

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MODELAGEM MATEMÁTICA: IMPORTANTES ESTRUTURAS PARA O ESTUDO DE CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO DE POPULAÇÕES

Hélio Oliveira Rodrigues¹

¹Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Pernambuco DEaD-IFPE; FAINTVISA-PE

RESUMO

Em ciências e em engenharia, alguns princípios dizem respeito a relações entre quantidades, as quais estão sempre variando. Desta forma, as taxas de variações por serem matematicamente representadas na forma de derivadas, não são surpreendentes que esses princípios estejam frequentemente expressos em forma de Equações Diferenciais. Neste sentido, no presente estudo serão apresentados alguns modelos matemáticos importantes, que envolvem, não apenas a aplicação dessas equações, mas também, a resolução de problemas voltados para as questões ambientais, mostrando tanto a importância de suas aplicações nesse campo do conhecimento, quanto sua aplicação a partir da resolução numérica através do software MAPLE. No trabalho foram também utilizados importantes comandos, para busca de soluções exatas e gráficas, com a perspectiva de contribuir de forma significativa com a construção do conhecimento matemático. Na metodologia foram utilizados alguns ambientes computacionais interativos de simulação que permitem a exploração de conexões entre o modelo e o comportamento real do sistema, através de expressões algébricas simbólicas e cálculo numérico permitindo inclusive o desenho de gráficos a duas ou a três dimensões, oferecendo uma visualização matemática interativa tornando-se uma importante ferramenta para usuários nos campos da educação. Na definição do estudo pode ser constatado que as Equações Diferenciais se caracterizam como de fundamental importância para o estudo das questões ambientais, por delas serem estudados fenômenos da natureza, nas mais diferentes áreas de aplicação. Isto fica evidente, a princípio, quando no campo da resolução computacional se faz necessário discretizar o domínio com uma malha de pontos em situações reais, para que sejam estudados seus efeitos de longo, ou quando é perseguida a solução analítica dessas equações que envolvem sistemas ambientais.

Palavras Chave: Equações Diferenciais; Modelagem Matemática; Questões Ambientais.

RELATO HISTÓRICO SOBRE ECOSISTEMAS E MODELAGEM

Na idade antiga, às necessidades da sociedade impulsionou a busca pelo desenvolvimento dos modelos matemáticos para explicar as observações do mundo físico, na tentativa de se obter uma melhor compreensão dos fenômenos da natureza. Neste sentido, a enorme complexidade dos problemas ecológicos tem sido uma grande barreira para a compreensão dos problemas ambientais. Desta forma, os mais variados tipos de modelos matemáticos existentes, se fundamentam em equações diferenciais ordinárias (EDO's) e parciais (EDP's). Segundo Bassanezi (2002).

A modelagem matemática voltada para o meio ambiente evoluiu através de diferentes campos, por exemplo, no campo da ecologia, que apresenta vários níveis hierárquicos, a modelagem evoluiu através de estudos de populações, comunidades e ecossistemas, onde os primeiros modelos aplicados às populações foram apresentados por Malthus (*apud* Rodrigues, 2008) e Verhulst (*apud* Rodrigues, 2008), sendo este último elaborado por Verhulst sobre crescimento de peixes, muito estudado no século XX. O primeiro modelo matemático a ser apresentado à Ecologia foi o modelo de Malthus (1798). Esse modelo tem grande significado para a ecologia, por prever crescimento populacional, baseando-se em Equações Diferenciais muito simples, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial t} N(t) = r N(t)$$

Isto, para $t = 0$ e $N_t = N$,

Onde:

N_t = número de indivíduos da população no instante t ;

N_0 = número inicial de indivíduos da população;

r = razão intrínseca ($r = b - d$, onde b é a taxa de nascimento e d é a taxa de mortalidade).

Portanto, o uso de modelos matemáticos como hipótese de trabalho é de fundamental importância para a implantação de estudos nesse campo de estudo.

Objetivo Geral

Analisar a modelagem matemática a partir das equações diferenciais em torno de estudos sobre crescimento e decréscimo de populações.

Objetivos Específicos

- ✓ Levantar informações sobre a aplicação da modelagem matemática em função das equações diferenciais sobre crescimento e decréscimo de populações;
- ✓ Compreender como é desenvolvida a modelagem matemática ética a partir do estudo sobre crescimento e decréscimo de populações;
- ✓ Mostrar como se desenvolve a modelagem matemática a partir de uma solução numérica de uma situação problema envolvendo um fenômeno biológico.

METODOLOGIA

A metodologia adotada neste trabalho foi desenvolvida a partir de uma abordagem qualitativa, exploratória de forma descritiva, através das concepções de (OLIVEIRA, 2011).

Qualitativa por trabalhar, predominantemente, com dados a partir de conceitos e métodos encontrados nos dados disponibilizados. Exploratória de forma descritiva por possibilitar uma melhor compreensão do fenômeno estudado (MOREIRA, 2003). O estudo em si a princípio mostra a importância das equações diferenciais ordinárias para o estudo e resolução dos problemas ambientais e posteriormente relacionar os aspectos relevantes nesse campo do conhecimento, utilizando um procedimento computacional. Nestas áreas têm se destacado alguns ambientes computacionais interativos de simulação que permitem a exploração de conexões entre o modelo e o comportamento real do sistema. Desta forma, para mostrar a importância das equações diferenciais na resolução de problemas das questões ambientais foi desenvolvida neste trabalho, uma ferramenta computacional e implementada através da utilização do software Maple. A escolha do Software como ambiente para o desenvolvimento da ferramenta se deram por três motivos: O primeiro, pela sua estrutura ser muito utilizada na computação em estudos e análises de expressões algébricas, simbólicas e cálculo numérico permitindo inclusive, o desenho de gráficos a duas ou a três dimensões, oferecendo uma visualização matemática interativa tornando-se uma importante ferramenta para usuários nos campos da educação, pesquisa e indústria. O segundo, por ser uma ferramenta de fácil utilização, sendo ideal, para pesquisadores por ser um ambiente de matemática completo para resolução de problemas e possuir uma imensa variedade de operações matemáticas que além de resolver equações diferenciais, derivação e integração tem a capacidade de calcular soluções tanto analíticas como numéricas para equações diferenciais ordinárias e parciais, solucionando sistemas de equações diferenciais, inclusive às condições iniciais e de contorno e o terceiro pela disponibilidade de diversos recursos, como boas ferramentas de visualização, rotinas para ordenação de vetores e cálculos, que facilitam o trabalho de programação.

APLICAÇÃO PRÁTICA DE UMA SOLUÇÃO NUMÉRICA

Em Ecologia, quando se procura determinar o sistema a ser modelado, pode-se pensar em três níveis, ou seja, população, comunidade e ecossistema.

Desta forma, Malthus (*apud* Rodrigues, 2008), para prever o crescimento populacional baseou-se na equação dada pela forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} N(t) = r N(t)$$

, para $t = 0$ e $N(t) = N(0)$.

SITUAÇÃO PROBLEMA

Considere uma população de presas que precisa ser controlada, em virtude da degradação causada numa lavoura. Para isso, foram desenvolvidos predadores, para combater a degradação. Ao ser iniciado o combate através dos predadores foi observado num lote de 120.000 presas que 20.000 delas foram eliminadas em 10 dias, seguindo um combate entre predador e presa proporcionalmente a cada instante. Para desenvolver um novo plantio com segurança foi necessário estimar previsões a partir de duas situações. A primeira, verificar em quanto tempo as presas estariam reduzidas a metade, para que se pudesse reiniciar um novo plantio e a segunda, fazer uma descrição gráfica para que fosse possível observar o controle da situação.

a) O tempo necessário para que as presas sejam reduzidas a metade da população inicial;

> eq1:=diff(N(t),t) = r*N(t); $eq1 := \frac{\partial}{\partial t} N(t) = r N(t)$

> eq1.1 := dsolve({eq1, N(0) = 120000}, N(t)); $eq1.1 := N(t) = 120000 e^{(r t)}$

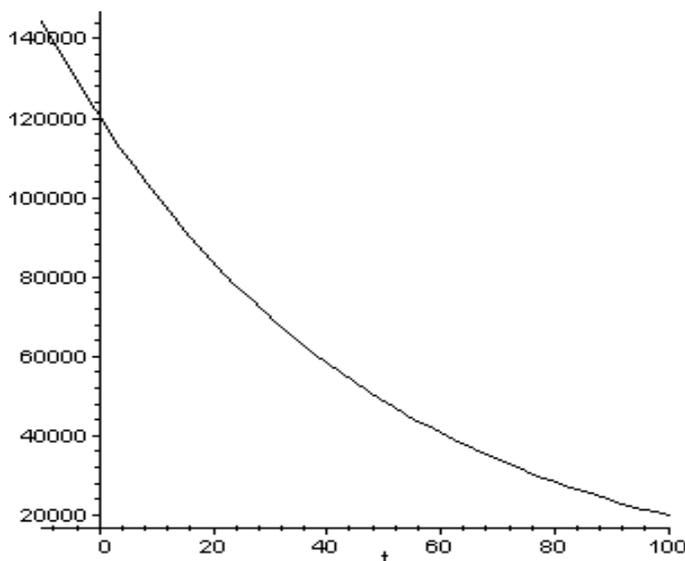
> solve(subs(N(t) = 100000, t = 10, eq1.1), {r}); $\left\{ r = \frac{1}{10} \ln\left(\frac{5}{6}\right) \right\}$

> eq1.2 := subs(%, eq1.1); $eq1.2 := N(t) = 120000 e^{\left(\frac{1}{10} \ln\left(\frac{5}{6}\right) t\right)}$

> `evalf(solve(subs(N(t) = 60000,eq1.2),{t}));` {t = 38.01784017}.

b) Faça uma descrição gráfica para que seja possível observar o controle da situação

Gráfico 01: Representação da função - `plot(120000*exp(1/10*ln(5/6)*t),t = -10..100)`



Vale salientar que no **Gráfico 01**, $N(t)$ representa a população de presas, para o intervalo:

$$-10 < t < 100 \text{ dias.}$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS E DEFINIÇÃO DO ESTUDO

As Equações Diferenciais Parciais são de fundamental importância para que sejam estudados vários fenômenos da natureza, nas mais diferentes áreas de aplicação. No presente estudo isto pode ser observado a partir do momento que elas exercem um papel importante para se estudar os fenômenos ambientais. Um exemplo pode ser dado, quando no campo da resolução computacional se faz necessário discretizar o domínio com uma malha de pontos em situações reais, para que sejam estudados os efeitos de longo prazo. A solução analítica dessas equações em sua grande maioria é impossibilitada, pela grande dispersão das propriedades dos materiais e da complexa geometria que envolve os sistemas ambientais.

Neste sentido, este trabalho sugere, a partir da fuga de uma formalização tradicional conservadora acadêmica, um entendimento conceitual que venha contemplar a gênese do conhecimento. Tal formalização contribuirá, para o desenvolvimento dos conteúdos na sua crítica e elaboração contextual, e cultural, para maior interação dos fundamentos de sistemas dinâmicos na tentativa de motivar estudantes pesquisadores a aproveitar as potencialidades do software, não apenas para resoluções de questões ambientais, mas utilizar seus métodos nos cursos de graduação, fazendo o desenvolvimento de aplicações numéricas a partir desta ferramenta, por esta se adequar de forma incontestável a resolução interativa de problemas ambientais, sendo de grande importância para as grandes mudanças de contextos possibilitando o desenvolvimento de experimentos e auxiliando o estudo do comportamento das funções, dando grandes contribuições nas mais diversas áreas do conhecimento humano.

REFERÊNCIAS

- BABINI, J. & PASTOR, J. **História da Matemática: De la antigüedad a la baja Edad Media**. v. 2. Barcelona: gedisa, 2000.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino Aprendizagem com Modelagem Matemática**. Editora Contexto, 2002.
- MOREIRA, Marco A. **Sobre Monografias, Dissertações, Teses, Artigos e Projetos de Investigação: Significados e recomendações para Principiantes na Área de Educação Científica**. In: ActasdelPIDEC: textos de apoio do Programa Internacional de Doutorado em Ensino de Ciências da Universidade de Burgos. v. 5. Editores: Marco Antônio Moreira e Concesa Caballero. Porto Alegre: UFRGS, 2003.
- OLIVEIRA, Maria Marly de. **Como fazer projetos, relatórios, monografias, dissertações e teses**. 5. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.
- RODRIGUES, H. O. **Importância das Equações Diferenciais para o Estudo das Questões Ambientais**. Dissertação de mestrado apresentada para obtenção do título de Mestre em Tecnologia Ambiental, ao Instituto de Tecnologia de Pernambuco – Recife, 2008.