponto da reta numérica é associado a um único número real e vice-versa. Admitindo essas duas ideias de completude, ficam as perguntas: o que o Axioma de Dedekind tem realmente a ver com a reta não ter buracos? O que apresentam os livros didáticos de Matemática para alunos do Ensino Médio sobre números reais tem a ver com o Axioma de Dedekind? Enfim, o que uma coisa tem a ver com outra. Aparentemente as duas ideias representam conceitos totalmente distintos, e, assim, certos conceitos ensinados na disciplinas de Análise Real parecem um mundo totalmente diferente daquele dos livros didáticos e da prática dos professores em suas salas de aula, mas não é esse o caso. Esse trabalho versa justamente estabelecer a conexão entre esses dois conceitos, um aprendido pelo aluno de licenciatura em uma disciplina de Análise e outro usado pelo professor de Matemática do Ensino Médio em sua sala de aula.

## 2. Metodologia

O presente trabalho consiste em um estudo comparativo, que discute e estabelece conexões entre as ideias de completude do conjunto dos números reais abordadas de forma velada nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, e as ideias desse conceito adotadas em livros de Análise Real. Deixamos claro que nosso alvo é o professor de Matemática, sua concepção sobre essse assunto e a importância do que aprendeu na universidade e do que ensinará em sua sala de aula.

## 3. Resultados e discussão

### 3.1 Entendendo a relação entre as duas ideias de completude

Para prosseguirmos é importante ressaltar o seguinte teorema, certamente visto em toda disciplina introdutória de Análise Real e que tem papel preponderante no nosso trabalho:

*Teorema dos Intervalos Encaixantes (TIE): dada uma sequência de intervalos fechados encaixantes de números reais (intervalos fechados que um contém o posterior) e cujos comprimentos tendem para zero, resulta que a intersecção de todos esses intervalos é um único número real.*

Muitas vezes pode ser que nos cursos de Análise os alunos não sejam alertados ou não lhes seja estabelecido que no conjunto dos números reais valer o Axioma de Dedekind é equivalente a valer o TIE. Logo, pode-se dar uma nova definição de completude e definir que o conjunto dos números reais é completo por nele valer o TIE.

Se poderia perguntar a vantagem dessa nova definição. Bem, a resposta é que o TIE é inteligível no Ensino Médio, pode ser melhor compreendido e é bem melhor de ser manipulável do que o Axioma de Dedekind, até mesmo porque o Axioma de Dedekind requer o conceito de supremo, que foge as expectativas do Ensino Médio, e daí, com apenas seu uso, abre-se uma aparente e enorme distância entre assuntos da Universidade e do Ensino Médio. Já o TIE é bem mais natural de ser trabalhado no contexto do Ensino Médio, pois intervalos são objetos bem conhecidos dessa fase e os livros os fazem, como dissemos, mesmo de maneira velada e sem mencionar isso. Comprovaremos esse fato mais adiante. Cabe sim, ao professor, conhecer e estar atento para esse fato.

Em nossa opinião, uma definição mais natural de completude que um aluno de licenciatura poderia receber é:

*Definição: o conjunto dos números reais chama-se completo por nele valer o TIE.*

Ao receber a definição de completude dessa forma, um aluno da licenciatura ficaria mais próximo do ambiente que encontrará mais tarde, que é a sala de aula e de seu material de trabalho, do qual faz parte o livro didático.

### 3.2 O Teorema dos Intervalos Encaixantes nos livros do Ensino Médio

Nos livros didáticos do Ensino Médio, é unânime se referir ao problema da diagonal do quadrado de lado unitário para introduzir os números irracionais.

Esse problema tenta traduzir a insuficiência do conjunto dos números racionais de encontrar um número $d$ que elevado ao quadrado resulte em $2$. Para encontrar o valor desse número, alguns livros do ensino médio utilizam intervalos encaixantes, pois, inicialmente percebe-se que $d$ está entre os números 1 e 2. Em seguida, calculando os quadrados dos números entre 1 e 2, percebe-se que $d$ está entre 1,4 e 1,5 já que 1,4 elevado ao quadrado é igual a 1,96 e 1,5 elevado ao quadrado é igual a 2,25. Novamente, toma-se números entre 1,4 e 1,5, resultando que $d$ está entre 1,41 e 1,42, pois 1,41 elevado ao quadrado é igual a ao número 1,9881 e 1,42 elevado ao quadrado é igual ao número 2,0164. Prosseguindo, percebemos que os autores vão cercando o número $d$ por meio de intervalos que se encaixam, há aí um processo infinito, cujo número procurado $d$ é justamente a interseção de todos esses intervalos. O professor deve entender porquê o processo para, porquê funciona. Na verdade, os autores desses livros didáticos estão usando o TIE e,
certamente, a completude dos números reais.

O Teorema dos Intervalos Encaixantes, garante que ao utilizar o procedimento anterior é possível encontrar, com a precisão que se deseje, a expressão decimal de raiz de 2.

## 4. Conclusões

Diante do relatado, a definição de completude dos números reais a ser apresentada ao licenciandos em disciplinas de Análise deveria usar o TIE, bem mais inteligível e que não emprega nenhum conceito desconhecido do Ensino Médio:

*Definição: o conjunto dos números reais é completo por nele valer o TIE.*

Dessa forma, usando o TIE, fica também mais "palpável", admitir que todo ponto da reta está associado a um número real e também justifica-se certas passagens de livros do Ensino Médio, como a apresentada na última seção desta apresentação. Dessa forma, a disciplina Análise Real pode se tornar um aliado do professor e não seu algoz.

Há controvérsias acerca do papel da disciplina Análise Real para licenciandos, se alunos da Licenciatura em Matemática deveriam ou não cursar essas disciplinas, motivo suscitador de alguns artigos a esse respeito, como Moreira e Vianna (2016) e Baroni (2015).

Não é nosso objetivo e nem nos propomos a discutir esse fato neste trabalho, mas acreditamos e advogamos que alguns conceitos da Análise Real são conhecimentos indispensáveis para os futuros professores de Matemática atuarem com sucesso em sua profissão, pois, dessa forma, podem entender com profundidade e conhecer a justificativa matemática de assuntos que ensinam, veladamente usados em livros didáticos.

Em nosso entendimento, o fato a ser levado em consideração é que as disciplinas de Análise Real não podem ser ensinadas para licenciandos desvinculadas da maneira como certos assuntos vistos nessas disciplinas são tratados por livros didáticos do Ensino Médio, de maneira velada ou não. Esses assuntos são compreendidos com profundidade com os conceitos de Análise, e foi isto que tentamos exemplificar neste trabalho. Entre outros fatores, o que pode faltar é justamente uma apresentação que ligue conceitos da Análise Real a assuntos abordados no Ensino Médio.

Esperamos ter dada uma colaboração neste sentido e estimulado os leitores a refletirem nesses pontos. O leitor pode agora responder à pergunta do título desse trabalho e dar livremente sua opinião.

O que apresentamos faz parte da dissertação de Mestrado da aluna Mireli Morais de Oliveira do PROFMAT-UFCG, sob orientação do professor Daniel Cordeiro de Morais Filho.

**Palavras-Chave:** Análise Matemática; Teorema dos intervalos encaixantes; Números reais.

## 5. Referências

ÁVILA, Geraldo S. de Souza. *Análise matemática para a licenciatura*. São Paulo: Edgard Blücher, 2001.

BARONI, R. L. S., *Algumas questões sobre o ensino de análise em cursos de formação de professores de matemática*, III Forum de Discussão: Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil-PUC/SP, 2015.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*, vol. 1, IMPA, 14 Ed., 2016.

FIGUEIREDO, D. G., *Análise I*, 2 Ed., LTC S.A, 1996.

MOREIRA, P. C. & VIANNA, C. R., *Por Que Análise Real na Licenciatura? Um Paralelo entre as Visões de Educadores Matemáticos e de Matemáticos*, Bolema, Rio Claro (SP), v. 30, n. 55, p. 515 - 534, 2016.