O EXPERIMENTO DE PITÁGORAS COM O MONOCÓRDIO: UMA ABORDAGEM HISTÓRICO-DIDÁTICA

Oscar João Abdounur [1]

RESUMO
Realizada por volta o século 6 a.C. , a experiência de Pitágoras com o monocórdio consistiu em fixar uma corda em dois pontos, variando o sons produzidos por meio de um dispositivo móvel para pressioná-la em várias posições. Para os pitagóricos, as razões matemáticas subjacentes aos intervalos musicais de oitava, quinta e quarta – consonâncias perfeitas – eram respectivamente 1:2, 2:3 e 3:4 teriam sido reveladas neste experimento. O experimento de Pitágoras com o monocórdio lança questões não apenas na música, mas em arquitetura e em vários outros contextos, tendo como base razões matemáticas. Ele ainda nos diz que às composições de intervalos musicais subjazem composições de razões matemáticas. Esta apresentação pretende explorar o potencial didático de tal experimento sob a perspectiva cultural da Matemática, particularmente concernente ao papel da música teórica no desenvolvimento de estruturas vinculadas ao conceito de razão matemática. O trabalho propõe oficinas com problemas envolvendo monocórdios que possibilitam caminhos matemáticos e musicais de solução, contexto este que resgatando o sentido histórico original dos conceitos de razão e proporção, possibilita uma abordagem conceitual histórica heurística de tais conceitos.

Palavras-chave: monocórdio, composição de razões, matemática/música, razões, Experimento de Pitágoras.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, será considerado o potencial educacional de um operador matemático semanticamente e estruturalmente próximo a procedimentos presentes na música teórica ao longo da história. Trata-se da ideia de composição de razões, que a rigor não possui historicamente o *status* de um conceito matemático, mas ocorre tacitamente em tratados de matemática e de música teórica ao longo da história desde *Os Elementos* de Euclides, em que as evidências apontam ser o primeiro momento que se tem registro desta ideia.

A ideia de composição de razões apresenta-se como uma operação peculiar presente na estrutura dos conceitos matemáticos de razão e proporção desde o período clássico. Tal operação possui semelhança estrutural com a operação multiplicação, transformando-se ao longo de sua história de forma irregular até aproximar-se deste último conceito, o que é representativo do papel do contexto teórico-musical na aritmetização de razões. O caso considerado possui ainda potencial didático a serviço de evidenciar diferenças entre

[1] Professor associado da Universidade de São Paulo, abdounur@ime.usp.br;

identidade e proporção, na medida em que a abordagem matemático-musical neste caso distancia semanticamente tais conceitos, tornando suas demarcações mais nítidas.

O contexto matemático-musical permite elucidar diferenças semânticas existentes entre conceitos de composição e de multiplicação, assim como entre conceitos de proporção e de identidade, que praticamente desaparecem quando consideradas sob uma perspectiva puramente aritmética. Para tal, um pressuposto necessário é a correspondência entre razão matemática e intervalo musical, cujo fundamento histórico é determinante para a compreensão da abordagem aqui considerada.

A prática grega clássica de lidar com razões, realizada predominantemente até o período moderno, inseriu-se em uma importante tradição no tratamento de razões, passível de estimular o estabelecimento de analogias estruturais subjacentes a tais conceitos pertencentes a princípio, sob uma perspectiva classificativa atual, a diferentes campos do conhecimento. Tal abordagem promove uma compreensão de estruturas segundo as quais conceitos matemáticos foram tratados e, reciprocamente, uma compreensão da maneira aparentemente sem sentido -- se desconsiderada tal abordagem -- em que tais conceitos matemáticos foram manipulados por um longo período de tempo antes de atingir a estrutura atual.

A consciência dessas práticas possibilita a aquisição de uma atitude flexível em relação às estruturas existentes anteriormente ao enfrentar problemas em geral, bem como de uma ferramenta a serviço da resolução de problemas e de modo geral da heurística matemática. A abordagem considerada também auxilia na revelação, por meio de conceitos simples tais como razões matemáticas e proporções, processos epistemológicos envolvidos na construção de novas teorias matemáticas, como, por exemplo, o de tomar emprestadas estruturas de teorias análogas pré-existentes para então se desenvolverem de maneira autônoma em seu novo contexto, adaptando-se aos problemas práticos os quais essas novas teorias passam a enfrentar ao longo do seu desenvolvimento.

Para melhor compreender tais reflexões, considera-se primeiramente a introdução de alguns aspectos históricos dos conceitos de razão e de proporção matemáticas, bem como do operador que chamaremos de composição de razões matemáticas em contextos matemático-musicais, assim como de estruturas correspondentes em que a composição faz sentido, para então considerar exemplos da prática de composição no monocórdio, assim como aspectos didático-epistemológicos subjacentes a tal prática.

METODOLOGIA

Matemática e Música possuem vínculos desde a Antiguidade. No conhecido experimento de Pitágoras com o monocórdio, que estabelece correspondência entre intervalos musicais e razões matemáticas de uma corda, relacionou-se, sob uma perspectiva aritmética, consonâncias musicais a razões matemáticas simples, de modo que aos intervalos musicais de oitava, de quinta e de quarta, subjaziam razões matemáticas 1:2, 2:3 e 3:4, respectivamente. A descoberta de Pitágoras com o experimento do monocórdio lança luz sobre inúmeras discussões no âmbito da música teórica tendo por fundamento os conceitos matemáticos de razão e de proporção.

É plausível que, por razões culturais, matemáticos gregos juntamente com seus contemporâneos e predecessores, tenham concebido razões matemática como generalização de intervalos musicais e de maneira mais ampla, teorias das razões e proporções matemáticas como generalização da música, na medida em que propriedades de cordas e comparações entre tons, assim como cálculos relacionados a tais magnitudes através dos conceitos de razão e proporção, consistiam em uma importante parte da matemática desde os pitagóricos até Euclides (Abdounur, 2001, p. 8; Grattan-Guinness, 1996, p. 367).

O estabelecimento de tal vínculo levanta ainda questões referentes a teorias matemáticas subjacentes às manipulações com razões matemáticas desde a Antiguidade até o final da Idade Média, tanto em contextos matemáticos como em contextos teórico-musicais. A influência tanto de problemas teóricos quanto práticos confrontados pela música ao longo de sua história possibilita à historiografia da matemática, bem como à educação matemática, uma consciência epistemológica mais ampla do desenvolvimento dos conceitos de razão e de proporção matemática.

Tal consciência dá subsídios, por exemplo, à criação de contextos que esclareçam diferenças entre conceitos relacionados e/ou resultantes de razões e proporções, tais como as que existem entre composição e multiplicação, identidade e proporção dentre outros pares, diferenças estas mais difíceis à percepção, quando tais conceitos são abordados, por exemplo, apenas em contextos aritméticos.

Há diversos temas acerca da relação entre matemática e música, e em particular, entre razões matemáticas e intervalos musicais, passíveis de ser explorados em educação matemática. Aqui se concentra nesta característica intrigante da estrutura originalmente associada a razões e proporções matemáticas, a saber, o conceito de composição de razão, embora este nunca tenha tido o *status* de um termo técnico em matemática (Sylla, 1984, p. 19). Tal operador manifestou-se tacitamente em contextos envolvendo razões e proporções matemáticas desde o período clássico até o século XVII, aproximando-se finalmente do conceito aritmético de multiplicação.

A mudança estrutural ocorre de teorias envolvendo concepções de operações semanticamente vinculadas a intervalos musicais contíguos para teorias admitindo a composição de razões de forma irrestrita - multiplicação - com um caráter essencialmente aritmético, que inclui, por exemplo, a aproximação semântica entre razão e número. Uma questão desafiadora neste contexto seria como abordar, do ponto de vista didático, tal mudança epistemológica no desenvolvimento histórico do conceito de razão matemática, de tal forma a criar-se um domínio em que tal diferença se manifeste mais claramente do que em domínios puramente aritméticos.

Quando se observa que tal estrutura transitória, com a qual razões matemáticas foram parcial e irreversivelmente munidas durante um longo período, deriva de contextos musicais e que a composição não faz sentido fora de tais contextos, é razoável considerar a música como cenário para abordar tais diferenças, uma vez que em tal cenário se destaca a estrutura original vinculada ao conceito de razão. Antes de introduzir aspectos educacionais de tal tema, consideram-se aqui alguns antecedentes históricos da composição de razões.

Indicadores de diferentes teorias ligadas ao conceito de razão são encontrados associados a questões como a restrição de Euclides na operação de composição com razões presentes nas definições 9 e 10 do Livro V, bem como na proposição 23 do Livro VI (Heath, 1956, p.248). Tais operações consistiam na composição de razões do tipo a: b com b: c para produzir a: c, o que permite a repetição recursiva deste processo com c:d e assim por diante (Abdounur, 2001, p.5).

Com fortes afinidades musicais, esta operação exigia, em geral, que, dada uma sequência de razões matemáticas a serem compostas, o segundo termo de uma razão fosse igual ao primeiro termo da razão subsequente. Matematicamente falando, não há razão para operar-se desta maneira e provavelmente isto não ocorreria desta forma sem uma remissão ao seu significado musical, a saber, a composição (agrupamento) de intervalos musicais contíguos.

Por exemplo, (2:3)(3:4)::(1:2) é estruturalmente equivalente à composição musical do intervalo musical de quinta com o de quarta para gerar um intervalo musical de oitava. Sob tal perspectiva, o experimento de Pitágoras parece fornecer a princípio dois resultados importantes, cujas implicações didático-epistemológicas tentaremos apontar em seguida.

O primeiro resultado e mais geral é que razões matemáticas subjazem a intervalos musicais. Além disso, tal experimento também significa, mais especificamente, que a composição de razões matemáticas explica a composição de intervalos musicais contíguos, e talvez, devido a este vínculo, a composição de razões matemáticas em contexto euclidiano é tratada desta maneira. Tal diferença possui potencial para despertar interesse merecendo ainda atenção em contextos educacionais.

A partir de tais considerações, propõem-se explorar em contextos didático-pedagógicos estes dois entendimentos diferentes e complementares do conceito de razão, um geométrico-musical em que razão consiste em uma comparação entre grandezas homogêneas (dois comprimentos, duas notas, etc) e não possui proximidade semântica com número e outro, em que razão se identifica semanticamente com o conceito de número, passível de ser multiplicado da mesma forma com que os números são multiplicados. Para tornar clara tal mudança epistemológica presente no desenvolvimento histórico do conceito de razão, faz-se uso de contextos musicais.

DESENVOLVIMENTO

Em seguida, são descritos alguns problemas envolvendo razões e proporções matemáticas no monocórdio, a partir dos quais se estabelece reflexões acerca das implicações educacionais de atividades envolvendo matemática e música. De modo geral, ao reproduzir uma situação histórica, tais atividades reproduzem direta ou indiretamente estruturas presentes simultaneamente em matemática e em música, criando circunstâncias que propiciem experiências de similaridade entre esquemas por trás das situações originais e reconstruídas.

As situações apresentadas a seguir consistem basicamente de compor intervalos/razões por meio do monocórdio, onde a composição no sentido euclidiano não se coloca na mesma categoria da multiplicação, embora o primeiro apresente semelhanças estruturais com o segundo. Tanto diferenças quanto semelhanças entre composição e multiplicação em contextos musical e aritmético, respectivamente, tornam-se evidentes e melhor compreendidas com auxílio de uma reconstrução enriquecida do experimento do monocórdio.

Tal reconstrução pode ocasionar o interesse pela matemática por meio da música e vice-versa, capacidade esta que não apenas estimula a relação entre duas áreas e as habilidades relacionadas, mas também exige habilidades matemáticas em contextos musicais e habilidades musicais em contextos matemáticos por meio de um arranjo simples envolvendo conceitos elementares.

Estas atividades exigem inicialmente, no caso de alunos não familiarizados com música, a experiência com a percepção musical especialmente de intervalos tais como oitava, quinta e quarta – as consonâncias perfeitas --, pressuposto para as atividades com o monocórdio. Após tal familiarização, é importante a reprodução do experimento de Pitágoras, identificando tais consonâncias perfeitas no monocórdio, cujas razões matemáticas correspondentes são 1: 2, 2: 3 e 3: 4.

Envolvendo conceitos matemáticos e musicais, pode-se considerar alguns problemas no monocórdio, tais como:

- Seja L o comprimento que produz uma determinada nota no monocórdio. Qual é o comprimento de corda necessário para produzir uma altura, que resulta da elevação do tom original por uma oitava e uma quinta, seguindo-se da descida de dois intervalos de quarta? Ouça o tom resultante no monocordado e compare com o tom obtido no piano. Comente.
- Seja *do* a nota correspondente ao comprimento L. Qual é a nota obtida pelo comprimento 32L/27? Indique, em termos de superposição de quartas, quintas e oitavas, os sucessivos passos para obter esta nota. Ao subir uma quarta a partir de uma nota dada, quais são a nota e o comprimento obtidos? Ouça a nota resultante no monocórdio comparando-a com a nota obtida no piano.

Tais problemas em particular, talvez por exigirem simultaneamente aptidões musicais e matemáticas, podem despertar a curiosidade de estudantes que, a princípio, se interessem exclusivamente por matemática ou por música. Dependendo do potencial de cada aluno, pode-se resolver esse tipo de problema encontrando o intervalo musical e verificando a composição de razões que o produz ou encontrando a combinação de razões matemáticas que, quando combinadas, fornecem tal intervalo, verificando-o em seguida.

Estes problemas oferecem ainda a oportunidade não apenas de vivenciar, talvez inconscientemente, a composição de razões matemáticas, mas também de simular operações com razões em contextos musicais gregos e medievais, tendo como elementos operacionais básicos as consonâncias perfeitas, cujas razões discretas subjacentes 1: 2, 2: 3 e 3: 4 não possuem relação categórica com números, mas são meros instrumentos de comparação.

Para ilustrar esses pontos, comentam-se questões relacionadas à solução desses problemas. Limita-se ainda a discussão a algumas abordagens do primeiro problema, bem como questões levantadas como consequência. Neste caso, as soluções passaram basicamente de uma abordagem geométrica para uma aritmética.

Na abordagem de problemas desta natureza, familiariza-se o aluno inicialmente, com intervalos e composição de intervalos musicais/razões matemáticas no monocórdio. Tal experiência permite compor intervalos musicais contíguos/razões matemáticas, em que a segunda magnitude da primeira razão matemática coincide com a primeira magnitude da segunda razão - razões do tipo a:b com b:c - que é o que se observa no monocórdio durante a familiarização. Pode-se neste caso trabalhar com grupos de diferentes tendências, a fim de não somente obter diferentes tipos de interpretações dos problemas, mas também de avaliar o potencial diversificado de cada grupo, uma vez que os problemas tratados exigem pelo menos, habilidades matemáticas e musicais.

Pode-se solicitar inicialmente, que se resolva o problema utilizando uma régua com apenas quatro divisões e um compasso. Depois de visualizar como as composições ocorrem no monocórdio, há basicamente duas tendências na resolução do problema: uma tendência é fazer o cálculo transferindo sempre as razões matemáticas para a corda e dividindo a corda em tantas partes quanto o denominador da razão em questão, levando-se depois o número de partes presentes no numerador - no caso de 2: 3, duas partes da corda previamente dividida em 3 partes - que corresponde à composição no sentido clássico. Outra tendência possível é encontrar a nota resultante - no caso a nota lá - tentando verificar tal resultado ao compor as razões matemáticas 1: 2, 2: 3 e decompondo as razões 3: 4 duas vezes, como no primeiro caso.

Em geral, pode-se ainda encontrar por percepção musical a parte da corda que, quando tocada, resulta na nota lá sem saber precisamente a que razão matemática ou nota tal ponto ou nota corresponda. Então, pode-se resolver o procedimento como na obtenção das consonâncias, compondo-se adequadamente as razões correspondentes para obter a nota em questão, utilizando-se no caso de régua e compasso para construir triângulos semelhantes, a fim de dividir um segmento em 2, 3 e 4 partes, o que resultaria em diferentes soluções. Aqui caberiam, por exemplo, perguntas relacionadas a alterações no resultado ao mudar a ordem do procedimento, o que não é difícil descobrir do ponto de vista musical, uma vez que a composição não é senão a "adição" e a "subtração" de intervalos musicais.

Tal interpretação torna a comutatividade dessa operação intuitiva, assim como mostra também, até certo ponto, como o contexto musical pode elucidar o significado de tal propriedade na estrutura da razão. Estes problemas também fornecem um contexto adequado para refletir sobre como se podem compor intervalos musicais, quando se sabe apenas os comprimentos das cordas, cuja razão fornece cada intervalo, ainda sem régua métrica.

Neste caso, cabe-se tentar adaptar por tentativa e erro o primeiro termo da segunda razão ao segundo termo do primeiro, tomando razões equivalentes ao segundo termo expressas como múltiplos de suas duas grandezas originais. Uma solução musical também caberia aqui, por exemplo, tentando ouvir os intervalos definidos por cada par de cordas cantando suas composições e, às vezes, mantendo o resultado parcial em um teclado para manter a afinação.

É possível neste caso, confirmar o resultado musicalmente, às vezes, passo a passo, outras vezes no final da operação, com base na experiência musical inicial com intervalos e consonâncias. Pode-se fazer isso quase automaticamente, verificando subsequentemente o comprimento da corda que corresponde à altura descoberta. Para realizar tal operação, é sempre possível encontrar a quarta proporção "musical", na medida em que em cada passo tem-se uma razão de referência e o primeiro termo de uma segunda razão que fornece a nota mais grave sobre a qual o intervalo de referência deve ser transladado.

Tal situação também fornece um contexto adequado para questionar como se pode compor intervalos musicais, quando se sabe apenas os comprimentos das cordas cuja razão fornece cada intervalo. Novamente sem régua métrica. Aqui também caberiam soluções mistas para encontrar por meio da audição a razão provável, a partir da qual se pode inferir acerca do fator pelo qual é necessário multiplicar ambos os fatores da segunda razão. Em todos os casos, pode-se fazer uso de um par proporcional de cordas, que não são iguais, mas que possuem alguma propriedade que as torna similares de alguma forma ao primeiro par.

Esta percepção de similaridade realizável pela audição é um ponto que eventualmente pode evidenciar a diferenciação entre proporcionalidade e igualdade, uma diferença que desaparece quando se enfrenta o problema com uma abordagem puramente aritmética fazendo uso, por exemplo, de uma régua métrica. A vantagem da abordagem musical em comparação com a aritmética consiste no fato de que a primeira fornece a intuição, baseada em uma habilidade perceptiva, de que ambos os pares de magnitudes não são iguais, mas que possuem um atributo comum, que é musicalmente o intervalo definido por eles, percepções estas que desaparecem em uma abordagem puramente aritmética.

O contexto mencionado possibilita ainda comentários que evidenciam a sentido do conceito de razão no sentido clássico, tais como o fato de que tais intervalos não são iguais, mas de que um é como se fosse o outro, linguagem condizente com aquela presente nos Elementos de Euclides. A racionalização de tal ideia pode ser refinada, quando não apenas as versões harmônicas, mas também melódicas de uma mesma razão são fornecidas, na medida em que a consciência logarítmica de intervalo musical pode ser traduzida por meio do conceito de proporção entre razões no fato de que as notas caminham uma mesma distância, o que também endossa o conceito de razão no sentido euclidiano diferenciando-o daquele de fração.

Outra questão decorrente consistiria em como proceder para compor *a:b* com *c:d,* quando não há inteiro m tal que *mc* = *a*. Quando se lida apenas com grandezas geométricas, tal questão não ocorre, já que se pode sempre adaptar diretamente uma magnitude a outra, mas isso não ocorreria com números inteiros a serem adaptados um ao outro fazendo uso de múltiplos inteiros. Neste caso, deve-se multiplicar o numerador e o denominador de ambas as razões, resultando como fatores c e b, respectivamente, que ao fazer a composição original proporcional a □ac: bc□.□bc: bd□ :: ac: bd, a conforma ao sentido clássico pressuposto para a composição. Baseando-se, até certo ponto, em tentativa e erro feito antes com grandezas geométricas, tenta-se agora fazer algo análogo com o uso do Múltiplo Mínimo Comum entre b e c. Neste caso, a composição das razões pode ser realizada com intervalos, isto é, a partir de um intervalo determinado com uma nota mais grave, pode-se construir o intervalo correspondente equivalente - razão proporcional – pelo ouvido e sentindo o mesmo 'crescimento' de intervalo.

Os comentários e questões mencionados acima sobre a solução do primeiro problema refletem parcialmente como se pode fornecer um ambiente adequado para vivenciar o sentido geométrico-musical de razões, introduzindo essa abordagem antes de recorrer à régua métrica.

Tais problemas podem ser repetidos permitindo o uso da regra métrica e gradualmente razões matemáticas e composições de razões equiparam-se a números decimais e multiplicação de números decimais respectivamente, diminuindo assim a ênfase na diferenciação entre identidade e proporcionalidade.

Assim, possíveis restrições aos problemas, por exemplo, nos instrumentos fornecidos para suas soluções -- compasso, régua não métrica, régua métrica, instrumentos -- tornam-se mais interessantes, na medida em que induzem a reproduzir a maneira com que distintas tradições lidaram com razões ao longo da história. Estas restrições proporcionam significados diferentes à razão e proporção, podendo-se levar a operar por vezes com a composição e outras vezes com multiplicação. Tal arranjo enriquecido prova ser útil não apenas para ilustrar a importância da razão como um meio de comparação, mas também e mais importante para fornecer um contexto para praticar a diferenciação entre composição e multiplicação, bem como entre proporcionalmente e identidade dentro de uma situação prática significativa.

Além da diferença entre composição e multiplicação, há outras diferenças no contexto da aritmetização de razões, que se tornam transparentes pelo uso do arranjo mencionado anteriormente, como aquela entre identidade e proporção. Em Euclides, a ideia de igualdade de proporções não é natural quanto à dos números ou de grandezas. Tal maneira de estabelecer relações entre razões ganha maior significado quando se considera, que no monocórdio, por exemplo, do-sol e la-mi são os mesmos intervalos - neste caso, de quinta - mas que eles não são iguais, na medida em que este último é uma sexta acima do primeiro, ou até mesmo, que do - sol 'é como' la - mi. Neste caso, a identidade pode ser abordada na dinâmica de ensino/aprendizagem, enfatizando a distinção entre identidade e proporção em contextos matemáticos/musicais, onde tais diferenças se tornam mais claras quando visíveis e "audíveis".

Os problemas e o contexto mencionado também encorajam a percepção de tal diferença, na medida em que se pode ouvir os intervalos fornecidos por razões como 9:12 e 12:16 - ambos são intervalos de quarta, isto é, os mesmos intervalos, mas suas respectivas razões não são iguais - que são proporcionais, mas que não são idênticos. Isso elucida, pelo uso da matemática e da música, as diferenças e semelhanças entre os dois conceitos, o que aborda o entendimento das identificações de *razão* e *fração* e de *proporção* e *igualdade*. Isto abre ainda outras possibilidades para a exploração de tais conceitos em ambos os contextos. Por exemplo, pode-se encontrar a quarta proporcional e deduzir qual é a nota associada ou reciprocamente, dado um intervalo, pode-se descobrir a nota que produzirá o mesmo intervalo dado uma determinado nota mais grave: ambas as situações lidam com magnitudes proporcionais em matemática e contextos musicais simultaneamente. A consciência do procedimento epistemológico subjacente a essa dinâmica não é um pressuposto ou um fim, o que é realmente importante é que se vivencie tal situação e, assim, se estabeleça uma referência com a qual se possa vincular a compreensão de outras situações envolvendo tais conceitos. Da mesma forma, a experiência permitirá desapegar-se de conceitos associados em princípio a áreas fixas.

O contexto de ensino/aprendizagem mencionado acima, bem como a longa história de razões e proporções mostra que, dentro do amplo campo semântico associado a tais conceitos, o conceito de razão teve um papel importante como veículo para se comparar diferentes contextos por meio de proporções, isto é, analogias. Neste sentido, a proposição de que 3:2 corresponde a um intervalo de quinta, bem como a de que os intervalos de quartas são proporcionais, significam que esses dois conceitos pertencentes a campos matemáticos e/ou musicais podem ser comparados entre si por meios da razão de números e intervalo entre notas por meio de proporções. Nesse sentido, é possível vivenciar que a proposição geométrica/musical A: B :: C: D é semanticamente distinta, mas estruturalmente similar à proposição aritmética A/B = C/D, assim como os casos correspondentes em que as razões não são proporcionais e frações não são iguais.

Reciprocamente, fazendo uso do monocórdio, razões e proporções podem ser vistas como instrumentos para avaliar o grau de similaridade entre diferentes contextos. Tal dispositivo também possibilita a compreensão da distinção categórica entre razão e proporção - às vezes mal interpretada -, na medida em que a razão se torna claramente vista como uma comparação envolvendo duas magnitudes do mesmo tipo, enquanto que a proporção ocorre nas situações mencionadas como uma proposição lógica, a qual se pode atribuir um valor ou como uma ferramenta para tornar uma proposição verdadeira. No caso, tal diferença pode ser vivenciada por meio da questão acerca da plausibilidade da igualdade entre dois intervalos ou da proporção entre duas razões. As diferenças entre estes dois conceitos matemáticos tornam-se melhor demarcadas, quando entendidas no âmbito geométrico-musical, do que quando vistas em contextos puramente aritméticos.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A presente abordagem musical amplia a compreensão de razões e proporções em matemática, não apenas devido à sua contextualização histórico-cultural e sua característica interdisciplinar, mas também pelo papel que o pensamento analógico desempenha neste caso para a construção dos conceitos de razão e proporção matemáticas. Neste contexto, é razoável considerar que o entendimento da ideia de razão matemática se amplia na medida em que se vivenciam suas diversas interpretações.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo da história da Matemática e da Música teórica razões e proporções assumiram diferentes significados com naturezas discretas ou contínuas com respeitio à geometria, à música e/ou à aritmética. Dentre tais significados, a razão pode ser vista como uma ferramenta de comparação por meio de proporções, um intervalo musical, uma fração, um número, um invariante com relação à proporção, um fio comum entre contextos distintos com respeito a proporções, ao passo que proporções podem ser vista como um veículo para comparar razões, uma igualdade, uma relação, uma função, etc. Os contextos mencionados acima não somente fornecem um terreno fértil para a compreensão das diferenças sutis e semelhanças estruturais subjacentes à diversidade de interpretações associadas a razões e proporções, como também contribuem para construir e vivenciar de maneira mais ampla seus significados associados.

A percepção de esquemas comuns é uma maneira de construir conceitos que dizem respeito, em princípio, a diferentes áreas. Uma analogia ou metáfora pode reconfigurar uma situação de aprendizagem, possibilitando a compreensão de assuntos que escapam à intuição imediata, ou que possam parecer muito abstratos, como as interpretações associadas a razões e proporções, bem como a variedade de estruturas historicamente associadas a elas.

REFERÊNCIAS

Abdounur, O. J. ‘Ratios and music in the late Middle Ages: a preliminary survey’. Preprint 181. Max Planck Institut für Wissenschaftsgeschichte, 2001.

Grattan-Guinness, I. “Numbers, Magnitudes, ratios, and proportions in Euclid’s Elements: How did he handle them?” *Historia Mathematica* 23 (1996): 355-375.

Grattan-Guinness, I. “Alguns aspectos negligenciados na compreensão e ensino de números e sistemas numéricos.” *Zetetiké* 7, número: 11 (1999): 9-27.

Heath, T. L., ed. *Euclid. The thirteen books of the Elements*. vol.2. New York: Dover Publica- tions, INC., 1956.

Katz, V.J. “The study of ratios.” In *A history of mathematics: an introduction*, edited by V.J. Katz, 289-293. Columbia: Harper Collins College publishers, 1993.

Kieren, T.E. “On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational number” In *Number and measurement*, edited by Lesh, R.S., 101-144. Ohio: Eric Clearinghouse for Sci- ence, mathematics, and Environmental Education, 1976.

Sylla, E.D. “Compounding ratios. Bradwardine, Oresme, and the first edition of Newton’s Prin- cipia.” In *Transformation and tradition in the sciences. Essays in honor of I. Bernard Cohen*, edited by E. Mendelsohn, 11-43. Cambridge: Cambridge University Press, 1984.