USANDO CONCEITOS MATEMÁTICOS PARA A CONSTRUÇÃO DO STOMACHION O QUEBRA-CABEÇAS GEOMÉTRICO.

Natham Cândido de Oliveira1; Judcely Nytyeska de Macedo Oliveira Silva1; Leonardo Lira de Brito1.

Universidade Federal de Campina Grande, nathan.oliveia_@hotmail.com,
Universidade Federal de Campina Grande, ufcg.juudy@gmail.com
Universidade Federal de Campina Grande leonardoliradebrito@gmail.com

Resumo: A presente pesquisa trata de uma proposta de atividade para ser utilizada com alunos do ensino médio no ensino de Matemática. Esse material didático de manipulação é um quebra-cabeça geométrico chamado Stomachion de autoria atribuída a Arquimedes. Que tem como objetivo trabalhar área de figuras planas. Os materiais necessários para a sua confecção são: papel A4 milimetrado; E.V.A.(Abreviatura do nome em inglês ethil Vinil Acetat); régua; lápis; tesoura e cola. Na construção deste quebra-cabeça destacando algumas etapas, que começa com a marcação de pontos no papel milimetrado utilizando os conceitos de ponto e plano cartesiano em seguida utilizamos as coordenadas de cada ponto para traçar determinadas retas e formar as figuras geométricas desejadas. Apresentamos também as regras necessárias para sua montagem. Por fim, apresentamos o cálculo da área das peças do Stomachion, utilizando o teorema de Pick e os determinantes que podem ser explorado em sala de aula junto aos alunos do ensino médio.

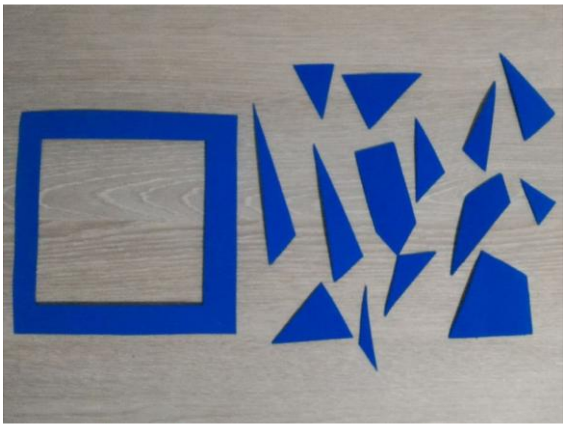
Palavras Chaves: Stomachion, quebra-cabeça, Teorema de Pick.

Introdução

Lorenzato (2006) define material didático como “qualquer instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem”. Então, quebra-cabeça, tabuleiro, cartas, jogos, lápis, quadro negro e etc, de acordo com a definição do autor o Stomachion é considerado um material didático de fácil construção e é um material manipulável.

A invenção deste quebra-cabeça geométrico é atribuída a Arquimedes. Stomachion é conhecido também com caixa de Arquimedes, embora não se saiba o significado preciso desta palavra Stomachion (Derivada da palavra grega para estômago), alguns historiadores explana que talvez por provocar dores de estômago a quem pense muito no assunto. O Stomachion é constituído por um conjunto de 14 peças de várias formas poligonais.

Figura 01: Stomachion



Fonte: Autoria própria

O Stomachion é uma ferramenta de fácil confecção onde o aluno já no início da construção do quebra-cabeça utilizara conceitos matemático tais como: ponto e plano cartesiano como é possível observar na figura 02

Ao final os alunos dispõem de um material que possibilitara manipular e trabalhar alguns conceitos matemáticos de forma mais concreta, assim como é recomendado pelos Parâmetros curriculares de matemática PCN.

Metodologia

Trata-se de uma proposta de atividade que visa explanar sobre o quebra-cabeça o Stomachion. O estudo do mesmo ocorreu em março de 2018.

O stomachion ou a caixa de Arquimedes quando confeccionado poderá ser utilizado como um recurso para o ensino de diversos assuntos matemático. O objetivo da confecção passo a passo do Stomachion é fornecer condições necessárias para que um docente consiga confeccionar junto aos seus alunos, explorando os conceitos matemáticos envolvidos.

Iniciamos a confecção do quebra-cabeça explorando os conceitos de plano cartesiano, onde vamos considerar um plano definido por um par de retas perpendiculares X e Y, a linha vertical é definida como eixo das ordenadas (Y), a linha horizontal definimos como o eixo das abscissas (X). Com a intersecção dessas linhas temos a formação de 4 quadrantes, mas para a confecção iremos utilizar apenas o 1º (Primeiro) quadrante. Com a ajuda de uma tesoura cortamos a folha milimetrada ao meio, obtendo dois pedaços de 14x20, assim conseguiremos economizar algumas folhas.

Pediremos aos alunos, para traçar na borda do papel milimetrado com ajuda de uma régua duas retas perpendiculares obtendo o 1º (Primeiro) quadrante de um plano cartesiano.

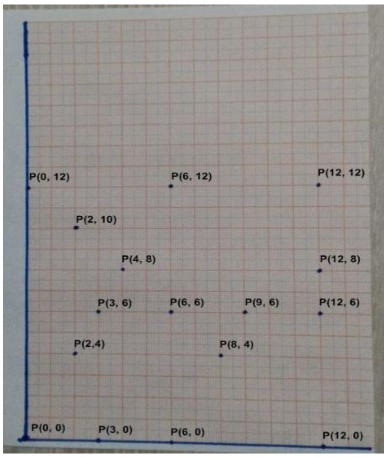
Disponibilizaremos para os alunos uma tabela contendo 16 (dezesseis) pontos para que marquem no papel A4 milimetrado, assim assimilando os conceitos de ponto e plano cartesiano. A tabela segue abaixo:

Tabela 01: pontos para serem marcados no papel A4 milimetrado.

Nº	X	Y	(X, Y)	Nº	X	Y	(X, Y)
I	0	0	(0, 0)	IX	0	12	(0 ,12)
II	3	0	(3, 0)	X	2	10	(2, 10)
III	6	0	(6, 0)	XI	2	4	(2, 4)
IV	12	0	(12, 0)	XII	3	6	(3, 6)
V	12	6	(12, 6)	XIII	4	8	(4, 8)
VI	12	8	(12, 8)	XIV	6	6	(6, 6)
VII	12	12	(12, 12)	XV	8	4	(8, 4)
VIII	6	12	(6, 12)	XVI	9	6	(9, 6)

Fonte: Autoria própria

Figura 02: Pontos marcados no papel A4 milimetrado

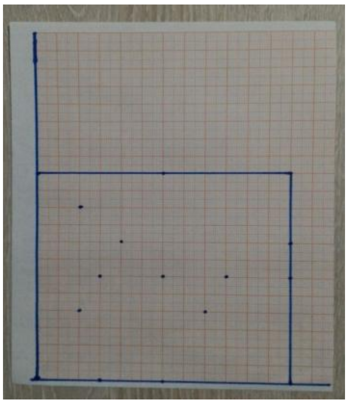


Fonte: Autoria própria

Após realizar essa etapa de marcas os 16 (Dezesseis) pontos, iremos traças algumas retas ligando determinados pontos, obtendo as figuras geométricas desejadas.

A primeira reta que iremos traçar é do ponto de número IV de coordenadas P(12, 0) ao ponto VII de coordenadas P(12, 12), a reta também passa pelos pontos V e VI, em seguida traçamos uma reta do ponto VII de coordenadas P(12, 12) ao ponto IX de coordenadas P(0, 12), que também passa pelo ponto VIII, após traças as duas retas citadas anteriormente obtemos uma figura geométrica de quatro lados medindo 12x12, como mostra a imagem a seguir.

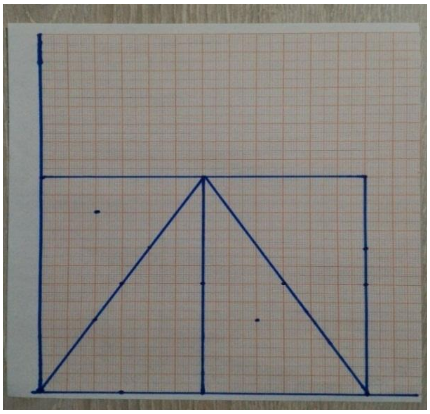
Figura 03: Ligando os pontos no papel A4 milimetrado



Fonte: Autoria própria

Agora iremos traçar uma reta do ponto III de coordenadas (6, 0) ao ponto VIII de coordenadas P (6, 12), que irá passa pelo ponto XIV, em seguida traçamos outra reta do ponto I de coordenadas P (0, 0) ao ponto VIII de coordenadas P (6, 12), que passara pelos pontos XI, XII e XIII, traçamos mais uma reta do ponto IV de coordenadas P (12, 0) ao ponto VIII de coordenadas P (6, 12), que passara pelo ponto XVI, como mostra a imagem a seguir:

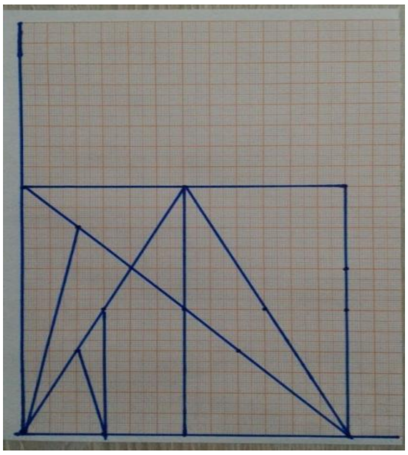
Figura 04: Ligando os pontos no papel A4 milimetrado



Fonte: Autoria própria

Traçamos agora uma reta do ponto IV de coordenadas P (12, 0) ao ponto IX de coordenadas P (0, 12). Outra reta do ponto I de coordenadas P (0, 0) ao ponto x de coordenadas P (2, 10), mas duas retas saindo do ponto II de coordenadas P (3, 0) para os pontos XI e XII de coordenadas P (2, 4) e P (3, 6), como mostra na imagem abaixo.

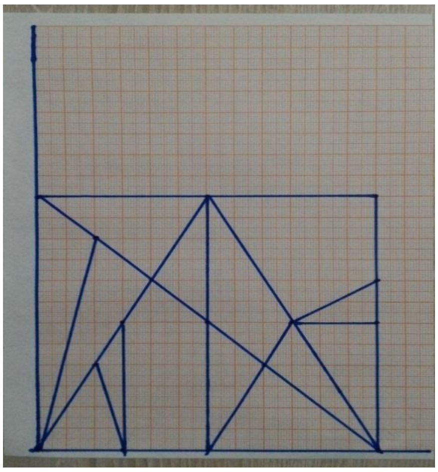
Figura 05: Ligando os pontos no papel A4 milimetrado



Fonte: Autoria própria

Para finalizar iremos traças mais 3 (Três) retas, portanto traçamos uma reta do ponto III de coordenadas (6, 0) ao ponto XVI de coordenadas P (9, 6), que passara pelo ponto XV. Por fim traçamos agora duas retas partindo do ponto XVI de coordenadas P (9, 6) aos pontos V e VI de coordenadas P (12, 6) e P (12, 8). Finalizamos agora todas as retas necessárias para confecção do quebra-cabeça. Como mostra a imagem abaixo.

Figura 06: Ligando os pontos no papel A4 milimetrado



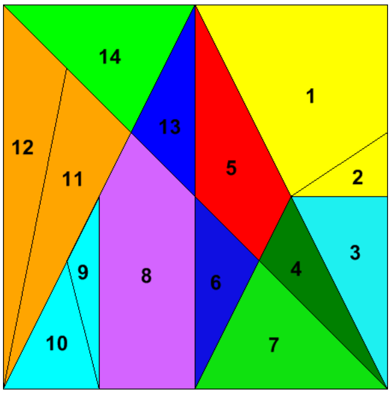
Fonte: Autoria própria

Com todas as retas necessárias feitas, iremos para o próximo passo. Que consiste em colar o papel milimetrado em um pedaço de E.V.A., com as seguintes dimensões 16x16 cm. Para finar com ajuda de uma tesoura recortamos as 14 (quatorze) peças do quebra-cabeça. Como mostra a imagem a seguir.

Resultados e discussão

O Stomachion original consiste em 14 peças que formam um quadrado como ilustrado em uma figura abaixo:

Figura 07: Stomachion

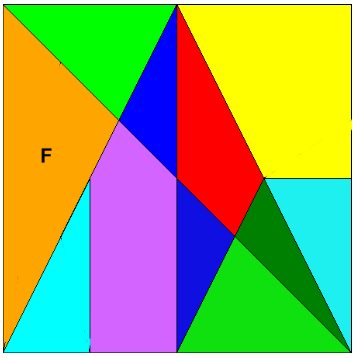


Fonte:http://4umi.com/play/stomachion/animation.php Acessado em: 21 de março de 2018.

Iremos no decorrer do texto apresentar as condições ou como se preferir regras necessárias para a montagem do Stomachion. A primeira condição ou regra que iremos apresentar para darmos início a sua montagem é que “As peças 1 e 2, 9 e 10 e 11 e 12, devem estar sempre juntas formando apenas uma peça”.

Sendo assim consideremos apenas 11 peças, ou seja; obtemos então um quebra-cabeça de 11 peças, ilustrado na figura abaixo:

Figura 08: Stomachion



Fonte: http://4umi.com/play/stomachion/animation.php Acessado em: 21 de março de 2018.

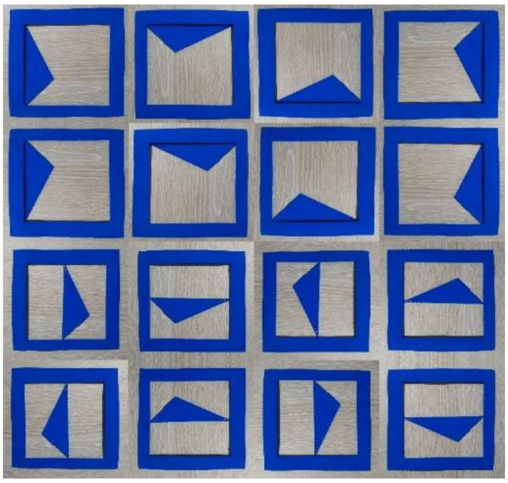
A peça marcada com a letra F titularemos de peça fundamental. Antes de apresentamos a segunda condição ou regra para um melhor entendimento do próximo passo vai esclarecer primeiro os conceitos de reflexão e rotação.

Uma reflexão de uma imagem é transformada noutra imagem igual, na qual todos os seus pontos estão à mesma distância do eixo de simetria que os pontos originais. O segmento formado pelo ponto original e o ponto transformado formam uma perpendicular relativamente ao eixo de simetria, ou seja, uma imagem é invertida em relação a uma reta, transformando-se numa imagem espelhada.

A rotação corresponde simplesmente em rodar a imagem, ou seja, todos os pontos da mesma rodam à volta de um ponto que podemos definir como o centro de rotação, a rotação e definida por um determinado ângulo, podendo ocorrer no sentido positivo (horário) ou negativo (anti-horário).

Sabendo a princípio dos conceitos de rotação e reflexão, apresentaremos agora a segunda condição ou regra "A peça F (peça fundamental) deve ocupar uma das seguintes posições".

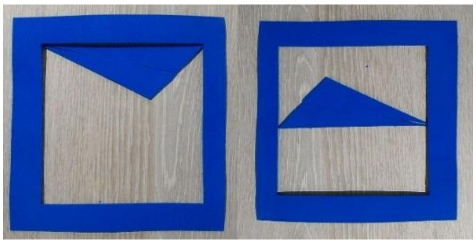
Figura 09: rotação e reflexão da peça fundamental



Fonte: Autoria própria

Em outras palavras, em qualquer formação ou montagem a peça F (peça fundamental) deve ocupar uma das 2 (Duas) posições seguintes;

Figura 10: rotação e reflexão da peça fundamental



Fonte: Autoria própria

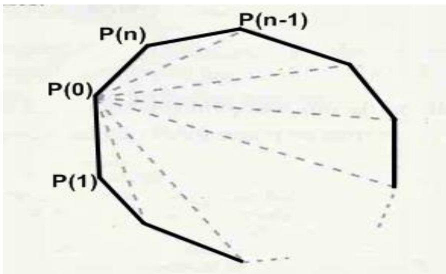
Note que ao rotacionar a peça F (peça fundamental) em torno do ponto central, segundo os ângulos 0°, 90°, 180° e 270° obtemos 4 (quatro) posições em relação a cada uma das 2 (duas) posições iniciais que totalizam juntas 8 (oito) posições. Por cada uma rotação temos sua reflexão, ou seja, obtemos ao todo 16 (dezesseis) posições, que chamaremos de posições fundamentais. Estes detalhes parecem irrelevantes, mas é de suma importância para o êxito da montagem.

Pela Figura 07, o Stomachion é composto por 14 (Quatorze) peças sendo 11 (Onze) triângulos, 2 (Dois) quadriláteros e 1 (Um) pentágono. Iremos apresentar duas maneiras distintas para calcular a área de cada peça do Stomachion. A primeira é feita através de determinantes e a segunda sera realizada utilizando o teorema de Pick. Ambos assuntos podem ser exploradas por estudantes do Ensino Médio ao estudarem áreas.

A área de uma região delimitada por um poligono covexo de vertices P(1), P(2), ... , P(n-1), Pn, percorrido no sentido anti-horário é dado por:

$$S = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} X(0) & Y(0) \\ X(1) & Y(1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X(1) & Y(1) \\ X(2) & Y(2) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} X(n-1) & Y(n-1 \\ X(n) & Y(n) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X(n) & Y(n) \\ X(0) & Y(0) \end{vmatrix}\right).$$

Figura 11: Polígono convexo com n+1 vértices



Fonte: Autoria própria

Fixando o vertice em P(0), dividindo o poligono nos seguintes triangulos adjacentes, temos P(0)P(1)P(2), P(0)P(2)P(3), ... , P(0)P(n-1)P(n). Logo poderemos calcular a área do poligono somando a área dos “n” triangulos, isto é: S = A(1) + A(2) + ... + A(n-1) + A(n)

Logo a equação pode ser expressa por;

$$S = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} X(0) & Y(0) \\ X(1) & Y(1) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} X(n-1) & Y(n-1) \\ X(n) & Y(n) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X(n) & Y(n) \\ X(0) & Y(0) \end{vmatrix}\right)$$

Para enunciarmos o teorema de Pick precisamos antes de uma definição:

Definição: uma rede no plano é um conjuntos de pontos regularmente distribuidos em retas perpendiculares, de modo que a distancia de cada ponto seja igual a 1 (uma) unidade tanto na horizontal como na vertical.

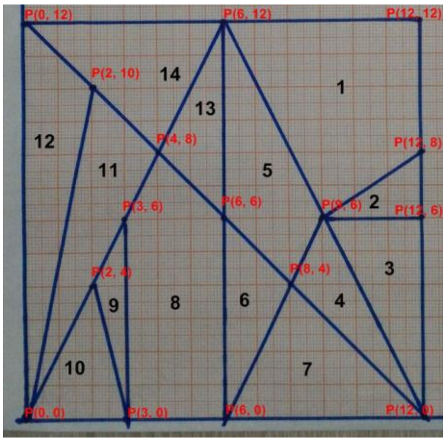
Teorema: A área de um poligono simples cujo vertices são pontos de uma malha quadriculada é dada pela forma:

$$S = \frac{F}{2} + i - 1$$

Onde F é o numero de pontos da malha quadriculada, situada sobre o contorno (Perimetro) do poligono e i é o numero de pontos da malha quadriculada, situados no interior do poligono.

O Stomachion forma um quadrado com lado medindo 12 unidades e, além disso, todas as coordenadas dos vértices são inteiras. Aplicaremos a proposição anteriormente apresentado do cálculo de área pelo determinante e o teorema de Pick a fim de determinarmos a área de cada uma das peças do quebra-cabeça.

Figura 12: Stomachion no plano cartesiano



Fonte: Autoria própria

Inicialmente iremos utilizar para o calculo da área o determinante:

$$A1 = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 12 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 12 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 12 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}\right) = \frac{0+48+72-72}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

$$A2 = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 12 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}\right) = \frac{-18+24+0}{2} = 3 \text{ cm}^2$$

$$A3 = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 12 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}\right) = \frac{-72+72+18}{2} = 9 \text{ cm}^2$$

$$A4 = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 12 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}\right) = \frac{-48+72-12}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

$$A5 = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}\right) = \frac{72-36-30+18}{2} = 12 \text{ cm}^2$$

$$A6 = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}\right) = \frac{24+24+36}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

$$A7 = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 12 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}\right) = \frac{0+48+-24}{2} = 12 \text{ cm}^2$$

A8 = $\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}3 & 6\\3 & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}3 & 0\\6 & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}6 & 0\\6 & 6\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}6 & 6\\4 & 8\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}4 & 8\\3 & 6\end{vmatrix}\right) = \frac{-18+0+36+24+0}{2} = 21$ cm²

A9 = $\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}2 & 4\\3 & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}3 & 0\\3 & 6\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}3 & 6\\2 & 4\end{vmatrix}\right) = \frac{-12+18+0}{2} = 3$ cm²

A10 = $\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}0 & 0\\3 & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}3 & 0\\2 & 4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2 & 4\\0 & 0\end{vmatrix}\right) = \frac{0+12+0}{2} = 6$ cm²

A11 = $\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}0 & 0\\4 & 8\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}4 & 8\\2 & 10\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2 & 10\\0 & 0\end{vmatrix}\right) = \frac{0+24+0}{2} = 12$ cm²

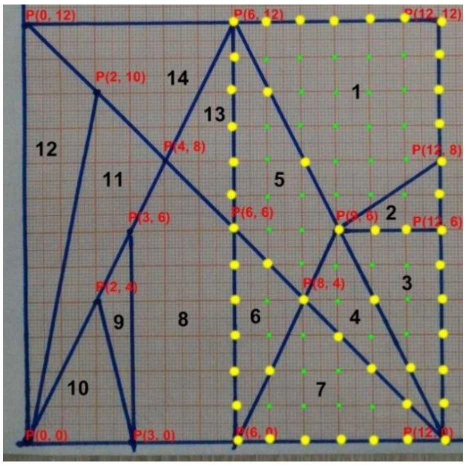
A12 = $\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}0 & 0\\2 & 10\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2 & 10\\0 & 12\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0 & 12\\0 & 0\end{vmatrix}\right) = \frac{0+24+0}{2} = 12$ cm²

A13 = $\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}4 & 8\\6 & 6\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}6 & 6\\6 & 12\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}6 & 12\\4 & 8\end{vmatrix}\right) = \frac{-24+36+0}{2} = 6$ cm²

A14 = $\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}0 & 12\\4 & 8\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}4 & 8\\6 & 12\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}6 & 12\\0 & 12\end{vmatrix}\right) = \frac{-48+0+72}{2} = 12$ cm²

Agora, usaremos o teorema de Pick para determinar a área das mesmas peças do quebra-cabeça de forma diferente, considere a imagem abaixo.

Figura 13: Stomachion no plano cartesiano



Fonte: Autoria própria

Para facilitar o entendimento dos calculos demarcamos alguns vertices de modo que, F é o numero de pontos da malha quadriculada, situada sobre o perimetro do poligono representada pelas bolinhas de diamentro maior de cor amarela e i que corresponde ao numero de pontos da malha quadriculada situados no interior do poligono, representadas pelas bolas de diamentro menor de cor verde. Note que na figura geometrica de numero 1 (Um) temos 14 bolinhas amarelas, que representa a quatidade de vertices situada sobre o perimetro da figura que é representada pela letra F e 18 bolinhas verdes situadas no interior do poligono que representamos como i, sabendo dessa informações partiremos para os calculos.

$A1 = 18 + \frac{14}{2} - 1 = 24\ cm^2$

$A2 = 1 + \frac{6}{2} - 1 = 3\ cm^2$

$A3 = 4 + \frac{12}{2} - 1 = 9\ cm^2$

$A4 = 3 + \frac{8}{2} - 1 = 6\ cm^2$

$A5 = 7 + \frac{12}{2} - 1 = 12\ cm^2$

$A6 = 2 + \frac{10}{2} - 1 = 6\ cm^2$

$A7 = 7 + \frac{12}{2} - 1 = 12\ cm^2$

$A8 = 13 + \frac{18}{2} - 1 = 21\ cm^2$

$A9 = 0 + \frac{8}{2} - 1 = 3\ cm^2$

$A10 = 4 + \frac{6}{2} - 1 = 6\ cm^2$

$A11 = 9 + \frac{8}{2} - 1 = 12\ cm^2$

$A12 = 5 + \frac{16}{2} - 1 = 12\ cm^2$

$A13 = 2 + \frac{10}{2} - 1 = 6\ cm^2$

$A14 = 7 + \frac{12}{2} - 1 = 12\ cm^2$

Portanto apresentamos duas maneiras que permitem calcular a área de cada uma peças do quebra-cabeça,com eficiência e utilizando recursos que um aluno de ensino médio com ajuda do professor podem realizar.

Conclusão

A disciplina de matemática é encarada pelos alunos como uma disciplina difícil e muito abstrata, talvez pela maneira que é ministrada as aulas. Sempre ouvimos comentários que a disciplina de matemática e muito difícil ou que nunca empregara a mesma em sua vida, esses questionamentos surgem muitas vezes devido o ensino tradicional, onde o professor escreve no quadro negro os conteúdos que estima ser importante para serem aplicados.

Essa metodologia de reprodução mecânica, não contribui de maneira eficaz para que os alunos fiquem estimulados e motivados a prenderem matemática. Assim surge a necessidade de desenvolvimento e de implementação de novas práticas pedagógicas de modo a tornar essa disciplina atrativa e motivadora para os alunos.

Assim surgem vários materiais manipuláveis tais como o quebra cabeça apresentando, jogos, uso de tecnologias dentre muitas outras possibilidades voltados para o processo de ensino aprendizagem da matemática.

Neste trabalho de construção do Stomachion utilizando conceitos matemáticos, como foi visto plano cartesiano, áreas da figuras geométrica utilizando o determinante e o Teorema de Pick, mostrou como os jogos ou quebra-cabeça podem ajudar em sala de aula, tornando as aulas mais divertidas e prazerosas. Para isso, não devemos tornar o uso do jogo algo obrigatório, pois ele deve ser apresentado para o aluno apreender os conteúdos de maneira prazerosa.

Bibliografia

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais : matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1997. 142p.

LORENZATO. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. 3 ed. Campinas – SP: Editora Autores Associados, 2006.

REIS e SILVA, **Geometria Analítica.** 2.ed. Rio de Janeiro - RJ: Editora LTC – Livros Técnicos e Científicos Editoras S.A., 1996.

STEINBRUCH e WINTERLE, **Álgebra linear.** 2 ed. São Paulo – SP: Editora Makron Books, 1087.