CONTRIBUIÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS EM CIRCUITOS RC UTILIZADOS NO COTIDIANO.

Damião Franceilton Marques de Sousa[1]; Luís Gomes de Negreiros Neto[1]; Reinaldo Freire da Fonsenca[1]; Ruam Adelmo Macedo da Silva[1]; Célia Maria Rufino Franco[2].

[1] Graduandos em Licenciatura em Física; Universidade Federal de Campina Grande/Centro de Educação e Saúde, Unidade Acadêmica de Educação, Olho D'água da Bica, s/n, Cuité, PB, 58175-000. franceiltonmarques@gmail.com; lgomes1004@gmail.com; reynaldofreire@gmail.com; ruammacedo1@gmail.com.

[2] Professora Doutora; Universidade Federal de Campina Grande/Centro de Educação e Saúde, Unidade Acadêmica de Educação, Olho D'água da Bica, s/n, Cuité, PB, 58175-000.celiafranco_m@hotmail.com.

RESUMO

Muitos dos princípios ou leis que regem o comportamento do mundo físico encontram sua expressão natural nas equações diferenciais. Essas equações surgiram através de estudos feitos primeiramente por Isaac Newton, e logo após por Gottfried W. Leibniz, que contribuíram para uma vasta evolução em diversas áreas do conhecimento. O estudo dessas modelagens é feito na disciplina de equações diferenciais ordinárias, que faz parte da grade dos cursos de Licenciaturas em Física, porém com o curto tempo de disciplina, não dar-se para trabalhar todo o amplo conteúdo que esse estudo fornece. Desta forma, surgiu o interesse de ampliar o conhecimento sobre essa disciplina e assim neste trabalho, foi realizado um estudo das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem sob o ponto de vista das aplicações, com particular referência aos circuitos elétricos. Para tanto, utilizou-se resultados preliminares da teoria das equações diferenciais, incluindo dois métodos de solução: separação de variáveis e fator integrante. Como aplicação, a lei diferencial de Kirchhoff foi utilizada em circuitos RC, que são caracterizados por serem compostos por uma fonte, resistores, e capacitores, além de outros dispositivos. Foi possível analisar aplicações práticas dos circuitos RC, como na corrida de cavalos e em equipamentos médicos, como o famoso marca-passo.

Palavras-chave: APLICAÇÕES, CIRCUITO-RC, EDO, LEI-DE-KIRCHHOFF.

1. INTRODUÇÃO

Com o passar do tempo, várias descobertas foram acontecendo no ramo das ciências. Contudo, vários estudiosos, até meados do século XVII, sentiam dificuldades de explicar essas descobertas matematicamente. Com o intuito de explicar esses determinados acontecimentos e facilitar no desenvolvimento de novas teorias, surgiram às equações diferencias que, muitas vezes, são chamadas de modelos matemáticos com o objetivo de estudar determinada situação, com o auxílio das variáveis existentes (BOYCE, 2006).

Os pioneiros desse estudo foram Isaac Newton e Gottfried W. Leibniz, ambos deram uma imensa contribuição. Newton, com seus conhecimentos sobre a mecânica clássica, ajudou na classificação das equações diferenciais ordinárias, fornecendo uma grande ajuda para a resolução de problemas encontrados em sua época.

Leibniz conseguiu resultados, nessa área, um pouco depois de Newton, mas foi o primeiro a fazer publicações sobre esses estudos, em 1684. Entre suas contribuições nessa área, destacam-se o método de separação de variáveis, redução de equações homogêneas a equações separáveis e procedimentos para resolver equações lineares de primeira ordem. A notação usada até hoje dy/dx e o sinal da integral ($\int$), são invenções desse brilhante matemático (ALITOLEF, 2011).

Por definição uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de Equação Diferencial (ED). Essas equações podem ser classificadas de acordo com seu tipo, a ordem, e linearidade (ZILL e CULLEN, 2001). Quanto ao tipo, podem ser classificadas em Equações diferenciais ordinárias (EDOs) e Equações diferenciais parciais (EDPs).

Segundo KREYSZIG (2013), uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação que contém uma ou mais derivadas de uma função desconhecida, à qual usualmente chamamos de $y(x)$ (ou, às vezes $y(t)$, caso a variável independente seja o tempo t). Essa equação pode conter o próprio y, funções conhecidas de x (ou de t) e constantes. Por exemplo:

$$y' = \cos x \tag{1}$$

KREYSZIG (2013) também acrescenta que uma Equação Diferencial Parcial (EDP) é uma equação que contém derivadas parciais de uma função desconhecida de duas ou mais variáveis. Por exemplo,

$$f_{xx} + f_{yy} = 0, \text{ ou ainda, } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

Já ao se tratar da ordem de uma equação diferencial, tem-se que a derivada de maior ordem presente na equação será a que indicará sua ordem. Na equação (2), a derivada de maior ordem é dois, logo a equação diferencial do exemplo citado é de grau dois. As equações mais frequentemente reportadas na literatura são de primeira e segunda ordem. Suas aplicações aparecem em diversas áreas do conhecimento, como por exemplo, na engenharia civil calculando deformação de uma viga, circuitos elétricos, crescimento populacional, comportamento de ondas, na economia em taxas de juros, resfriamento de objetos, entre outras.

Uma das disciplinas que se tem no curso de Licenciatura em Física, da Universidade Federal de Campina Grande – Campus Cuité, é a Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), que tem como propósito estudar essas modelagens matemáticas. Porém, por meio do curto tempo da disciplina, infelizmente, não é apresentado todo conteúdo previsto.

Diante disso, este trabalho foi elaborado com o intuito de complementar a disciplina de EDO, onde dois métodos, comumente utilizados, de resolução de equações diferenciais ordinárias são apresentados. Como aplicação dos métodos, procurou-se estudar modelos matemáticos para descrever problemas do cotidiano a partir da equação diferencial de Kirchhoff para circuitos RC que se aplicam tanto em corrida de cavalos, como no estudo do equipamento médico conhecido como marca-passo.

2. ALGUNS MÉTODOS DE SOLUÇÃO DE EDO

Uma Equação Diferencial Ordinária de ordem n pode ser representada na forma:

$$F\,(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad (3)$$

Uma solução da equação (3) em algum intervalo I é uma função $y = f(x)$ tal que suas derivadas até a ordem n existem e, quando substituídas na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade. Isto é,

$$F\,(x, f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0 \quad (4)$$

Por exemplo, a solução da diferencial $y' = \cos x$ é $y = \text{sen } x + C$, onde C é uma constante arbitrária. Neste caso, tem-se uma família de soluções que representa a solução geral da equação diferencial. Para um valor de C específico, tem-se uma solução particular.

2.1. Equações diferenciais Separáveis

Uma equação diferencial da forma:

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{5}$$

é dita separável. Multiplicando a equação (5) por dx, tem-se:

$$\mathrm{M}(x)\ \mathrm{d}x + \mathrm{N}(y)\ \mathrm{d}\ y = 0 \tag{6}$$

Desta forma, a equação (6) pode ser resolvida integrando as funções M e N, em relação às variáveis x e y, respectivamente.

2.2 Equações diferenciais de Primeira Ordem: Método dos Fatores Integrantes

Considere a equação diferencial ordinária linear de primeira ordem:

$$\mathrm{y}' + \mathrm{p}(x)\ \mathrm{y} = \mathrm{g}(x) \tag{7}$$

Onde, p e g são funções dadas da variável independente x.

O método dos fatores integrantes foi desenvolvido por Leibniz para obter soluções de equações na forma da equação (7) e consiste em multiplicar a equação por uma função, chamada fator integrante, e denotada por $\mu\,(x)$, com intuito de facilitar e deixar a equação diferencial integrável, e assim determinarmos a sua solução.

Ao multiplicar a equação (7), pelo fato integrante μ (x), obtém-se:

$$\mu\,(x)\ \mathrm{y}' + \mu\,(x)\ \mathrm{p}(x)\ \mathrm{y} = \mu\,(x)\ \mathrm{g}(x) \tag{8}$$

Observa-se que do lado esquerdo da igualdade tem-se a derivada do produto de $\mu(x)\cdot$ y desde que $\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)p(x)$. Supondo $\mu(x) > 0$, tem-se:

$$\frac{\mu'(\mathrm{x})}{\mu(\mathrm{x})} = p(x) \tag{9}$$

Integrando a equação (9), obtém-se uma equação para determinação da função fator integrante, sendo ela:

$$\mu(\mathrm{x}) = e^{\int p(x)\,dx} \tag{10}$$

Retornando à equação (8), tem-se:

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu(x)g(x) \tag{11}$$

Portanto,

$$\mu(x) \cdot y(x) = \int \mu(x)g(x)dx + C \tag{12}$$

Onde, C é uma constante arbitrária.

3. APLICAÇÃO EM CIRCUITOS RC

Entre diversas aplicações das equações diferenciais ordinárias, destacamos no ramo da eletricidade, mais precisamente em circuitos elétricos RC, através da lei de Kirchhoff.

Um circuito elétrico fornece, basicamente, um caminho fechado para transferir energia de um local para outro. À medida que as partículas são carregadas fluem através do circuito, a energia potencial elétrica é transferida de uma fonte até um dispositivo, local onde a energia é armazenada e convertida em outras formas de calor (YOUNG, 2009).

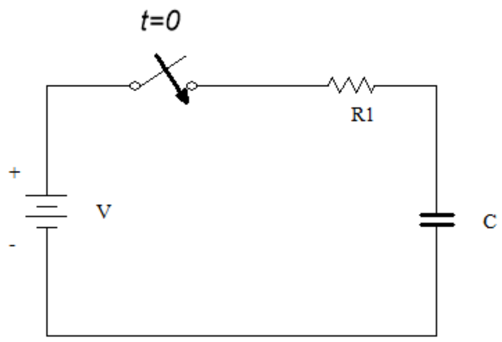
A esse fluxo de cargas carregadas, dá-se o nome de corrente elétrica. Para HALLIDAY et al. (2008), corrente elétrica é um movimento de partículas carregadas, porém nem todo movimento de partículas produzem corrente elétrica. BAUER et al (2012), diz que não há corrente se o movimento dos elétrons em um condutor for de forma desordenada.

Dessa forma, temos que corrente elétrica (i) é expressado pelo fluxo ordenado de carga que passa por um determinado instante de tempo, e sua unidade no sistema internacional (SI) de medidas é “A” que significa Ampères, em homenagem a André-Marie Ampère, físico francês responsável pela descoberta da corrente elétrica, e 1 A = 1C/s (um coulomb por segundo). De forma matemática, temos:

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad (14)$$

Circuitos RC são aqueles em que a corrente de fato varia com o tempo. O circuito mais simples cuja operação envolve correntes dependentes do tempo é o de carga e descarga de um capacitor (BAUER et al, 2012), como pode ser observado na Figura 1:

Figura 1: Circuito RC simples.



Fonte: Autoria própria - 2018

Considerando a figura anterior, onde inicialmente a chave está aberta, o capacitor se encontra descarregado, no momento em que essa chave se fecha, ocorre um fluxo de carga pelo circuito, comumente chamado de corrente elétrica. Essa corrente será acumulada no capacitor e assim irá carrega-lo, criando uma diferença de potencial entre as placas do capacitor. Essa diferença é dada através da relação entre a carga total armazenada (q) e a constante de proporcionalidade conhecida como capacitância (C), sendo expressa por $V_c = q/C$.

Outro componente do circuito RC é o resistor, que como próprio nome já diz tem a função de resistir à passagem da corrente elétrica. A diferença de potencial no resistor pode ser determinada através da primeira lei de Ohm, que nos diz que a resistência é diretamente proporcional à diferença de potencial no resistor e inversamente proporcional a passagem da corrente no mesmo, ou seja:

$$V = R.i = R \cdot \frac{dq}{dt} \qquad (15)$$

Desta forma, ao analisar a figura 1, e aplicar a Lei de Kirchhoff, mais especificamente, a lei das malhas, considerando um sentido horário para a malha, e que a corrente elétrica percorra um caminho que saia do terminal negativo para o positivo, obtém-se a seguinte expressão:

$$V - V_R - V_C = 0 \tag{16}$$

Ao substituir as relações para diferença de potencial (DDP) dada pela lei de Ohm e pela expressão de DDP em um capacitor, a equação (16) resulta:

$$V = R.\frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{C} \tag{17}$$

Ao dividir a equação (17) por R, obtém-se uma equação diferencial da forma:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{C.R} = \frac{V}{R} \tag{18}$$

O produto R·C é chamado de *constante de tempo capacitiva* e é representada pela letra grega (τ), ou seja, τ = R·C e como o próprio o nome diz possui dimensão temporal que representa o tempo necessário para que o capacitor atinja a carga ou a tensão um valor equivalente a 63% do seu valor máximo (SILVA, 2014).

Substituindo essa constante na equação (18), tem-se:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{\tau} = \frac{V}{R} \tag{19}$$

As equações (18) e (19) são equações de primeira ordem, já que a função "q (t)" e suas derivadas são de ordem um.

A equação (19) pode ser escrita na forma y' + p(x) y = g(t) e, consequentemente, pode ser resolvida pelo método dos fatores integrantes. Neste caso, o fator integrante é μ(t) = $e^{\int \frac{1}{\tau} dt}$ = $e^{\frac{1}{\tau}t}$. Multiplicando a equação (19) por μ(t) tem-se:

$$e^{\frac{1}{\tau}t}.\frac{dq}{dt}+\frac{1}{\tau}.q.e^{\frac{1}{\tau}t}=\frac{V}{R}.e^{\frac{1}{\tau}t} \quad (20)$$

A parte esquerda da igualdade acima é a derivada do produto entre ($e^{\frac{1}{\tau}t}$q), ou seja, $\frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{\tau}t}q)$. Assim, a equação (20) é equivalente a:

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{\tau}t}.q)=\frac{V}{R}.e^{\frac{1}{\tau}t} \quad (21)$$

Ao integrar a equação (21) em relação à "t" ambos os lados, e logo após isolando "q" e substituindo τ = R.C, obtém-se:

$$q(t)=\frac{V}{R}.\tau+ke^{-\frac{1}{\tau}t} \quad => \quad q(t)=V.C+ke^{-\frac{1}{R.C}t} \quad (22)$$

Assim, tem-se solução geral para problemas que envolvem circuitos RC através da utilização da lei de Kirchhoff, onde k é uma constante arbitrária. Considerando q(0) = 0 e t = 0 estamos dando certas condições, que chamamos de problema de valores iniciais, com intuito de determinar o valor de "k". Aplicando os valores chegamos que k = - VC. Logo, uma solução particular é dada por:

$$q(t)=V.C-V.C.e^{-\frac{1}{R.C}t}=V.C\,(1-e^{-\frac{1}{R.C}t}) \quad (23)$$

A DDP em um capacitor (V_c) é diretamente proporcional à carga armazenada do mesmo, e inversamente proporcional a sua capacitância, daí:

$$V_c=\frac{q}{C}=\frac{V.C\,(1-e^{-\frac{1}{R.C}t})}{C}=V.(1-e^{-\frac{1}{R.C}t}) \quad (24)$$

3.1. Aplicação dos circuitos RC em Corrida de cavalos

Uma aplicação desse tipo de circuito no cotidiano é em corrida de cavalos, onde a chave do circuito se fecha quando o cavalo sai em corrida, e ao cruzar a linha de chegada o circuito se abre. Tratando-se de um circuito RC, durante esse determinado intervalo de tempo em que o cavalo está em corrida, ocorre um fluxo de carga ordenado, e assim o capacitor é carregado. Desta forma, a equação diferencial de Kirchhoff é utilizada com o propósito de determinar o instante certo que esses animais cruzam a linha de chegada, além da distância percorrida, velocidade, e aceleração.

Como aplicação, considere um circuito RC simples, com uma fonte de 150 V, um resistor de 30 MΩ e um capacitor de 30μF, sendo a estrutura do circuito parecido com o da figura1. É possível determinar a velocidade de um cavalo que corre em uma pista, por exemplo, de 5 Km, supondo que a tensão no capacitor no instante da chegada seja de 75 V.

Encontra-se primeiro o tempo em que o cavalo cruza a linha de chegada através da equação (24). Isto é,

$$t = -\ ln\ (1 - \frac{V_C}{V})\ .\ R.C \tag{25}$$

Ao substituir os valores do problema na equação acima, obtém-se:

$$t = -\ ln\ (1 - \frac{75V}{150V})\ .\ (30\ .10^{6}\ \Omega)\ .\ (30\ .10^{-6}F) = 623.83\ s \tag{26}$$

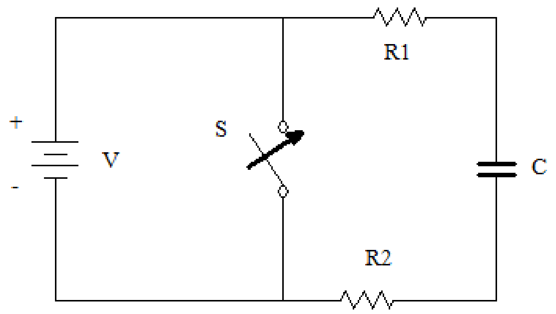
Logo, a velocidade ($V = \Delta x/\Delta t$) do cavalo é aproximadamente V = 8,02 m/s.

3.2. Aplicação dos circuitos RC em marca-passos

Outra aplicação desses tipos de circuitos é em equipamentos usados na medicina para estimular os batimentos cardíacos do paciente, ou seja, fazer com que o coração funcione fora de seu ritmo normal. Esses equipamentos são conhecidos como marca-passo, que nada mais é do que um tipo de circuito RC, implantado no coração do paciente, onde o coração funciona como uma segunda resistência do circuito (BAUER, W. et al, 2012).

O funcionamento desse aparelho é através de carregamento de capacitor, que pode ser entendido conforme a Figura abaixo:

Figura 2: Circuito RC simples com duas resistências.



Fonte: autoria própria - 2018

(83) 3322.3222
contato@conapesc.com.br
www.conapesc.com.br

A resistência 1 (R1) é a resistência do equipamento, enquanto, a segunda resistência (R2) representa a resistência do usuário, ou seja, a resistência apresentada pelo coração. Dessa forma, no momento que a chave está aberta, o capacitor é carregado, isso ocorre durante um batimento cardíaco do usuário. Quando a chave se fecha ocorre o descarregamento e, assim, o estímulo dos batimentos cardíacos.

Por exemplo, a frequência cardíaca de um coração normal é de 60 a 100 bpm (batimentos por minuto). Desta forma, até que frequência um coração de um paciente pode funcionar após estimulo de um marca-passo composto por uma fonte de 3,2 V, uma resistência de 90KΩ, um capacitor de $1,5\ \mu$F, considerando que a resistência desse paciente é de 675 Ω, e a diferença de potencial no capacitor quando o mesmo está totalmente carregado é de 2,98 V.

Primeiro determina-se o tempo em que o circuito se fecha e ocorre a descarga do capacitor no coração, ocasionando o estímulo do batimento, para depois determinar a frequência cardíaca. Sendo que, como são duas resistências e o circuito encontra-se em série, utiliza-se a soma das duas, ou seja, a resistência equivalente. Daí, ao substituir esses valores na expressão (25), obtém-se:

$$t = - \mathit{ln}\,(1 - \frac{2{,}98V}{3{,}2\ V}) \ .\ (9{,}0675.\ 10^{4}\ \Omega)\ .\ (1{,}5.\ 10^{-6}\mathrm{F}) = 0{,}36\ \mathrm{s} \tag{27}$$

O tempo encontrado em minutos é aproximadamente 6,069 min, e assim a frequência dessa pessoa é aproximadamente 164,77 bpm (batimentos por minuto).

4. CONCLUSÃO

Vimos que o uso das equações diferenciais ordinárias é uma ferramenta de suma importância para resolução de vários problemas e aplicações. Foi possível utilizar as ferramentas da disciplina Equações Diferenciais Ordinárias para estudar problemas na área da Física, dando ênfase ao estudo de circuitos RC. Mostramos com esse estudo que é possível compreender situações reais do nosso cotidiano a partir das ferramentas matemáticas, com particular referência aos problemas de determinar a velocidade em corridas de cavalos e estimar o tempo do batimento cardíaco, no exemplo dos marca-passos.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALITOLEF, S. D. S. **Algumas Aplicações Das Equações Diferenciais**. 2011. 36*f*. Trabalho de conclusão de Curso - Universidade Federal De Rondônia, Ji-Paraná, 2011.

BAUER, W; WESTFALL, G.D.; DIAS H. **Física para universitários**: eletricidade e magnetismo. Porto Alegre: AMGH, 2012.

BOYCE, W. E; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** Rio de Janeiro: LTC, 2006.

HALLIDAY, D; RESNICK, R e WALKER, J. **Fundamentos de física:** Eletromagnetismo. Rio de Janeiro: LTC, 2008. V. 03.

KREYSZIG, E. **Matemática Superior para Engenharia.** Volume 1. 9 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. V. 01.

SILVA, M. A. **Modelagem Matemática:** Equações diferenciais ordinárias em cursos de graduação. 2014. 140*f*. Trabalho de conclusão de Curso - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de, São Paulo. 2014.

YOUNG, H. D. **Física III:** Eletromagnetismo Young e Freedman – São Paulo: Addison Wesley, 2009.

ZIIL, D. G; CULLEN, M. R., **Equações diferenciais.** Volume 1. 3ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2007.