UM ESTUDO COMPARATIVO DAS ESTATÍSTICAS DE TESTE DE ANDERSON-DARLING E DE VASICEK PARA A DISTRIBUIÇÃO BIRNBAUM-SAUNDERS

Alan da Silva (1); Joelson da Cruz Campos (2); Michelli Karinne Barros da Silva (3).

[1]*Universidade Federal de Campina Grande. Email:* alan.silva.6991@gmail.com

[2]*Universidade Federal de Campina Grande. Email:* joelsonmat@hotmail.com

[3]*Universidade Federal de Campina Grande. Email:* michelli.karinne@gmail.com

Resumo: Testes de bondade de ajuste têm sido propostos para avaliar as hipóteses de adequação da distribuição, com relação a um conjunto de dados, em que o vetor de parâmetros que indexa a distribuição pode ser conhecido ou desconhecido. Os testes clássicos de bondade de ajuste são baseados na distância entre a função de distribuição empírica (FDE) e a função de distribuição acumulada (FDA) do modelo que estamos querendo testar. Neste trabalho, propomos um teste de bondade de ajuste para a distribuição Birnbaum-Saunders baseado em entropia. Faremos um estudo comparativo entre a estatística baseada em entropia e a estatística de Anderson-Darling, que é baseada na distância entre a FDE e a FDA. Através de simulações de Monte Carlo, avaliamos os tamanhos dos testes para diferentes valores do parâmetro de forma e diferentes valores amostrais, bem como, avaliamos o poder dos testes propostos para diferentes distribuições de probabilidade alternativas. Por fim, faremos uma aplicação para ilustrar os testes considerados.

Palavras-chave: Entropia, Testes de hipóteses, Distribuição Birnbaum-Saunders.

1 Introdução

Uma importante distribuição de vida (assimétrica) que originou de um problema de fadiga de materiais foi desenvolvida em (BIRNBAUM; SAUNDERS, 1969a); ver (JOHNSON; KOTZ; BALAKRISHNAN, 1995) e (SAUNDERS, 2007). A distribuição Birnbaum-Saunders (BS) relaciona o tempo até a ocorrência de alguma falha no material com algum dano acumulativo assumido gaussiano.

Nas últimas décadas, a distribuição BS vem recebendo bastante atenção na literatura. Tal atenção é devida a grande aplicabilidade que essa distribuição possui. A distribuição BS surgiu aplicada na área de engenharia. Contudo, devido aos argumentos teóricos utilizados na construção dessa distribuição é natural encontrar aplicações em outras áreas, tais como:

medicina, meio ambiente, qualidade da água, seguros, controle de qualidade, entre outras. Para mais detalhes ver (MEEKER; ESCOBAR, 1998), (BARROS; PAULA; LEIVA, 2008), (LEIVA, 2008a, 2008b, 2008c, 2009).

Testes de bondade de ajuste têm sido propostos para avaliar a hipótese de adequação de uma distribuição a um conjunto de dados. A maioria dos testes utiliza a distância entre a FDE e a FDA. Para maiores detalhes ver (BARROS et al., 2014).

A teoria da informação é um ramo da matemática cuja finalidade consiste na quantificação da informação. Essa teve seus pilares desenvolvidos por (SHANNON, 1948). O conceito de informação é muito amplo para ser quantificado apenas por uma medida, porém, dada qualquer distribuição de probabilidade, podemos quantificar uma medida de incerteza denominada "entropia" associada a essa distribuição.

Neste artigo, temos como objetivo comparar os testes de bondade de ajuste, Anderson-Darling, que é baseado na distância entre FDE e a FDA e o teste baseado em entropia para a distribuição BS.

2 Metodologia

Nesta seção, será apresentado o referencial teórico necessário para atingir os objetivos do trabalho. Primeiramente, faremos uma revisão sobre a distribuição BS. Posteriormente, apresentamos o conceito de entropia, bem como um estimador não paramétrico para entropia, após isso, introduzimos o teste de Anderson-Darling. Com esse embasamento, definimos o teste de bondade de ajuste baseado em entropia para a distribuição BS.

A fim de compararmos o desempenho dos dois testes, faremos um estudo de simulação de Monte Carlo para avaliar o tamanho e o poder dos testes. Um estudo de simulação é feito utilizando o *software* R.

2.1 Distribuição Birnbaum-Saunders

A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória T que segue uma distribuição BS com parâmetros de forma e escala $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, respectivamente, é dada por:

$$f(t;\alpha,\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{t}{\beta} - 2 + \frac{\beta}{t}\right)\right\}\left[\frac{1}{2\alpha\sqrt{\beta}} t^{-\frac{3}{2}}(t+\beta)\right], \quad (1)$$

com $t, \alpha, \beta > 0$.

2.1.1 Propriedades

Se $T \sim \text{BS}(\alpha, \beta)$, então:

- $ct \sim BS(\alpha, c\beta), c > 0$.
- $1/T \sim BS(\alpha, 1/\beta)$.
- O q-ésimo quantil de T é $q_t = \beta\left[\alpha z_{q/2} + \sqrt{\left(\alpha z_{q/2}\right)^2 + 1}\right]^2$ para $0 < q < 1$, com $z_{q/2}$ é o quantil de ordem $q/2$ da distribuição normal padrão.
- A média e a variância de T são, respectivamente,

$$E(T) = \beta[1 + \alpha^2/2] \quad \text{e} \quad Var(T) = (\alpha\beta)^2[1 + 5\alpha^2/4].$$

- A função de sobrevivência e a taxa de falha de T são dadas, respectivamente, por:

$$S(t;\alpha,\beta) = \Phi\left[\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{\beta}{t}} - \sqrt{\frac{t}{\beta}}\right)\right] \quad \text{e} \quad \lambda(t;\alpha,\beta) = \frac{t^{-3/2}(\beta+t)exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{t}{\beta}+\frac{\beta}{t}-2\right)\right\}}{2\alpha\sqrt{2\pi\beta}\,\Phi\left[\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{\beta}{t}}-\sqrt{\frac{t}{\beta}}\right)\right]}.$$

Para mais detalhes ver (LEIVA, 2015).

2.1.2 Estimadores de máxima verossimilhança

Seja $T_1, T_2, \dots, T_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição BS(α, β), com função densidade de probabilidade dada pela expressão (1). O logaritmo da função de verossimilhança conjunta de $T_1, T_2, \dots, T_n$ é dada por:

$$l(\alpha,\beta;t_1,\dots,t_n) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n - \frac{1}{2\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_i}{\beta}+\frac{\beta}{t_i}-2\right) - \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\log(t_i) + \sum_{i=1}^{n}\log(\beta+t_i) - \sum_{i=1}^{n}\log\left(2\alpha\sqrt{\beta}\right). \quad (2)$$

O estimador de máxima verossimilhança de α é dado por $\hat{\alpha} = \sqrt{\frac{\bar{t}}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{r} - 2}$, em que $\bar{t}$, r e $\hat{\beta}$ são a média amostral, a média harmônica amostral e o estimador do parâmetro β, respectivamente. O estimador de β não possui forma fechada, e é obtido através de métodos numéricos, tal como o método de Newton-Raphson. Maiores detalhes ver (BIRNBAUM; SAUNDERS, 1969b).

2.2 Teste de normalidade de Anderson-Darling

O teste proposto por (ANDERSON; DARLING, 1954) se baseia na distância entre a função de distribuição empírica e a função de distribuição acumulada hipotética. A estatística de teste de Anderson-Darling para testar normalidade de uma amostra aleatória $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ é dada por:

$$A^2 = \frac{-\sum_{i=1}^{n}\{(2i-1)[\log(z_i) - \log(1 - z_{n+1-i})]\}}{n} - n,$$

em que $z_i = F(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Rejeitamos a hipótese de normalidade dos dados para valores suficientemente grandes de A^2, em outras palavras, rejeitamos a hipótese de normalidade se a distância entre a FDE e a FDA sob a hipótese nula for suficientemente grande.

2.3 Teste de bondade de ajuste aproximado

(CHEN; BALAKRISHNAN, 1995) apresentaram um procedimento para obter testes de bondade de ajuste para uma distribuição qualquer baseado nos testes clássicos de normalidade. A ideia dos mesmos consistia em transformar os dados em normais e depois aplicar os testes já existentes para testar normalidade. Mais especificamente, queremos testar:

H_0: os dados provêm de uma variável aleatória com distribuição $F(x;\theta)$.

H_1: os dados não provêm de uma variável aleatória com distribuição $F(x;\theta)$.

O procedimento para testar H_0 é feito da seguinte forma:

- Estimar θ (eficientemente) de uma distribuição $F(x_i;\theta)$ e calcular $v_i = F(x_i;\hat{\theta})$, tal que os x_i são ordenados em ordem crescente.
- Calcular $y_i = \Phi^{-1}(v_i)$, em que Φ é a função de distribuição acumulada normal padrão e Φ^{-1} sua inversa.
- Calcular $u_i = \Phi\{(y_i - \bar{y})/s_y\}$, em que $s_y^2 = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ e $\bar{y} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} y_i$.

- Calcular as estatísticas de teste para normalidade.
- Decidir se rejeita, ou não a hipótese H_0 com um nível de significância fixado.

2.4 Entropia

Definição 1. *Seja X uma variável aleatória absolutamente contínua, com função de distribuição acumulada $F(x)$ e função densidade de probabilidade $f(x)$. A entropia $H(f)$ de uma variável aleatória X é definida por (SHANNON, 1948), como*

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x)\, dx. \tag{4}$$

A entropia mede a quantidade de informação, incerteza, de uma variável aleatória.

2.4.1 Estimador não paramétrico para entropia

Existem diferentes estimadores não paramétricos para $H(f)$, como pode ser visto em (VASICEK, 1976), (ES, 1992), (EBRAHIMI; PFLUGHOEFT; SOOFI, 1994), entre outros. O estimador de (VASICEK, 1976) tem sido um dos mais usados na literatura para testes de bondade de ajuste e é dado por:

$$HV_{mn} = \sum_{i=1}^{n} \log\left[\frac{n}{2m}\left(X_{(i+m)} - X_{(i-m)}\right)\right], \tag{5}$$

em que $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ são as estatísticas de ordem da amostra, m é o tamanho da janela (um inteiro positivo menor que $n/2$), $X_{(i)} = X_{(1)}$, se $i < 1$, $X_{(i)} = X_{(n)}$, se $i > n$. (VASICEK, 1976) provou que esse estimador é consistente, ou seja, $HV_{mn} \xrightarrow{P} H(f)$ quando $n, m \to \infty$, $n/m \to 0$.

2.4.2 Teste para normalidade baseado em entropia

A estatística de teste proposta em (VASICEK, 1976) para testar a hipótese de normalidade é baseada no estimador para entropia (5) e é dada por:

$$TV_{mn} = \frac{exp\{HV_{mn}\}}{\hat{\sigma}} = \frac{1}{\hat{\sigma}} \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{n}{2m}\left(X_{(i+m)} - X_{(i-m)}\right)\right]^{1/n}, \qquad (6)$$

em que $\hat{\sigma} = \{(1/n)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\}^{1/2}$.

Rejeitamos a hipótese de normalidade dos dados para valores pequenos da estatística observada. Como a distribuição da estatística de teste não tem forma fechada, os quantis empíricos dessa estatística foram obtidos via simulação de Monte Carlo (Tabela 1). Se os valores observados forem menores que os valores críticos, para um nível de significância preestabelecido, rejeitamos a hipótese de normalidade dos dados em questão.

Tabela 1 - Valores críticos das estatísticas TV_{mn} para testar normalidade com nível de significância de 5%, para vários tamanhos amostrais e diferentes valores de m.

	m								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	1,6822								
6	1,7762	1,8443							
7	1,8638	1,9634							
8	1,9474	2,0533	2,0244						
9	2,0716	2,1290	2,1134						
10	2,1231	2,2156	2,1901	2,1286					
15	2,4840	2,5434	2,5174	2,4624	2,3957	2,3246			
20	2,7037	2,7759	2,7643	2,7196	2,6597	2,5906	2,5283	2,4481	2,3909
25	2,8265	2,9342	2,9398	2,9093	2,8651	2,8049	2,7427	2,6807	2,6041
30	2,9221	3,0574	3,0685	3,0466	3,0124	2,9544	2,9007	2,8565	2,7918
40	3,0688	3,1983	3,2323	3,2425	3,2285	3,1920	3,1615	3,1066	3,0677
50	3,1468	3,2984	3,3420	3,3616	3,3518	3,3392	3,3197	3,2808	3,2459
75	3,2687	3,4210	3,5008	3,5274	3,5367	3,5381	3,5331	3,5207	3,4982
100	3,3353	3,4955	3,5738	3,6165	3,6340	3,6426	3,6404	3,6421	3,6385

Fonte: Os autores.

3 Resultados e Discussão

3.1 Teste de bondade de ajuste para a distribuição BS

Consideremos as hipóteses:

H_0: Os dados provêm de uma distribuição BS(α,β).

H_1: Os dados não provêm de uma distribuição BS(α,β).

Para testar essas hipóteses, utilizamos o procedimento por (CHEN; BALAKRISHNAN, 1995) em que transformamos os dados em dados normais e depois aplicamos os testes para normalidade baseado em entropia e na distância entre a FDE e a FDA. Para avaliar o desempenho dos testes fizemos um estudo de simulação de Monte Carlo. Os testes foram avaliados em duas perspectivas: o tamanho empírico e o poder.

Os valores dos níveis de significância empírico contidos na Tabela 2 foram obtidos através da simulação de 10.000 réplicas de Monte Carlo para diferentes tamanhos de amostras e diferentes valores de α para β=1. O procedimento de obtenção do tamanho do teste foi feito considerando as seguintes etapas:

- Gerar 10.000 amostras de tamanho *n* provenientes de uma distribuição BS(α,β).
- Estimar os parâmetros da distribuição BS a partir dos dados simulados.
- Realizar o procedimento de transformação de dados proposto por (CHEN; BALAKRISHNAN, 1995).
- Calcular as estatísticas de teste proposta por (VASICEK, 1976) e (ANDERSON; DARLING, 1954) para testar normalidade.
- Obter o tamanho empírico do teste calculando a proporção de réplicas que apresentam valor da estatística de teste inferior ao valor crítico para n e m fixados, para a estatística baseada em entropia. Para a estatística de A^2, a proporção de réplicas que apresentam valor superior ao valor crítico.

O valor de *m* adequado para se calcular a estatística de (VASICEK, 1976) de acordo com o critério utilizado em (KOHANSAL; REZAKHAH, 2016).

De acordo com o estudo de simulação foi possível notar que à medida que o valor do parâmetro α aumenta, o tamanho do teste tende a se distanciar do valor nominal de 5%. Isso fica mais notável para o teste de Anderson-Darling. Vale ressaltar a importância do tamanho da amostra no controle do tamanho empírico do teste, a proximidade com o valor nominal fica mais evidente para os maiores valores de *n*, como pode ser visto na Tabela 2.

Tabela 2 - Tamanho do teste para as estatísticas de teste TV_{mn} e A^2, considerando diferentes valores do parâmetro α e β = 1 fixado.

	Estatística TV_{mn}								
	α								
n	0,1	0,25	0,5	0,75	1	1,5	1,75	2	2,5
10	0,0504	0,0475	0,0474	0,0474	0,0465	0,0435	0,0420	0,0408	0,0388
25	0,0476	0,0494	0,0498	0,0496	0,0485	0,0464	0,0445	0,0423	0,0405
50	0,0542	0,0492	0,0490	0,0489	0,0475	0,0447	0,0428	0,0413	0,0387
100	0,0518	0,0574	0,0567	0,0576	0,0566	0,0550	0,0539	0,0525	0,0505
	Estatística A^2								
10	0.0513	0.0509	0.0507	0.0508	0.0496	0.0449	0.0411	0.0377	0.0323
25	0.0509	0.0504	0.0513	0.0506	0.0479	0.0422	0.0382	0.0353	0.0302
50	0.0479	0.0479	0.0479	0.0471	0.0449	0.0391	0.0357	0.0324	0.0286
100	0.0494	0.0497	0.0497	0.0489	0.0486	0.0424	0.0383	0.0360	0.0296

Fonte: Os autores.

Com o intuito de avaliar o poder do teste, separamos as distribuições para a hipótese alternativa em dois grupos: as distribuições com suporte (0,1), composto pela distribuição Beta e distribuições assimétricas com suporte (0,∞), composto pelas distribuições: Exponencial (Exp), Weibull, Gama, Log-Normal (LN), Qui-Quadrado (χ^2), Inversa Gaussiana (IG), Pareto e Half-Normal (Hnorm), com parâmetros especificados na Tabela 3. O procedimento para obtenção do poder do teste é similar ao procedimento de obtenção do tamanho do teste, a diferença está na geração da amostra que não provêm de uma distribuição BS. As etapas são as seguintes:

- Gerar 10.000 amostras de tamanho n provenientes de uma das distribuições citadas anteriormente.
- Estimar os parâmetros da distribuição BS a partir dos dados simulados.
- Realizar o procedimento de transformação de dados proposto por (CHEN; BALAKRISHNAN, 1995).
- Calcular as estatísticas de teste proposta por (VASICEK, 1976) e (ANDERSON; DARLING, 1954) para testar normalidade.

- Obter o poder do teste calculando a proporção de réplicas que apresentam valor da estatística de teste inferior ao valor crítico para n e m fixados, para a estatística baseada em entropia. Para a estatística de A^2, a proporção de réplicas que apresentam valor superior ao valor crítico.

Os valores na primeira coluna da Tabela 3 representam as hipóteses alternativas, ou seja, as distribuições alternativas em que foi baseado o teste e seus respectivos parâmetros.

Tabela 3 - Poder do teste TV_{mn} e A^2 sob as seguintes alternativas.

	Estatística TV_{mn}			
	n			
Alternativa	10	25	50	100
Exp(1)	0,0726	0,2420	0,5713	0,8798
Weibull(2,1)	0,1163	0,2780	0,5426	0,8361
Gama(0,75;1)	0,0580	0,2047	0,6333	0,9358
LN(1,1)	0,0476	0,0405	0,0536	0,0734
$\chi^2_{(3)}$	0,0683	0,2023	0,4138	0,7170
IG(0,5;1)	0,0474	0,0470	0,0469	0,0572
Pareto(4,1)	0,4057	0,9285	0,9991	1,0000
Hnorm(1)	0,1289	0,4850	0,8248	0,9861
Beta(3,3)	0,1338	0,4065	0,7449	0,9762
	Estatística A^2			
Exp(1)	0.1484	0.4399	0.7400	0.9569
Weibull(2,1)	0.1642	0.3992	0.6698	0.9216
Gama(0,75;1)	0.1357	0.4878	0.8288	0.9843
LN(1,1)	0.0626	0.1017	0.1458	0.2304
$\chi^2_{(3)}$	0.1336	0.3299	0.5822	0.8539
IG(0,5;1)	0.0487	0.0486	0.0540	0.0593
Pareto(4,1)	0.4234	0.8914	0.9972	0.9999
Hnorm(1)	0.2311	0.6155	0.9026	0.9959
Beta(3,3)	0.1772	0.4630	0.7742	0.9799

Fonte: Os autores.

Observando a Tabela 3, vemos que o tamanho da amostra influencia no poder dos testes, à medida que o tamanho da amostra aumenta, o poder do teste também aumenta. Para as duas estatísticas de teste, foi obtido maior poder para as distribuições Pareto, Beta, Half-normal. Quando consideramos as distribuições Log-Normal e Inversa Gaussiana, os poderes são próximos ao tamanho do teste. Isso ocorre, porque essas distribuições têm comportamento semelhantes a distribuição BS, em algumas casos, fazendo com que os testes não consigam detectar tais diferenças.

4 Aplicação à dados reais

Para ilustrar a metodologia apresentada, consideramos os dados apresentados em (BIRNBAUM; SAUNDERS, 1969b). Esses dados se referem ao tempo de vida de cupons de alumínio do tipo 6061-T6, em que materiais foram submetidos a cortes em um ângulo paralelo à direção de rotação e oscilação de 18 ciclos por segundo, os respectivos dados foram separados em três grupos, de acordo com a tensão máxima imposta sobre o material, por ciclos ($\times 10^{-3}$), em Psi (libras por polegada quadrada). O nosso objetivo é testar a hipótese de que os dados em questão provêm de uma distribuição BS. Ou seja, queremos testar as seguintes hipóteses: H_0: Os dados provêm de uma distribuição BS, contra H_1: Os dados não provêm de uma distribuição BS. Para isso, primeiramente, usamos a transformação dada por (CHEN; BALAKRISHNAN, 1995) e depois aplicamos os testes de bondade de ajuste proposto neste artigo e comparamos o resultado obtido pela estatística de teste de baseada em entropia com a estatística de teste de Anderson-Darling, A^2. Os resultados obtidos podem ser observados na Tabela 4. Comparando com o valor crítico obtido na Tabela 1 para n = 100, m = 6 e nível de significância de 5%, ou seja, $tv_{mn} = 3,6340$, não rejeitamos a hipótese dos dados terem distribuição BS, para a estatística de A^2, também não rejeitamos a hipótese H_0. É importante ressaltar que os resultados obtidos para esse conjunto de dados vão de acordo com o que já existe na literatura.

Tabela 4 - Estatísticas observadas para cada teste considerado.

Estatística	(Psi 21.000)	(Psi 26.000)	(Psi 31.000)	Valor crítico
TV_{mn}	3,7704	3,8154	3,8821	3,6340
A^2	0,6755	0,4086	0,5296	0,7367

Fonte: Os autores.

5 Conclusões

Apesar de apresentar poderes bem próximos, a estatística de Anderson-Darling obteve maior poder que a estatística baseada em entropia. Entretanto, a estatística A^2 tende a perder o controle sobre o tamanho empírico do teste mais rápido que a estatística de Vasicek. Em decorrência disso, A estatística de teste proposta por (VASICEK, 1976), se mostra como uma boa opção sob as alternativas Half-Normal, Beta e Weibull. Porém, para as distribuições Log-Normal e Inversa Gaussiana, a estatística de teste em questão não consegue discriminar esses modelos, uma vez que para a escolha de parâmetros considerada as funções de risco são semelhantes.

6 Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Cientifico e Tecnológico - Brasil. Ao PIBIC/CNPq pelo financiamento do projeto de pesquisa de iniciação cientifica. A minha orientadora, Professora Michelli Barros. Ao meu coorientador, Professor Joelson Campos.

Referências

ANDERSON, Theodore W.; DARLING, Donald A. A test of goodness of fit. **Journal of the American statistical association**, v. 49, n. 268, p. 765-769, 1954.

BARROS, Michelli; PAULA, Gilberto A.; LEIVA, Víctor. A new class of survival regression models with heavy-tailed errors: robustness and diagnostics. **Lifetime Data Analysis**, v. 14, n. 3, p. 316-332, 2008.

BARROS, Michelli et al. Goodness-of-fit tests for the Birnbaum-Saunders distribution with censored reliability data. **IEEE Transactions on Reliability**, v. 63, n. 2, p. 543-554, 2014.

BIRNBAUM, Zygmund William; SAUNDERS, Sam C. A new family of life distributions. **Journal of Applied probability**, v. 6, n. 2, p. 319-327, 1969a.

BIRNBAUM, Zygmunt W.; SAUNDERS, Sam C. Estimation for a family of life distributions with applications to fatigue. **Journal of Applied probability**, v. 6, n. 2, p. 328-347, 1969b.

CHEN, Gemai; BALAKRISHNAN, N. A general purpose approximate goodness-of-fit test. **Journal of Quality Technology**, v. 27, n. 2, p. 154-161, 1995.

EBRAHIMI, Nader; PFLUGHOEFT, Kurt; SOOFI, Ehsan S. Two measures of sample entropy. **Statistics & Probability Letters**, v. 20, n. 3, p. 225-234, 1994.

JOHNSON, Norman L.; KOTZ, Samuel; BALAKRISHNAN, N. **Continuous univariate distributions, vol. 2** of wiley series in probability and mathematical statistics: applied probability and statistics. 1995.

KOHANSAL, Akram; REZAKHAH, Saeid. Modified entropy estimators for testing normality. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 86, n. 3, p. 553-568, 2016.

LEIVA, Víctor et al. Lifetime analysis based on the generalized Birnbaum–Saunders distribution. **Computational Statistics & Data Analysis**, v. 52, n. 4, p. 2079-2097, 2008a.

LEIVA, Víctor et al. Generalized Birnbaum-Saunders distributions applied to air pollutant concentration. **Environmetrics**, v. 19, n. 3, p. 235-249, 2008b.

LEIVA, Víctor et al. Random number generators for the generalized Birnbaum–Saunders distribution. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 78, n. 11, p. 1105-1118, 2008c.

LEIVA, Víctor; SANHUEZA, Antonio; ANGULO, José M. A length-biased version of the Birnbaum-Saunders distribution with application in water quality. **Stochastic Environmental Research and Risk Assessment**, v. 23, n. 3, p. 299-307, 2009.

LEIVA, Victor. **The Birnbaum-Saunders Distribution**. Academic Press, 2015.

MEEKER, William Q.; ESCOBAR, Luis A. Statistical methods for reliability data, 1998. **John Wiey & Sons**.

SAUNDERS, Sam C. **Reliability, life testing and the prediction of service lives: For Engineers and Scientists**. Springer Science & Business Media, 2007.

SHANNON, Claude E. A mathematical theory of communication. **Bell system technical journal**, v. 27, n. 4, p. 623-656, 1948.

VAN ES, Bert. Estimating functionals related to a density by a class of statistics based on spacings. **Scandinavian Journal of Statistics**, p. 61-72, 1992.

VASICEK, Oldrich. A test for normality based on sample entropy. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, p. 54-59, 1976.