DINÂMICA POPULACIONAL E ECONOMIA: UMA APLICAÇÃO COM MODELOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Igor Raphael Silva de Melo(1); João Elder Laurentino da Silva (2); Josevandro Barros Nascimento(3); Célia Maria Rufino Franco (4);

(1)Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, igor.rapha6@gmail.com
(2)Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, joaoelder.10@hotmail.com
(3)Universidade Federal da Paraíba – UFPB, josevandrobarros@yahoo.com.br
(4)Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, celiafranco_m@hotmail.com

Resumo:

As aplicações das Equações Diferenciais estão entre as ferramentas matemáticas mais utilizadas na modelagem matemática. A modelagem tem como objetivo encontrar a taxa de variação com o tempo das grandezas que caracterizam um problema, ou seja, resolvendo a equação diferencial (ou sistema de equações diferenciais) que caracteriza determinado processo ou sistema, podem-se extrair informações relevantes sobre os mesmos e, possivelmente, prever o seu comportamento. Isso se torna imprescindível a partir do momento em que os modelos quase sempre, apresentam uma descrição aproximada e simplificada do processo real, por esse motivo a evolução dos estudos nesta área vem crescendo cada vez mais. Nesta perspectiva, o objetivo principal deste trabalho é estudar as equações diferenciais sob o ponto de vista da integração entre teoria - pratica e aplicações nas áreas do conhecimento, mais especificamente um estudo comparativo da solução da EDO com resultados de situações reais do cotidiano, envolvendo a população de uma cidade como também a capitalização de juros de uma empresa privada, de modo a contribuir com o ensino – aprendizagem dessa disciplina. Pode-se concluir que as equações diferenciais são ferramentas poderosas para modelar o comportamento geral de vários tipos de sistemas usuais e suas aplicações têm muito a contribuir a uma sociedade que vive em constante busca de conhecimento e compreensão do mundo.

Palavras-chave: Equações Diferenciais, Ensino – aprendizagem, Aplicações.

INTRODUÇÃO

Equações diferenciais são instrumentos aplicáveis na matemática e são utilizados para calcular o desenvolvimento de determinado sistema. Esta pesquisa foi desenvolvido com o conteúdo das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), especificamente de primeira ordem, com modelos que descreve, analogamente, a aplicação da economia do sistema financeiro e no comportamento da população humana, denominado por dinâmica populacional.

Os modelos matemáticos são aplicáveis atualmente em diversos campos das ciências como: Computação, Matemática. Artístico, Química, Biologia, Psicologia, Comunicação, Demografia, Astronomia, Engenharia (SODRÉ, 2017).

A modelagem matemática busca descrever a natureza (aspectos físicos e naturais) em uma linguagem comum. A compreensão dessas aplicações evolvem modelos matemáticos, simulações, implementações de softwares e métodos numéricos ou ainda uma análise aplicada.

Na natureza, podemos encontrar algumas leis que regem fenômenos físicos, ou seja, processos reais que se comportam de modo variacional (variáveis de estado) e nessa caso, a modelagem tem como objetivo encontrar a taxa de variação com o tempo das grandezas que caracterizam o problema, para isso a resolução de uma equação diferencial (ED) que caracteriza determinado processo ou sistema se torna essencial para extrair informações relevantes sobre os mesmos e, possivelmente, prever o seu comportamento.

Bassanezi (2013) assevera a importância das equações diferenciais modelagem matemática pode abordar de diversas maneiras situações - problemas dia a dia, dependendo do objetivo proposto ressalta que o papel das equações para modelar um problema:

> Um problema real não pode ser representado de maneira exata em toda sua complexidade por uma equação matemática ou um sistema de equações. Um modelo deve ser considerado apenas como um retrato ou uma simulação de um fenômeno e sua validação depende muito da escolha das variáveis e das hipóteses formuladas. É muito frequente em se tratando de modelar um fenômeno ou um experimento, obtermos equações para descrever as "variações" das quantidades (variáveis de estado) presentes e consideradas essenciais. Desta forma, as leis que regem tal fenômeno são traduzidas por equações de variações. Quando estas variações são instantâneas, a dinâmica do fenômeno se desenvolve continuamente e as equações matemáticas são denominadas equações diferenciais (BASSANEZI, 2013, p. 61 – 62).

As Equações Diferenciais podem ser classificadas da seguintes formas: **Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) -** se a função é desconhecida e depende de uma única variável independente, neste caso aparecem apenas derivadas simples. Já as **Equações Diferenciais Parciais (EDP) -** se a função desconhecida depende de diversas variáveis independentes (neste caso aparecem as derivadas parciais). **Sistema de Equações Diferenciais -** se existem duas ou mais funções que devem ser determinadas, sendo necessário um sistema de equações.

As resoluções de problema nas áreas das ciências que muito dos casos são realizadas através de análise de equações diferencias. Os modelos e resoluções não são tão simples e estar sujeito de suas aplicações. Neste caso a resolução de problemas desenvolve modelos que consiste em resolver a problemática por meio de definições ou das informações obtidos por meio de experimentações, modelamos matematicamente a questão e como os instrumentos no qual dispõem para a saída geram-se resultados numéricos e gráficos (CHAPRA E CANELA, 2008).

As equações diferenciais, apresenta um estudo comparativo da solução de um modelo de EDO com resultados de situações reais do cotidiano, envolvendo a população de uma cidade como também a capitalização de juros de uma empresa privada.

Atividade realizada com alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, campus Cuité. Cujo objetivo se insere na seguinte problemática: A necessidade de integrar teoria e prática no campo da Educação Matemática.

Essas reflexões reforçam a importância das pesquisas e estudos da área de modelagem matemática através de equações diferenciais que são desenvolvidas para a abrangência de problemas reais do nosso cotidiano e que expõe nas mais diferentes áreas das ciências.

METODOLOGIA

Este trabalho relata uma experiência vivenciada durante uma prática de ensino de EDs, durante o curso da própria disciplina Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) entre docente e discentes da Universidade Federal de Campina grande – UFCG, campus Cuité. Cuja proposta foi estudar soluções analíticas de EDOs sob o ponto de vista das aplicações de modo a entender e compreender resultados, bem como todo o processo da resolução e, ainda, a interpretação do modelo ao processo real dado.

Inicialmente, foi realizado um levantamento teórico acerca da modelagem matemática usada nesse contexto, para que assim possamos fundamentar a metodologia proposta através de sua construção teórica e sua solução analítica por meio de técnicas, assim como, normalmente é desenvolvido em cursos de graduação.

O primeiro modelo usado é o de Dinâmica populacional, no qual, hoje, encontramos diversos modelos que foram melhorados ao decorrer do tempo, dentre eles estão o Modelo Exponencial ou Modelo de Malthus Thomas, o Modelo Logístico ou Modelo de Verhurst , o Modelo de Gompertz e o Modelo de Montroll, mas nessa literatura iremos falar apenas do Modelo de Malthus, apresentando seu contexto histórico, definição e solução analítica.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Modelo Exponencial ou Modelo de Malthus Thomas

Em 1798, Robert Malthus tentou fazer uma estimativa do crescimento da população mundial. Ele considerou que o crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante, isto é, descarta fatores limitantes de crescimento, tal como taxas de natalidade e mortalidade, além de considerar que todos os indivíduos são idênticos, com o mesmo comportamento. Assim, ele criou o primeiro modelo de dinâmica populacional.(Autor, Ano)

A equação do Modelo de Malthus, considerando uma determinada população P, é descrita pelo problema de valor inicial:

$$\frac{dP}{dt} = \begin{cases} \frac{dP}{dt} = kP(t) \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

- k é a taxa de crescimento da população.
- P é a população atual
- P_0 é a população inicial
- t é o tempo

A solução do valor inicial é:

$P(t) = P_0 e^{kt}$

Demonstração:

Por hipótese,

$\frac{dP}{dt} = kP(t)$ *Resolvendo a EDO separável, temos:*

$\frac{dP}{P(t)} = kdt$ *integrando de ambos lados, obtemos:*

$\int \frac{dP}{P(t)} dt = \int kdt$ *Resolvendo a integral:*

$\ln|P| = kt + C$ *Aplicando a função exponencial:*

$P = e^{kt+C}$

$P = e^{kt} e^{C}$ *Chamando* $e^{c} = P_0$ *, em que* P_0 *é a população inicial, temos:*

$P(t) = P_0 e^{kt}$

Agora fazendo $t = 0$*:*

$P(0) = P_0 e^{k0}$

Portanto,

$P(0) = P_0$ □

O segundo modelo trabalhado é o de capitalização de juros usado nas ciências econômicas, onde possui a mesma modelagem de uma EDO de primeira ordem do modelo (1), portanto, contém a mesma solução analítica, apenas alterando as variáveis do problema, como mostra a seguir:

Economia: Capitalização de Juros

A equação que descreve o fenômeno no qual os juros são compostos continuamente, ou seja, seu crescimento é proporcional em cada instante, considerando S(t) uma determinada quantidade de capital no instante t, é descrito pelo problema de valor inicial:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} \frac{dS}{dt} = kS(t) \\ S(0) = S_0 \end{cases}$$

- k é a taxa de crescimento do investimento
- S é a quantidade do capital
- P_0 é o investimento inicial
- t é o tempo

A solução do valor inicial é:

$S(t) = S_0 e^{kt}$

Demonstração:

Por hipótese,

$\frac{dS}{dt} = kS(t)$ *Resolvendo a EDO separável, temos:*

$\frac{dS}{S(t)} = kdt$ *integrando de ambos lados, obtemos:*

$\int \frac{dS}{S(t)} dt = \int kdt$ *Resolvendo a integral:*

$\ln|S| = kt + C$ *Aplicando a função exponencial:*

$S = e^{kt+C}$

$S = e^{kt} e^{C}$ *Chamando* $e^c = S_0$ *, em que* S_0 *é a população inicial, temos:*

$S(t) = S_0 e^{kt}$

Agora fazendo $t = 0$*:*

$S(0) = P_0 e^{k0}$

Portanto,

$S(0) = S_0$ □

Logo após a explanação desses conceitos foi realizado a aplicação desses dois modelos através da resolução de problemas com dados reais da situação – problema.

Notamos que uma das principais dificuldades percebidas na atividade foi no momento de interpretar as situações – problemas e reconhecer as variáveis para que então fosse possível modelar e resolver a EDO, pois mesmo após descrever as equações do modelo ainda não sabiam distinguir as variáveis presentes no problema.

Ora, apesar de estarmos tratando de soluções analíticas devemos considerar que cada modelo se comporta nas mais variadas formas, não havendo uma receita pronta para determinar tal processo. Diante disso, Boyce e DiPrima (2012) apresenta alguns passos característicos do processo de modelagem, que são eles:

i. Identificação das variáveis que caracterizam o sistema;
ii. Definição das unidades de medida das variáveis;
iii. Determinação das leis (teóricas ou empíricas) que regem as relações entre as variáveis e a dinâmica do sistema;
iv. Expressar as leis em termos das variáveis identificadas.

Ou seja, nessa perspectiva, apresentamos a problematização da aplicação e discutimos como seria o processo para identificar cada variável dependente e independente, as unidades de medidas de casa situação e se a modelagem citada era coerente com o problema dado, pois devemos validar se as leis correspondem e obedecem as relações entre as variáveis e a dinâmica do processo da aplicação.

A seguir, temos as duas problematizações, sendo a primeira sobre o crescimento populacional de uma cidade no interior do Rio Grande do Norte com dados reais do ultimo censo de 2016 e o segundo, uma situação de capitalização de juros de um empresa privada fictícia.

- **Situação Problema 1:**

Jaçanã é uma cidade pacata no interior do Rio Grande do Norte e no ano 2000 a população do município era de 7677 habitantes e em 2010 essa população passou para 7925. De acordo o modelo de crescimento populacional de Malthus, qual será a população estimada para 2016?

Resolução:

Temos, $P(t) = P_0 e^{kt}$

Perceba que $P(0) = 7677$ *o que implica que*

$P(0) = P_0 e^{0t}$

$7677 = P_0$

Portanto, $P_0 = 7677$

Assim, $P(t) = 7677e^{kt}$

Note que no tempo de 10 anos:

$P(10) = 7677e^{10k}$

$7925 = 7677e^{10k}$

$ln\left(\frac{7925}{7677}\right) = 10k$

$k = \frac{ln\left(\frac{7925}{7677}\right)}{10}$

$k \cong 0{,}00318$

Substituindo em k em $P(t) = 7677e^{kt}$

$P(t) = 7677e^{0{,}00318t}$

Fazendo agora para $P(16)$*, obtemos*

$P(16) = 7677e^{0{,}00318 \cdot 16}$

$P(16) = 8077$

Portanto temos que a população em 2016 é de 8077 *habitantes.*

Comparando os resultados:

- População prevista pelo modelo de Malthus para 2016 é de 8077 *habitantes.*
- População real de 2016 segundo o IBGE é de 8949 *habitantes*.

Observamos que há uma diferença de 872 *habitantes.* Ou seja, uma discrepância de 9,75% do valor real, um valor aceitável para cálculos de modelagem matemática.

- **Situação Problema 2:**

Suponha que um investimento renda juros continuamente. Qual será o saldo após 12 meses se:

a) A taxa de juros da Empresa A for de 0,7% ao mês e o deposito inicial for 100 reais?

b) A taxa de juros Empresa B for de 4,5% ao mês e o deposito inicial for 100 reais?

c) A que tipo de empresa você pode relacionar essas duas taxas de juros ? Represente graficamente.

Resolução:

a) Temos, $S(t) = S_0 e^{kt}$

Perceba que $S(0) = 100$ o que implica que

$S(0) = S_0 e^{0t}$

$100 = S_0$

Portanto, $S_0 = 100$

Assim, $S(t) = 100e^{kt}$

Note que 0,7% a.m. corresponde a 0.007 (sabendo que 100% = 1 inteiro) :

Logo, $k = 0{,}007$

Então para 12 meses. Temos:

$S(12) = 100e^{0{,}007 \cdot 12}$

$S(12) = 108{,}76$

Portanto o capital acumulado em 12 meses é de $108{,}76$ reais

b) Temos, $S(t) = S_0 e^{kt}$

Perceba que $S(0) = 100$ o que implica que

$S(0) = S_0 e^{0t}$

$100 = S_0$

Portanto, $S_0 = 100$

Assim, $S(t) = 100e^{kt}$

Note que 4,5% a.m. corresponde a 0.045 (sabendo que 100% = 1 inteiro) :

Logo, $k = 0.045$

Então para 12 meses. Temos:

$S(12) = 100e^{0.045 \cdot 12}$

$S(12) = 171{,}60$

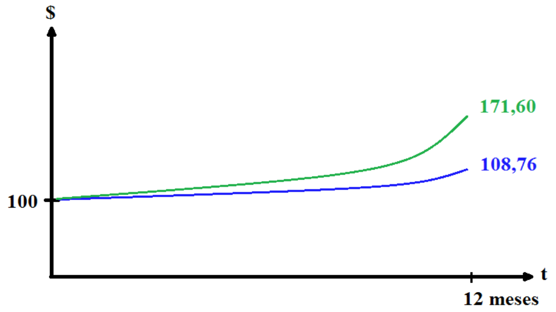
Portanto o capital acumulado em 12 meses é de $171{,}60$ reais.

Observamos que há uma diferença entres as duas empresas de 62,84 reais.

Graficamente:

$a)\ S(t) = 100e^{0{,}007t}$

$b)\ S(t) = 100e^{0{,}045t}$



Fonte: Própria.

Na resolução dos problemas, após o primeiro passo de interpretação e identificação houve coerência na solução analítica da EDO, obtendo resultados corretos, No entanto é nesse momento que a intervenção é necessária, pois surgem os seguinte questionamentos: " - Esses resultados respondem a problemática da aplicação ? - O que significa esse resultado no âmbito do processo real ?".

Ao trabalhar com modelagem matemática e aplicações devemos sempre saber que deve haver cuidado e coerência quanto às soluções e resultados, pois a matemática aplicada tem como objetivo descrever situações físicas e naturais, na qual fornecem, quase sempre, uma descrição aproximada e simplificada do processo real, por esse motivo a evolução dos estudos nesta área vem crescendo cada vez mais, salientando ainda a emergência de um ensino ampliado e satisfatório dessa área do conhecimento.

CONCLUSÕES

Portanto, acreditamos que através desta metodologia não só salientamos a importância da das Equações Diferenciais nas áreas de conhecimento, como a partir das analises, observações, cálculos analíticos e discussões realizadas despertamos uma variedade de possibilidades de aplicarmos e, de fato, integrarmos conhecimentos adquiridos com problemas da vida diária em que vivemos, além de proporcionar uma aprendizagem significativa acerca das Equações Diferenciais Ordinárias num curso de Licenciatura de Matemática. Conforme foi mostrado que com o modelo de Malthus podemos prever o crescimento exponencial da população, mesmo um pouco equivocado e criticado em alguns conceitos, este modelo teve grande importância, pois serviu base para a evolução de outros modelos criados posteriormente. E em relação ao modelo de capitalização de juros, percebemos uma desvantagem para os clientes no sistema em que vivemos, levando em consideração que os banqueiros lucram 4,5% ao mês em cima de um determinado valor, enquanto seus clientes lucram apenas 0,7%, chegando a conclusão que os banqueiros lucram muito mais levando em consideração o mesmo valor investido.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. **Temas & Modelos**. Santo André:UFABC, 2013.

BOYCE, W.; DIPRIMA, R. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9a Edição. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. ***Métodos numéricos para engenharia***. São Paulo: McGraw-Hill, 2008.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação matemática: da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 1996.

IGLIORI, S. B. C.; OLIVEIRA, E. A.. **Ensino e aprendizagem de equações diferenciais: um levantamento preliminar da produção científica**. EM TEIA| Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v. 4, n. 2, 2013.

JAWORSKI, B. **Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching**. Journal of Mathematics Teacher Education, 9, 2006.

LIMA, Lauro de Oliveira. **Piaget para principiantes**. 2. ed. São Paulo: Summus, 1980.

PIAGET, Jean. **O nascimento da inteligência na criança**. 4. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1982..

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. Título original: How to solve it, 1945.

SODRÉ, Ulysses. Modelos matemáticos. **Londrina: UEL**, 2007.