UTILIZAÇÃO DO ELIPSÓGRAFO DE ARQUIMEDES COMO MATERIAL DIDÁTICO

Natham Cândido de Oliveira1; Judcely Nytyeska de Macedo Oliveira Silva1; Leonardo Lira de Brito1

Universidade Federal de Campina Grande, nathan.oliveia_@hotmail.com,

Universidade Federal de Campina Grande, ufcg.juudy@gmail.com

Universidade Federal de Campina Grande leonardoliradebrito@gmail.com

Resumo: O presente trabalho trata-se de uma proposta de atividade a partir de um mecanismo articulado chamado Elipsógrafo de Arquimedes, que foi desenvolvido pelo filósofo e matemático da Antiguidade Grega, Arquimedes, e que permite a visualização do traçado de curvas elípticas. Este trabalho tem como objetivo divulgar essa ferramenta didática, que pode ser utilizada, especialmente, por professores de matemática em sua prática pedagógica para auxiliar na abordagem de curvas elípticas. No decorrer deste artigo, estudamos alguns pesquisadores da área da história da Matemática que desenvolveram ensaios sobre a evolução das cônicas; detalhamos as medidas e peças fundamentais para construção do elipsógrafo; descrevemos teoricamente seu funcionamento; apresentamos conteúdos que podem ser trabalhados com os seus alunos, de modo que, desperte discussões de idéias em aulas, de forma a contribuir para construção de um pensamento crítico sobre os assuntos abordados; além disso, com o auxílio dessa ferramenta, demonstramos matematicamente como chegar à equação da elipse mostrando suas propriedades e relações com o dispositivo.

Palavras chaves: Elipsógrafo, Arquimedes, Curva Elíptica.

Introdução

Ainda que seja eficaz, ensinar matemática atualmente torna-se um desafio para qualquer educador, uma vez que possui vários fatores que dificultam o método de ensinar.

> Tradicionalmente a Matemática é tida como uma ciência rigorosa, formal e de difícil compreensão. Tais concepções levam a uma prática pedagógica impessoal e, por vezes, dissociada da realidade, o que torna o ensino e a aprendizagem processos cercados de dificuldades. Sabe-se que ainda predomina no meio educacional a ideia de que o professor deve apresentar definições, resolver exemplos e exigir exercícios de "fixação". O aluno, por sua vez, deve demonstrar sua aprendizagem através da reprodução da referida metodologia emprega pelo professor. Porém, este modelo de ensino tem sido cada vez mais questionado, na medida em que, reprodução de atividades não significa compreensão e, consequentemente, não permite a construção de conhecimentos. (SILVA, 2014, p 01)

Assim, os materiais manipuláveis são ferramentas que podem auxiliar no aprendizado do aluno e que está a serviço do docente. Além disso, o mesmo quando bem explorado tornar as aulas de matemática dinâmica, criativa e de fácil compreensão, sua utilização proporciona resultados significativos para uma melhor qualidade no ensino da disciplina, pois ao incorporar esses materiais permiti a assimilação da teoria matemática com a pratica.

De acordo com Lorenzato (2006), o professor tem uma função muito importante no êxito da aprendizagem do aluno. Segundo o autor, mesmo que o docente tenha a sua disposição um bom material didático, não significa que o profissional tem a garantia de uma aprendizagem significativa, é preciso saber utilizar corretamente estes materiais em sala de aula. Então, os recursos didáticos, sejam eles, os jogos, materiais manipuláveis e etc. Só serão bem aproveitados no ensino e aprendizagem se os mesmos for bem planejado pelo docente na busca de aprimorar a aprendizagem dos alunos, não como soluções para resolver tudo e sim um recuso a mais.

Os materiais manipuláveis são ferramentas que podem contribuir para desenvolvimento dos conceitos matemáticos, auxiliando a compreensão das situações mais abstratas. Porém ao utilizar os materiais didáticos o docente é conhecedor de que nenhum material sozinho é garantia de sucesso no processo de ensino aprendizagem, pois os mesmo devem ser utilizados pelos docentes após um bom planejamento pedagógico.

Nessa perspectiva, o elipsógrafo e uma ferramenta com muito potencial, pois o mesmo visa explorar aspectos geométricos das seções cônicas. Além disso, após a construção, este mecanismo poderá ser manipulado, tratasse de um material concreto. Desta forma, a utilização do elipsógrafo pode contribuir, para o debate e a discussão de forma mais interessante.

O estudo das seções cônicas e suas propriedades geométricas tiveram seu início na Grécia por volta do século III a.C., na busca de algumas soluções de problemas matemático, três grandes matemáticos da época se destacaram no estudo sobre as cônicas, Arquimedes, Euclides e Apolônio de Perga.

Segundo Contador (2006), consta que Apolônio nasceu por volta de 262 a.C., na cidade de Perga. Seus estudos acerca da astronomia renderam-lhe a notoriedade de fundador da Astronomia. Em seus estudos a parte mais importante encontrar-se relacionada as seções cônicas, ou seja, curvas que tem origem na interseção de um cone com um plano, chamadas de parábolas, hipérbole e a elipse e mais tarde a curva elíptica tornaria uma curva fundamental para abordar assuntos relacionados as orbitas dos planetas.

De acordo com Contador (2006), os nomes parábola, elipse e hipérbole são provenientes de trabalhos de um grupo denominado Pitagóricos, que utilizavam os nomes Ellipsis, Parabole e Hyperbole.

E uma das formas de se ensinar cônicas no ensino de matemática é usando materiais manipulativos, também chamados de materiais didáticos de manipulação (MDM), vários pesquisadores defendem que o ensino da matemática fica mais interessante para os alunos a medida que eles manipulam, tocam, verificam o que realmente é exposto nas aulas de matemática.

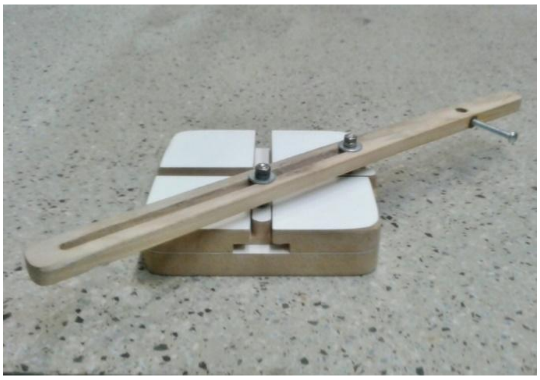
Assim os materiais didáticos manipuláveis são ferramentas que pode ser utilizada como um recurso didático a serviço do professor em sala de aula. Estes materiais podem possibilitar ao docente transformar as aulas de matemática a se tornarem mais dinâmicas e compreensíveis, pois o docente poderá assimila a teoria matemática e a prática, por meio desses materiais manipuláveis.

O elipsógrafo é um material didático, uma ferramenta disponível para o professor, pois o mecanismo não só descreve uma curva elíptica, como também possui focos, eixo maior, eixo menor e o centro, possibilitando aos alunos assimilem a teoria de uma das curvas particular das cônicas com a pratica.

Desta forma, com a utilização dos materiais manipuláveis o ensino da matemática ao poucos, deixam de ser apenas prática reprodutora e mecânica e passa a ter participação dos alunos em aula.

Este trabalho tem como desígnio, estimula a construção do conhecimento matemático através da utilização de um instrumento denominado Elipsógrafos de Arquimedes, que possibilita transforma a linguagem algébrica em linguagem geométrica, reciprocamente. Dando ao aluno a possibilidade de relacionar os temas aprendidos de forma eficaz e lúdica, ao mesmo tempo mostrar ao docente uma forma de demonstrar aos seus alunos a aparência e o funcionamento do elipsógrafo.

Figura 01: Elipsógrafo de Arquimedes



Fonte: Autoria própria.

Metodologia

Trata-se de um estudo que visa divulgar ferramenta Elipsógrafo de Arquimedes quando construído poderá ser utilizado como um recurso a mais para o ensino como também apresentar um forma de esboçar curvas que satisfaziam as definições matemáticas das cônicas. O estudo do mecanismo ocorreu no período de outubro de 2017, após a construção do mesmo.

Inicialmente foi construída a baste do mecanismo, para isso foi utilizado alguns pedaços de MDF (as medidas estarão disponíveis em seguida). Para os cursores também foi utilizado pequenos pedaços de MDF. Para a haste do mecanismo foi utilizado um pedaço de madeira. Dimensões de cada peça a serem utilizados:

Material utilizado para confecção da base do Elipsógrafo:

1. Um pedaço quadrado de MDF medindo, 13,5 x 13,5 x 1,5 cm;
2. Quatro pedaços de MDF medindo, 6,0 x 6,0 x 1,5 cm;

Material utilizado para confecção dos cursores do Elipsógrafo:

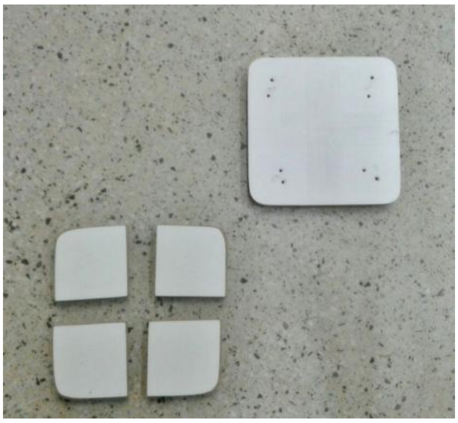
3. Dois pedaços retangulares de MDF medindo, 3,0 x 3,5 x 1,5 cm;

Material utilizado para confecção da haste do Elipsógrafo:

4. Um pedaço de madeira medindo, 38,0 x 2,0 x 1,0 cm.

O objetivo da montagem passo-a-passo do elipsógrafo é fornecer condições para que um docente consiga construí-lo. Iniciamos a montagem do mecanismo pela base utilizando pedaços de MDF, a base é constituída por 5 (cinco) pedaços cuja dimensões já foram dadas no tópico anterior.

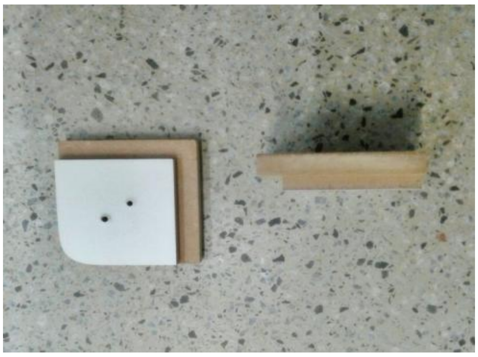
Figura 02: Peças que compõem a base do Elipsógrafo



Fonte: Autoria própria

Foi efetuado dois furos em cada extremidade do quadrado maior com a finalidade de fixa as peças menores e compor a base.

Figura 03: Cortes dos 4 (Quatro)quadrado que compõem base



Fonte: Autoria própria

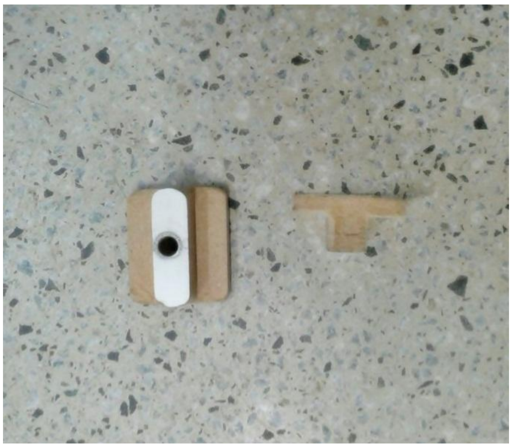
Antes da fixação os quadrados menores na peça maior foram efetuados alguns cortes nas peças menores, mais precisamente em apenas dois lados dos quadrados, com objetivo de criar cavas por onde os cursores irão percorrer. Realizados os cortes em todas as 4 (quatro) peças, fixamos 1 (um) quadrado em cada extremidade do quadrado maior.

Figura 04: Base pronta do Elipsógrafo

Fonte: Autoria própria

Terminado a fixação de todos os quadrados, concluímos uma etapa e a base está pronta, iremos para o próximo passo que é a construção dos 2 (dois) cursores que iremos precisar, com a posse dos 2 (dois) retângulos cuja dimensões já foram repassadas, realizamos alguns cortes, com o objetivo dos cursores encaixar na base e não sair no momento do movimento, foi realizado também 1 (um) furo no centro de cada retângulo que será utilizado para fixar os cursores na haste posteriormente. Para um bom desempenho no movimento dos cursores foi retirado as arestas do mesmo, como mostra a figura abaixo.

Figura 05: Cursores do Elipsógrafo



Fonte: Autoria própria

Após a realização de todos os passos os cursores estão concluídos, iremos passar para a haste do mecanismo, que foi feita de madeira, foi realizado um furo em uma das extremidades da haste que será a ponta do mecanismo e irá acomodar o lápis, será realizado mais um furo de lado, para colocação de um parafuso com o objetivo de regular a altura do lápis, na outra extremidade foi realizado uma abertura com a finalidade de fixa os cursores e ao mesmo tempo regular a distância entre os mesmo.

Figura 06: Haste do Elipsógrafo de Arquimedes

Fonte: Autoria própria

E por último para fixação dos cursores a haste do mecanismo foi utilizado dois parafusos com porcas e arruelas. Agora iremos mostrar como esse material pode contribuir como um material auxiliar para o professor ensinar elipse.

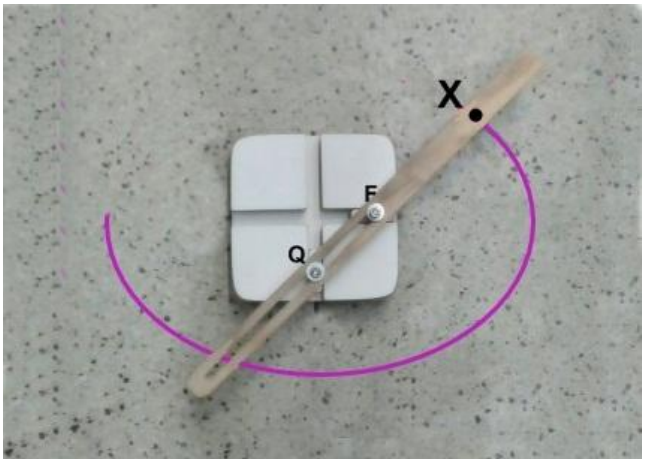
Resultados e discussão

Funcionamento do elipsógrafo de Arquimedes tem como finalidade a utilização para desenhar em especial, a curvas elípticas. A adequação de uso desta ferramenta tem importância peculiar como material didático tanto no ensino médio, quanto no ensino superior.

O processo de utilização deste mecanismo e empregado para traçar elipses. A reprodução do desenho elíptico é desenvolvida por meio uma semirreta, na qual o ponto X localizado no final da haste do mesmo representa a ponta da caneta do mecanismo. A semirreta que é fixada entre os dois pontos F e Q são móveis, os quais se deslocam sobre dos segmentos perpendiculares que lembra um plano cartesiano. Com isto, ao passo que se move os pontos, mantém a distância, que é pré-determinada. Nesse movimento dos pontos a distância entre eles permanece fixa, permitindo que o ponto X traça a elipse. A movimentação tanto pode ser feita no sentido horário como no anti-horário.

Dados, dois pontos no plano, F1 e F2, denominado como focos, um ponto X, que se move no plano de forma que a soma das distâncias dos focos ao ponto X, se mantém sempre igual a uma constante 2a, descreve uma elipse.

Figura 07: Definição Algébrica



Fonte: Autoria própria

Seja F e Q dois pontos distintos pertencentes ao plano cartesiano, de acordo com o movimento do ponto Q ao percorrer o eixo Y (Ordenadas) e o ponto F, percorrendo o eixo X (Abscissa) os pontos mantém uma distância constante entre eles.

Tomando o ponto Q limitado, ou seja, existe t € Q / t(1, -1) de modo que as coordenadas do ponto seja Q =(0, ±t). Podemos definir o ponto Q em coordenadas como, Q=(0, ±t).

Por outro lado pelo teorema de Pitágoras temos que A² = B² + C²; tomando A=1, B= t e F queremos descobrir, temos então:

$$1^2 = t^2 + (F)^2$$

$$(F)^2 = 1^2 - t^2$$

$$F = \pm\sqrt{1-t^2}$$

Pelo teorema de Pitágoras podemos concluir que as coordenadas do ponto F, pode ser dada como, sendo F = $(\pm\sqrt{1-t^2}, 0)$. Já temos as coordenadas dos pontos Q e F que são respectivamente Q = (0, ±t) e F = $(\pm\sqrt{1-t^2}, 0)$.

Figura 08: Distância entre os pontos Q e F

Fonte: Autoria própria

Sabendo as coordenadas dos dois pontos dados Q e F, permitirá calcular a distância entre os dois pontos dado, ou seja;

$$\text{Distancia Q F}= \sqrt{(XF-XQ)^2,\ (YF-YQ)^2}$$

$$\text{Distancia Q F}= \sqrt{\left((\sqrt{1-t^2})-0\right)^2, (0-t)^2}$$

$$\text{Distancia Q F}= (\sqrt{(1-t^2)}, -t)$$

Sabendo a distância entre os dos dois pontos, podemos deduzir que X pode ser dado como:

X = Q + K*Distancia

Sabendo que Q = (0, t) e Distancia = $(\sqrt{(1-t^2)}, -t)$, temos então;

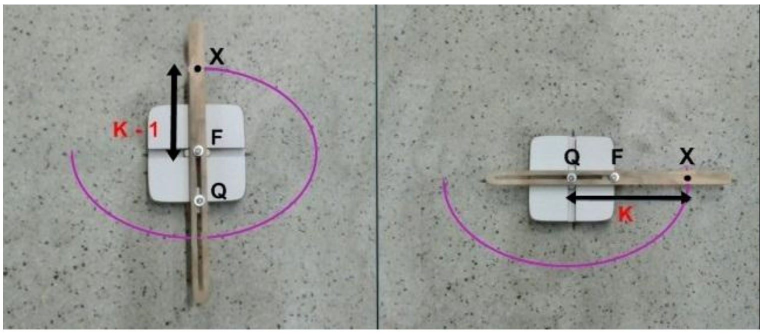
$$X = (0, t) + K*(\sqrt{(1-t^2}), -t)$$

$$X = (K*(\sqrt{(1-t^2}), t - Kt)$$

$$X = (K*(\sqrt{(1-t^2}), -t*(k -1)$$

Podemos concluir que: $X = K*\sqrt{1-t^2}$ e $Y = -t*(k -1)$

Figura 09: Determinação do ponto A e B



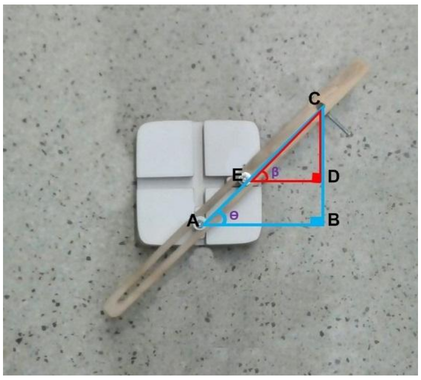
Fonte: Autoria própria

De acordo com a figura 03 o ponto X descreve o traçado de um curvas elípticas, tal que tomando A=K e B=(K – 1). Segundo a equação da elipse é dada por: $\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1$, substituindo na equação obtemos:

$$\frac{(K*\sqrt{1-t^2})^2}{K^2} + \frac{(-t*(k-1))^2}{(K-1)^2} = \frac{K^2*(1-t^2)}{K^2} + \frac{t^2*(K-1)^2}{(K-1)^2} = 1 - t^2 + t^2 = 1$$

O que podemos concluir que o Elipsógrafo de Arquimedes descreve o traçado de curvas elípticas. A haste do mecanismo Elipsógrafo de Arquimedes é constituído por três pontos fundamentais os quais são colineares respectivamente denominados pontos A, E e C. Sendo o ponto C que descreve o traçado elíptico e os pontos A e E são os cursores que se movem sobre dos segmentos do mecanismo.

Figura 10: Explicação matemática



Fonte: Autoria própria

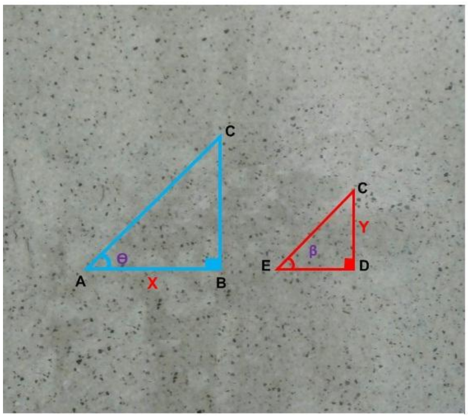
Consideremos os dois triângulos retângulos ▲ABC ≡ ▲EDC

Note que; $\beta \equiv \Theta$

O que implica ▲ABC ~ ▲EDC. Sendo que as coordenadas são: C (x, y) e $\beta = \Theta$.

Para melhor visualização retiramos a imagem do elipsógrafo, e deixamos apenas os triângulos.

Figura 11: Explicação matemática sem o Elipsógrafo



Fonte: Autoria própria

Pela figura 11, podemos deduzir que;

▲EDC, $\text{Sen}\beta = \frac{y}{CE}$

Pelo ▲ABC, $\text{Cos}\ \Theta = \frac{x}{AC}$, mas como $\beta = \Theta$, temos então;

$\text{Sen}\ \Theta = \frac{y}{CE}$

$\text{Cos}\ \Theta = \frac{x}{AC}$

Elevando ao quadrado ambos os lados da igualdade e somando, temos;

$(\text{Sen}\ \Theta)^2 + (\text{Cos}\ \Theta)^2 = (\frac{y}{CE})^2 + (\frac{x}{AC})^2 = 1$

Além de mostrar a utilização elipsógrafo e chegarmos à equação da elipse, o mecanismo possibilita ao docente de verificar alguns conceitos matemáticos que envolvem o funcionamento deste instrumento, tais como, conceito de semelhança de triângulos que é explorado parar determina a posição do ponto X no movimento do conjunto cursores e haste elipsógrafo, ao alterar o deslocamento dos cursores, obtemos triângulos que são formados a partir do movimento da haste como foi mostrado anteriormente, conceitos de Trigonometria, entre elas as razões trigonométricas de seno, cosseno dos ângulos formados pela haste do mecanismo.

Conclusão

A matemática está presente no cotidiano das pessoas de maneira implícita ou explicita. Diariamente, necessitamos dos conhecimentos matemáticos de forma quase impercebível. A matemática é utilizada praticamente em todas as áreas do conhecimento, nem sempre é mostrado ou demonstrado aos alunos, aplicações que possivelmente despertara seu interesse ou que possam motivá-los.

A aprendizagem por meio de uma forma lúdica permite ao estudante obter conhecimentos matemáticos através de um processo alternativo ao invés do ensino tradicional e mecânico, esta forma de ensino permite que os alunos potencializem a discussão de idéias nas aulas e construa um pensamento crítico sobre o assunto abordado.

A construção e utilização do elipsógrafo, tratado neste trabalho estimula a construção do conhecimento matemático devido a semelhança das propriedades da curva elíptica que propicia a transforma a linguagem algébrica em linguagem geométrica e, vice-versa, dando ao aluno a possibilidade de relacionar os temas aprendidos de forma rápida e eficaz

A aprendizagem matemática utilizando mecanismos articulados, assim como o Elipsógrafo de Arquimedes, que permite o aluno manuseá-lo ocorre de modo significativo, pois quando o aluno se depara com situações que exijam investigação e reflexão, induz os mesmo a construir e desenvolver estratégias para resolver o desafio proposto. A utilização do mecanismo permite desenvolver e aprimorar as habilidades particulares de cada aluno. Além disto, o professor propicia uma troca de experiências, discussões, interações entre alunos e o mesmo, tornando as aulas mais interessantes e desafiadoras.

Diante de tal mecanismo, justifica-se sua utilização como facilitador da aprendizagem matemática, especificamente as cônicas em especial a curva elíptica, pois o mesmo apresenta características e propriedades de uma elipse.

Bibliografia

CONTADOR, **Matemática, uma breve história.** 2. Ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

EVES, **Introdução à História da Matemática.** 1.ed. Campinas – SP: Editora Unicamp,2004.

LORENZATO. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. 3 ed. Campina- SP: editora Autores Associados, 2006.

SILVA, J. N. M. O. COSTA, M. F. C.; SILVA, M. S.; BARRETO, R. C. L. **Uso de Novas Ferramentas no Ensino de Matemática da Escola Municipal de Ensino Fundamental**