

Análise de Erros cometidos pelos alunos em Disciplinas Iniciais de Cálculo e de Geometria Analítica Oferecidas pela UAMat

Leticia Dornellas Dias ¹
Daniel Cordeiro de Moraes Filho ²

RESUMO

Tomando a frase “é errando que se aprende” como uma das premissas indispensáveis para o processo da aprendizagem, a ideia proposta por este trabalho é estudar e analisar erros cometidos por alunos das disciplinas iniciais fornecidas pela Unidade Acadêmica de Matemática (UAMat) da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG) nas disciplinas de Cálculo e Geometria Analítica. A motivação para o seu desenvolvimento surgiu de um diálogo com o tutor do grupo de Programação de Educação Tutorial (PET) - Matemática, sobre erros cometidos por alunos, e partindo da premissa, acredita-se que os erros podem revelar muito sobre a aprendizagem, tornando-se aliados a esse processo. A partir dessa ideia, foram realizadas pesquisas sobre o tema, e foi produzida nossa própria taxonomia de erros, que será apresentada no desenvolvimento do trabalho. Foram utilizados erros reais fornecidos pelo professor da UAMat Amauri Cruz, de sua extensa coletânea dos mais diversos erros, juntada ao longo de muitos anos de docência, para investigação e classificação.

Palavras-chave: Análise de Erros, Matemática, Taxonomia de Erros.

INTRODUÇÃO

Este trabalho foi desenvolvido durante uma atividade de iniciação científica da primeira autora, participante do Grupo de Programação de Educação Tutorial (PET) - Matemática - UFCG, sob a orientação do Professor Dr. Daniel Cordeiro de Moraes Filho. O tema foi motivado após uma conversa entre os autores sobre a importância de estudar os erros dos alunos, a fim de apontar as diversas razões que os levam a cometer esses desvios. Muitas vezes, o erro faz sentido para a pessoa que o cometeu e, ao ser investigado, revela muito sobre a forma de pensar do aprendente. Essa análise, portanto, pode ser posteriormente utilizada pelo professor como auxiliar didático no processo ensino-aprendizagem, em particular, em sua prática docente. Tendo isso em vista, nos propusemos a estudar o tema, almejando investigar quais motivos levam os alunos a cometerem certos erros em disciplinas introdutórias de Matemática na Universidade Federal de Campina Grande (UFCG). Contamos com a ajuda do professor da Unidade Acadêmica de Matemática (UAMat) Amauri Cruz, que nos disponibilizou alguns exemplos de erros de sua coleção para que pudéssemos analisar.

¹ Graduanda do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, bolsista PET-Matemática UFCG, parcialmente financiada pelo FNDE leleluinha@hotmail.com;

² Doutor pelo Curso de Matemática da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, professor da UFCG, tutor do grupo PET-Matemática UFCG, parcialmente financiado pelo FNDE demoraisfilho@gmail.com;

Levando em consideração o fato de que um erro pode esconder muitas informações sobre o discente que o cometeu, o objetivo desse trabalho é conscientizar professores e futuros docentes da importância de considerar, investigar e avaliar os deslizes dos alunos, evidenciando que a análise dessas informações pode ser usada para indicar metas, modificar procedimentos metodológicos e ser um auxiliar no processo ensino-aprendizagem.

METODOLOGIA

Inicialmente, o trabalho foi realizado por meio de pesquisas bibliográficas sobre o tema, onde estudamos textos que já trabalharam com o assunto. Com base na bibliografia que montamos e nas experiências pessoais do orientador, fomos capazes de criar a nossa própria taxonomia dos erros. Em seguida, analisamos erros reais, tomando como base a taxonomia que elaboramos. Por fim, baseado nos desvios analisados, criamos uma lista de exercícios como uma tentativa de intervenção didática, apresentando algumas dicas para resolução dos exercícios com o objetivo de evitar que alguns equívocos sejam cometidos. Neste trabalho, devido a exiguidade de espaço, nos limitaremos até a motagem de nossa taxionomia e de seu uso na análise de alguns erros.

DESENVOLVIMENTO

Inicialmente alguns questionamentos foram propostos pelo professor orientador para direcionar a pesquisa bibliográfica e os objetivos do trabalho, dentre eles:

- Por que estudar os erros dos alunos?

Os erros provém de algum conhecimento possuído pelos alunos, são derivados de processos lógicos (ou quase lógicos) que, de alguma forma, fazem sentido para eles. Por esse motivo, não devemos condenar alunos por suas inexactidões, mas sim tentar compreender os motivos que levaram um aluno a errar, e incentivar os alunos a aprender com seus próprios erros.

Podemos utilizar os desvios como auxiliares didáticos da prática pedagógica, utilizados como ferramenta de ensino. Assim os professores saberão onde há uma maior dificuldade de aprendizagem por parte dos alunos, e poderão preparar suas aulas com base nisso.

- Quais os benefícios de estudar os erros dos alunos?

Os erros podem fornecer informações sobre onde está a falha na aprendizagem dos alunos, e assim, os professores poderão dispor de uma fonte de referências que pode guiá-los a como agir para auxiliar os alunos e tornar a aprendizagem mais significativa.

- Como advertir professores para que entendam a importância de se estudar os erros?

Para professores em formação, seria interessante se os cursos de graduação disponibilizassem uma disciplina para estudar os erros dos alunos, suas causas, como evitar que certos erros ocorram, assim como ensinar os futuros docentes a utilizar os deslizes de seus discentes como ferramenta de ensino. Dessa forma, os professores teriam uma maior sensibilidade ao lidar com esses erros, e não os assimilariam apenas como base de qualquer crítica negativa.

Para tutores já atuantes, principalmente os que possuem mais anos de carreira, provavelmente teríamos mais dificuldade, pois muitos professores já estão acostumados a simplesmente desconsiderar as respostas erradas, sem refletir sobre elas, ou tentar compreender porque elas foram cometidas.

Continuidade do trabalho

Após responder os questionamentos propostos pelo professor orientador, realizamos um estudo bibliográfico sobre o tema, tomando conhecimento do que educadores e estudiosos da área têm a dizer sobre o tema. Colocamos algumas notas importantes sobre esses estudos para nos guiar. Essas ideias serão citadas a seguir.

O texto base para o trabalho foi o livro da Helena Noronha Cury, intitulado *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos* [2]. Usamos principalmente esse texto para elaborar as etapas do trabalho, e como apresentar a análise de erros, uma vez que a autora cita muitos exemplos no seu livro. Cury critica o fato de muitos autores realizarem sua própria taxonomia de erros sem apresentar ideias de intervenção. Por esse motivo, em nosso trabalho, apresentamos uma tentativa de intervenção, realizada na fase final, em forma de lista de exercícios, com dicas que podem ser usadas pelos docentes durante a aplicação de atividades.

Hadamard [5] cita que os desvios podem ser cometidos também pelos docentes quando menciona que “Eu faço muito mais (erros) do que meus estudantes, só que eu sempre os corrijo, de forma que nenhum traço deles permaneça no resultado”. É comum acreditarmos que os professores não cometem erros, pois não os vemos errando na frente do quadro mas, como

citado acima, eles ocorrem e é papel do próprio docente corrigi-los para que o resultado final seja eficaz.

Radatz [7] afirma que os erros são produtos de experiências passadas nas aulas de Matemática. Tais desvios ilustram dificuldades individuais, mostram onde houve falha de compreensão de conceitos. Investigar os deslizes dos alunos pode revelar os defeitos no processo da resolução de problemas e fornecer as informações para compreendermos onde estão as dificuldades cognitivas dos alunos em relação àquela aprendizagem. A análise de erros pode ser considerada como sendo uma estratégia promissora para responder algumas dúvidas fundamentais do ensino da Matemática.

Borasi [1] afirma que os desvios podem fornecer razões valiosas sobre as causas das falhas e sugerir alternativas para a correção dos erros, e que os alunos deveriam ter a oportunidade de explicar seu raciocínio e corrigir os enganos cometidos.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a realização da nossa própria taxonomia dos erros, nos baseamos na nossa pesquisa bibliográfica e em experiências próprias. Durante nossa classificação, identificamos sete tipos de erro, sobre os quais iremos listar e exemplificar a seguir.

Estamos levando em consideração que as questões que os alunos resolvem estão sempre bem escritas e sem ambiguidade, de forma que elas não induzam o aluno a cometer qualquer tipo de erro influenciado pela estrutura gramatical do problema.

Nossa classificação de erros consiste dos seguintes problemas:

- Deficiência de conhecimentos básicos;
- Falsas generalizações;
- Mal uso de dados;
- Uso incorreto de algoritmos;
- Confusão de notação;
- Falta de atenção ou descuido;
- Erro por emoção.

Deficiência de conhecimentos básicos;

Na matemática, os conteúdos são acumulativos e, caso o aluno não tenha aprendido um assunto anterior ao apresentado, ele demonstrará dificuldade em internalizar o próximo material. Uma das razões para isso é o fato de que o conhecimento não se obtém de forma constante e linear.

Além disso, devemos considerar que muitos alunos se sentem envergonhados por não terem aprendido determinado assunto e acabam se sentindo inibidos a fazer perguntas durante a aula, o que pode levar o professor a não ter consciência de que o material não está sendo assimilado pelos discentes.

O tipo de erro causado pela deficiência de conhecimentos básicos abrange a incapacidade na aprendizagem de conceitos básicos, como o conceito de soma, de funções e de procedimentos básicos para resolução de problemas, como o uso de certos algoritmos, sequências lógicas para a resolução de problemas, etc.

Podemos considerar a deficiência de conhecimentos básicos como o causador de outros equívocos, pois ele os precede diretamente, uma vez que, sem os conhecimentos matemáticos primários, o aluno muito provavelmente cometerá os outros tipos de erros.

Segundo nossa visão, esse desvio é o mais frequente, e o mais difícil de remediar, tendo em vista que ele dependerá muito da motivação do aluno para que ele seja corrigido. Em alguns casos, pode ser necessário que o aprendente reveja alguns conteúdos dos anos iniciais da escola, ou de alguma disciplina que cursou, para que todas as dúvidas sejam sanadas.

Entretanto, é necessário levar em conta que, caso o aluno cometa esse erro, não significa que ele não possui nenhum conhecimento básico. Muitas vezes o aluno pode apresentar competência em tais técnicas, mas não sabe como aplicá-las na resolução dos problemas, ou não consegue conectá-los a novos conhecimentos e, por esse motivo, acaba errando.

Esse tipo de erro é citado por Menchinskaya (apud RADATZ, 1980) e por Cury [2].

Exemplo:

Uma questão propõe que o aluno encontre todas as soluções da equação

$$\text{sen}(2x) = 1/2 .$$

A questão requer que o aluno entenda como resolver equações e envolve o fato de o seno ser periódico. A ligação entre os conteúdos é mostrada no esquema a seguir (Figura 1). Esses temas são necessários para a resolução de quaisquer equações trigonométricas.

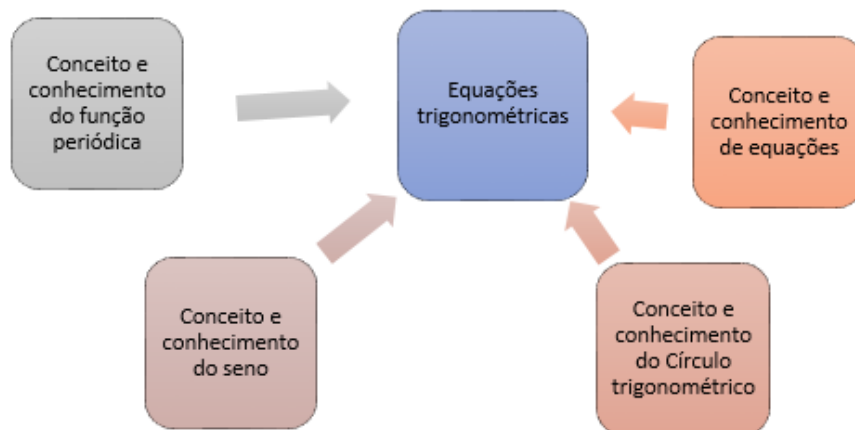


Figura 1

Caso o aluno não possua os conhecimentos necessários para resolver a equação trigonométrica $\text{sen}(2x) = 1/2$, alguns erros poderão ocorrer, como, por exemplo:

- Ele pode não saber em que arco o seno vale $1/2$. Neste caso, o discente não terá como prosseguir na questão e, provavelmente, já começaria errando a questão.
- O aluno pode entender que a resposta é $\pi/6$, sem resolver a equação $\pi/6 = 2x$, para encontrar os valores de x que são solução para a equação;
- O aluno ainda pode encontrar a resposta correta para a equação, mas obter apenas uma resposta para a solução, desconsiderando a periodicidade da função seno.

Falsas generalizações

A falsa generalização ocorre se tentar aplicar um algoritmo, fórmula ou uma forma de resolução incorretamente para a resolução de algum problema, pelo fato do problema ser “parecido” com algum caso em que o algoritmo é válido. É um erro muito comum, e pode ocorrer por falta de atenção. Além disso, este desvio pode ocorrer por falta de conhecimentos básicos; o aluno pode não saber o que está sendo proposto na questão e aplicar algum procedimento que lhe seja familiar, na esperança de que também dê certo nesse caso. Em alguns casos, o aluno pode simplesmente ter esquecido como solucionar o problema proposto e, então, acaba generalizando em uma tentativa de que seu método de resolução funcione.

Devemos sempre levar em consideração que esse tipo de desvio não implica dizer que o aluno não possua qualquer tipo de conhecimento acerca do que está fazendo, uma vez que ele está utilizando algum algoritmo ou alguma forma de resolução já conhecida por ele. Acreditamos que seja um sinal de que o aluno possui um bom aparato de conhecimentos

necessários para resolver o problema, e talvez só esteja com dificuldade de criar pontes entre os assuntos, para solucionar o problema.

Este tipo de erro é citado por Menchinskaya (apud RADATZ, 1980 e por Radatz [7]).

Exemplo:

1. O caso em que o aluno realiza a soma de frações desta forma $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, pois é válido para a multiplicação $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.
2. Um outro exemplo é no caso de integrais, $\int f(x) dx \pm \int g(x) dx = \int f(x) \pm g(x) dx$. Mas $\int f(x) dx \cdot \int g(x) dx \neq \int f(x) \cdot g(x) dx$.

Uso Incorreto de Algoritmos

Podemos enxergar o uso incorreto de algoritmos como sendo um caso mais abrangente da falsa generalização. Este tipo de erro é literalmente o erro na aplicação de algum algoritmo, regra, ou sequência lógica de resolução. Seja o algoritmo da adição, da divisão, “regra de 3”, esboço de gráfico (aplicação de derivadas) ou cálculo de integrais, entre vários outros algoritmos. Este desvio pode ser notado quando o aluno monta a solução, pois ele pode estar a montando de forma errada. O discente pode, também, estar utilizando as fórmulas de forma errônea, ou seguindo alguma lógica inválida no meio de algum algoritmo.

Tal deslize pode ser causado por fatores emocionais, falta de atenção, ou por não saber como aplicar seus dados no algoritmo, ou ainda pelo aluno não ter conhecimento de como solucionar a questão.

Autores que citam este tipo de erro: Hendrik Radatz [7], Menchinskaya (apud RADATZ, 1980) e Raffaella Borasi [1]

Exemplos:

1. Podemos nos apropriar dos exemplos citados em falsa generalização, uma vez que é um caso particular do uso incorreto de algoritmo.
2. $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Podemos notar a intenção do aluno em tentar aplicar o processo de racionalização, porém, efetuado de forma incorreta.

Mal Uso de Dados

Esse erro pode decorrer do fato do aluno não possuir capacidade de leitura e conseqüente interpretação de textos. Nesse caso, ele não saberá o que os dados significam, ou não compreenderão o modelo matemático possivelmente apresentado na questão. É comum o aluno saber responder questões que envolvam equações, quando as equações são dadas de forma explícita mas, ao problematizar as questões, o aluno não consegue aplicar os dados fornecidos em tal modelo matemático. Há ainda casos em que o aluno simplesmente não compreende o que os dados fornecidos significam, demonstrando assim uma deficiência em sua base matemática.

Autores que citam este tipo de erro: Hendrik Radatz [7] e Nitsa Monshovits-Hadar [6]

Exemplos:

1. Uma questão propõe que se encontre o perímetro de uma circunferência, dando o valor do diâmetro dela. Neste caso, o aluno pode não saber a fórmula para encontrar o perímetro circunferência. Caso o aluno saiba esta fórmula ($c = 2\pi r$), ele pode confundir o diâmetro com o raio na resolução da questão, e ainda pode não saber que o diâmetro é o dobro do raio.
2. Muitos alunos conseguem resolver a seguinte equação de 1º grau sem dificuldade: $3x + 140 = 260$. Mas, ao problematizar a questão, como seguirá no exemplo, os alunos não sabem como aplicar os dados no modelo matemático. Exemplo: *Uma casa com $260m^2$ de área construída possui 3 quartos de mesmo tamanho. Qual é a área de cada quarto, se as outras dependências da casa ocupam $140m^2$?*

Confusão de notação

Esse tipo decorre do fato do aluno não possuir conhecimento sobre notações, resultando na aplicação de uma notação errada na resolução da questão. O discente precisa estar sempre atento para não utilizar a notação errada durante a resolução de questões. Esse erro pode ocorrer tanto por falta de atenção como por falta de conhecimentos básicos necessários para a resolução da questão. Pode ocorrer também pelo fato de que, algumas vezes, uma mesma notação pode ser empregada para representar objetos distintos. Tal erro, também, pode ser gerado por abuso de notação, quando há excesso de símbolos, ou de índices, e isto acaba gerando confusão durante a resolução da questão.

Autores que citam este tipo de erro: Hendrik Radatz [7] e Raffaella Borasi [1]

Exemplo:

1. Uma questão de Cálculo I onde deve-se encontrar a derivada da função

$f(x) = \text{sen}^{-1}(x)$. O aluno pode entender que a questão está pedindo para encontrar a derivada da função $f(x) = \text{cosse } c(x)$, quando na verdade está querendo a derivada da função $f(x) = \text{arcsen}(x)$.

2. É muito comum os aprendentes iniciantes confundirem os símbolos “=” e “ \Rightarrow ” no desenvolvimento de questões;

Erro por falta de atenção ou descuido

Esse tipo de erro é muito comum de ocorrer durante a resolução de exercícios ou problemas e é causado ao se confundir, ou trocar, por descuido, um sinal, um número, um símbolo ou uma letra durante o processo de resolução, o que afetará o resultado. O aluno pode ainda acabar assumindo, despropositadamente, ou esquecendo alguma hipótese, e então cometer um engano. Muitas vezes o discente consegue compreender o procedimento e todo o conteúdo necessário para a resolução da questão, mas acaba realizando deslizos durante as contas ou durante a resolução da questão. Esse erro pode ocorrer por simples descuido, nervosismo ou pressa, pelo fato do aluno se preocupar mais com chegar no resultado, do que no desenvolvimento da questão.

Muitos desvios podem ocorrer por esse motivo, por isso ele se torna um tipo de erro difícil de identificar suas causas.

Autores que citam este tipo de erro: Radatz [7] e Nitsa Moshovitz-Hadar [6]

Exemplos:

O enunciado da questão propõe que o aluno encontre as raízes da equação $x^2 + x - 3 = 0$ e, ao transcrever a questão para resolvê-la, o aluno escreve $x^2 + x + 3 = 0$.

Erro por emoção

O erro por emoção talvez seja o mais difícil de identificar, pois requer que o professor acompanhe os alunos de perto, pessoalmente. Esse tipo de erro é muito particular, pode ocorrer por nervosismo, ou por questões pessoais dos alunos, que fazem com que eles não consigam completar as várias etapas de um raciocínio ou por não estarem completamente focados no

problema. O aluno pode estar sobre pressão pessoal, ou familiar, para atingir um êxito acadêmico desejado, seja tirar uma nota suficiente ou ser aprovado na disciplina, e isso poderá afetar negativamente seu desempenho.

Há ainda casos em que o aluno estuda para uma prova e, no momento de realizá-la, esquece o assunto que estudou por conta do nervosismo ou a pressão gerada pela necessidade de alcançar a avaliação necessária. O aluno cometer este erro não significa que ele não sabe o conteúdo da questão, muitas vezes o discente apresenta domínio do conteúdo, mas não se encontra numa situação psicologicamente favorável para a resolução da questão. Assim como o erro por falta de atenção e descuido, qualquer erro cometido pelos alunos pode decorrer deste tipo de erro.

Autores que citam este tipo de erro: Radatz [7]

Análise de erros reais:

A seguir usaremos a taxonomia acima para analisar alguns erros reais. Não teremos como julgar os erros por emoção, pois qualquer um dos erros apresentados pode ter ocorrido por esse motivo.

Como mencionado anteriormente, esses erros foram fornecidos pelo professor da UAMat Amauri Cruz.

Exemplos de Análise de Erro

a) $x^2(x^2 - 1)^{1/2} = (x^4 - x^2)^{1/2}$

O aluno pode cometer esse desvio por não compreender que

$$(x^2 - 1)^{1/2} = \sqrt{x^2 - 1}$$

e ter simplesmente aplicado a propriedade distributiva, sem saber que a propriedade distributiva não funcionaria neste caso. Podemos notar que o aluno generalizou, erroneamente, a propriedade distributiva, como se o caso fosse $x^2(x^2 - 1)$.

Este erro, também, poderia ocorrer por falta de atenção, durante o procedimento o aluno não se atentou para o fato de se tratar de uma potência.

Poderíamos, então, classificar este erro como deficiência na base, falsa generalização e erro por falta de atenção.

$$b) e^{-rt} + e^{-r0} = -\frac{e}{rt} + \frac{e}{r0}$$

Esse exemplo mostra que o aluno não possui uma boa base sobre exponencial e suas propriedades, pois podemos notar que aplicou erroneamente as propriedades nas duas parcelas da soma anterior. O aluno tentou aplicar a regra

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x},$$

porém a aplicou de forma incorreta.

Embora os dois expoentes estejam negativos, houve também uma mudança de sinal em uma das frações. Dessa forma, fica difícil apontar qual a lógica utilizada para solucionar a questão. Podemos notar que o aluno entendeu que seria necessário colocar algum termo no denominador, mas não sabia qual, o que mostra que o aluno possuía algum conhecimento, mesmo que insuficiente, sobre o que ele deveria fazer. Esse erro pode ser classificado como deficiência nos conhecimentos básicos e falsa generalização.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Podemos dizer, com base no que pesquisamos, que o estudo dos erros dos alunos em disciplinas de Matemática é de suma importância, e que os professores deveriam tomar consciência da necessidade desse estudo. A aprendizagem da Matemática é acumulativa e, por esse motivo, não aprender determinado conteúdo pode gerar um problema generalizado, pois não há como aprender um conteúdo que será apresentado sem possuir conhecimento do anterior. Com a análise dos erros, podemos detectar as falhas na formação dos alunos e, eventualmente, da metodologia de ensino, e usá-los para o melhor entendimento e aprimoração do processo de ensino-aprendizagem dos discentes.

REFERÊNCIAS

- [1] – BORASI, R. **Exploring Mathematics through the Analysis of Errors, For the Learning of Mathematics**, v. 7, p. 2 – 8, 1987.
- [2] – CURY, H. N. **Análise de erros: O Que Podemos aprender com as respostas dos alunos**. 2ª ed, 2ª reimp., Belo Horizonte, Autêntica, 2017.

[3] – CURY, H. N.. **Pesquisas em ensino de ciências e matemática, relacionadas com erros: uma investigação sobre seus objetivos.** Educação Matemática Pesquisa (Online), v. 14, p. 237-256, 2012.

[4] – CURY, H. N.. **Uma proposta para inserir a análise de erros em cursos de formação de professores de matemática.** Educação Matemática Pesquisa (Online), v. 15, p. 547-562, 2013.

[5] – HADAMARD, J. Na essay on the psychology of invention in the mathematical field. Princeton University Press, Princeton, 1945.

[6] – MOVSHOVISTZ-HADAR, N; ZASLAVSKY, O.; INBAR, S., **An Empirical Classification Model For Errors in High School Mathematics.** Journal for Research in Mathematics Education

[7] – RADATZ, H. **Students Errors in the Mathematical Learning Process: a Survey. For the Learning of Mathematics**, v. 1, p. 16 – 20, 1980