# DESEMPENHO E CONCORDÂNCIA ENTRE ALGUNS TESTES DE NORMALIDADE SOB A PRESENÇA E AUSÊNCIA DE OUTLIERS

Jerfson Bruno do Nascimento Honório [1]
Amanda dos Santos Gomes[2]

## RESUMO

Temos como objetivo mostrar o desempenho dos mais populares testes de normalidade para dados com e sem a presença de *outliers* e verificar o nível de concordância dos testes nestes tipos de situações. De maneira geral, verificou-se que o teste de Jarque-Bera é o mais poderoso nas amostras com a presença de *outliers*. O teste teve o melhor desempenho para pequenas e grandes amostras. Nas amostras sem a presença de *outliers*, o teste de Shapiro-Wilk foi o mais poderoso seguido do Shapiro-Francia. Aplicou-se o teste Kappa-Fleiss para avaliar a concordância na tomada de decisão. Para amostras com *outliers* os testes apresentaram baixa concordância e para amostras sem *outliers* os testes apresentaram forte concordância.

**Palavras-chave**: Testes de Normalidade, *Outliers*, Desempenho, Concordância.

## INTRODUÇÃO

No dia a dia das pessoas que trabalham com dados amostrais ou experimentais é bastante comum a suposição de normalidade dos dados, isso porque é uma condição exigida para a realização de muitas inferências válidas a respeito de parâmetros populacionais.

A distribuição normal é um modelo probabilístico contínuo, sendo um dos mais importantes, pois a maioria dos métodos estatísticos são baseados nesse modelo e muitos fenômenos aleatórios podem ser descritos de forma aproximada por ele.

Na inferência há vários pressupostos a serem observados, os pressupostos estatísticos mais considerados são normalidade, linearidade e homoscedasticidade. Este trabalho focará apenas no pressuposto de normalidade visto que exige-se por inúmeros procedimentos estatísticos, tais como: construção de intervalos de confiança, testes de hipóteses, análise de variância e modelagem estatística. Assim, torna-se importante verificar esse pressuposto antes de se prosseguir com os procedimentos estatísticos que o exijam.

Todas as simulações foram realizadas no programa *R*.

[1] Graduando do Curso de Estatística da Universidade Federal de Campina Grande-UFCG, Bolsista do PET-Matemática e Estatística, jerfson35@gmail.com;
[2] Professora Orientadora: Doutora, Universidade Federal de Campina Grande-UFCG, amanda.natalia.gomes@gmail.com

O *software* R disponibiliza diversas maneiras de verificar a normalidade dos dados, sendo eles, métodos gráficos, métodos numéricos e os testes de normalidade. O mais famoso método gráfico é o `QQ-plot`, no qual o mesmo imprime os pontos sobre uma reta afim de avaliar sua normalidade, sendo porém uma técnica subjetiva. Assim, para se obter uma conclusão formal é importante efetuar um teste estatístico.

A motivação para este trabalho surgiu a partir do interesse de avaliar o desempenho dos testes de normalidade de Shapiro-Wilk, Anderson-Darling, Lilliefors, Jarque-Bera, Shapiro-Francia e Cramer-von Mises para dois tipos situações: A primeira para dados sem a presença de *outliers* e a segunda com a presença de *outliers*. O desempenho será realizado a partir das análises da taxas de erro tipo I e poder empírico.

## METODOLOGIA

Neste trabalho foram consideradas algumas estratégias para avaliar as taxas do erro do tipo I, poder e concordância entre esses testes. Foi utilizada a simulação de Monte Carlo, e em cada simulação foram aplicados os testes de normalidade em um nível de significância pré-estabelecido de 5%, sendo verificado se a hipótese nula, de que os dados seguem uma distribuição normal, foi ou não rejeitada.

Caso tenha sido rejeitada a hipótese nula e a amostra tenha sido gerada da distribuição normal, foi cometido um erro do tipo I. Da mesma forma se a hipótese nula for rejeitada e a amostra foi obtida de uma população não-normal, uma decisão correta foi tomada.

Em cada caso, foi repetido 10.000 vezes e a proporção de decisões incorretas no primeiro caso é a taxa de erro tipo I e no segundo caso, a proporção de decisões corretas é o poder empírico do teste.

## DESENVOLVIMENTO

### Simulação Monte Carlo

Foram realizados dois experimentos, o primeiro com 10.000 replicas de Monte Carlo sob as hipóteses $H_0$ e $H_1$, de diversas distribuições de probabilidade, em que foi produzido de cada distribuição, amostras de tamanho $n$, nos quais esses valores foram: 10, 20, 30, 50, 100, 200, 300, 500 e 1.000. E no segundo experimento foi adotada a mesma ideia do primeiro, porém, todas as distribuições geradas continham *outliers*.

Os testes foram implementados no *software R* e foram avaliados os desempenhos dos mesmos.

Os testes de Anderson-Darling (STEPHENS, 1986), Lilliefors (STEPHENS, 1974), Shapiro-Francia (ROYSTON, 1993) e Cramer-von Mises (STEPHENS, 1986) foram aplicados utilizando as funções, `ad.test()`, `lilli.test()`, `sf.test()` e `cvm.test()`, respectivamente. Todas essas funções são encontradas no pacote `nortest`. O teste de Shapiro-Wilk (ROYSTON,

1982, p. 115-124) foi aplicado utilizando-se a função `shapiro.test()` do pacote `stats`, e o teste Jarque-Bera (JARQUE e BERA, 1987) com função `jb.norm.test()` do pacote `normtest`.

**Erro tipo I**

Foram simuladas 10.000 amostras aleatórias normais de tamanhos $n$ com a função `rnorm`, com média 0 e desvio padrão 1.

Se, ao aplicar os testes, a hipótese nula de normalidade é rejeitada a um nível de significância de 5%, então a distribuição dos dados é considerada erroneamente como não-normal. A proporção de rejeições incorretas foi calculada para cada teste e representam as taxas de erro tipo I.

**Poder**

Foram simuladas amostras aleatórias de distribuições não-normal para avaliar o poder dos testes, que é rejeitar a hipótese nula que por construção é falsa.

Em dois experimentos, 10.000 amostras de tamanho $n$ de algumas distribuições não-normais, simétricas e assimétricas, foram simuladas. No primeiro sem a presença de *outliers*, e no segundo com a presença de *outliers*.

As distribuições simétricas foram a Uniforme$(0,1)$, Beta$(2,2)$ e t-student$(10)$. Já as distribuições assimétricas foram Gamma$(2,1)$, $\chi^2(15)$, Lognormal$(0,1)$, Exponencial$(1)$ e Weibull$(2,1)$.

As distribuições foram simuladas por meio das funções `random` do *software R*.

Os testes de normalidade foram aplicados em cada uma das 10.000 amostras de cada distribuição simulada e a proporção de rejeições corretas da hipótese nula foi computada. Os valores obtidos representam o poder dos testes que foram comparados entre si.

**Concordância**

Os dados foram computados para cada uma das distribuições com $n$ tamanhos diferentes. Foi feito um teste Kappa-Fleiss (CONGER, 1980) com função `Kappam.fleiss` do pacote `irr`, para verificar o nível concordância entre os testes na tomada de decisão entre rejeitar ou não a hipótese nula de normalidade. A concordância foi aplicado apenas nas amostras não provenientes da distribuição normal. Com isso, verificaremos se o poder dos testes interfere diretamente na concordância.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção serão apresentados os resultados das simulações para obtenção do erro do tipo I, poder e concordância dos testes de normalidade.

**Sem a Presença de *Outliers***

Foram avaliados seis testes de normalidade, Anderson-Darling, Lilliefors, Shapiro-Francia, Cramer-von Mises, Shapiro-Wilk e Jarque-Bera. A Tabela 1 apresenta as taxas de

erro tipo I para diferentes tamanhos amostrais.

Tabela 1: Erro do tipo I das amostras sem *outliers* dos testes Anderson-Darling (AD), Lilliefors (LL), Shapiro-Francia (SF), Cramer-von Mises (CVM), Shapiro-Wilk (SW) e Jarque-Bera (JB)

| | **Testes** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Tamanho** | **SW** | **AD** | **CVM** | **LL** | **SF** | **JB** |
| **10** | 0,0466 | 0,0442 | 0,0424 | 0,0478 | 0,0506 | 0,0484 |
| **15** | 0,0482 | 0,0502 | 0,0496 | 0,0472 | 0,0528 | 0,0548 |
| **20** | 0,0496 | 0,0500 | 0,0500 | 0,0506 | 0,0496 | 0,0476 |
| **30** | 0,0544 | 0,0520 | 0,0514 | 0,0470 | 0,0514 | 0,0514 |
| **50** | 0,0460 | 0,0512 | 0,0542 | 0,0546 | 0,0482 | 0,0456 |
| **100** | 0,0512 | 0,0506 | 0,0498 | 0,0530 | 0,0520 | 0,0532 |
| **200** | 0,0528 | 0,0524 | 0,0530 | 0,0484 | 0,0524 | 0,0480 |
| **300** | 0,0478 | 0,0480 | 0,0434 | 0,0454 | 0,0488 | 0,0484 |
| **500** | 0,0514 | 0,0450 | 0,0482 | 0,0472 | 0,0504 | 0,0474 |
| **1000** | 0,0496 | 0,0468 | 0,0460 | 0,0470 | 0,0520 | 0,0500 |

Fonte: Autor

Tabela 2: Variância para todos tamanhos amostrais

| **Testes** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **SW** | **AD** | **CVM** | **LL** | **SF** | **JB** |
| $6,400 \times 10^{-7}$ | $1,024 \times 10^{-5}$ | $1,600 \times 10^{-5}$ | $1,547 \times 10^{-5}$ | $7,471 \times 10^{-6}$ | $3,004 \times 10^{-6}$ |

Fonte: Autor

Tabela 3: Variância para pequenas amostras $n \leq 30$

| **Testes** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **SW** | **AD** | **CVM** | **LL** | **SF** | **JB** |
| $4,800 \times 10^{-7}$ | $4,320 \times 10^{-6}$ | $1,452 \times 10^{-5}$ | $1,825 \times 10^{-5}$ | $6,453 \times 10^{-6}$ | $1,613 \times 10^{-6}$ |

Fonte: Autor

Tabela 4: Variância para grandes amostras $n \geq 50$

| **Testes** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **SW** | **AD** | **CVM** | **LL** | **SF** | **JB** |
| $2,048 \times 10^{-6}$ | $3,200 \times 10^{-6}$ | $3,200 \times 10^{-6}$ | $1,095 \times 10^{-5}$ | $5,408 \times 10^{-6}$ | $7,200 \times 10^{-6}$ |

Fonte: Autor

Por meio da Figura 1 e da Tabela 1 verificou-se que a taxa de erro do tipo I, para todos os testes, oscilou consideravelmente em torno do valor nominal de 5%, para amostras pequenas, $n \leq 30$.

Nota-se pela Figura 1 que a medida que o tamanho da amostra aumenta, os testes de Shapiro-Francia e Shapiro-Wilk vão se aproximando mais rápido da taxa nominal de $0,05$ tornando-os assim testes mais precisos. O teste Jarque-Bera tende a rejeitar menos à hipótese nula de normalidade, pois a maioria das suas oscilações estão abaixo do nível nominal de $0,05$. O teste de Shapiro-Francia pouco oscila sobre o valor nominal, o tornando um dos testes mais precisos para calcular o erro do tipo I. Os testes de Anderson-Darling, Lilliefors e Cramer-von Mises, são os menos precisos, ficando distantes do valor nominal. Já o teste de Shapiro-Wilk, é mais poderoso entre eles tendo baixas oscilações em torno do valor nominal.

Pela Tabela 2 podemos observar a variância dos testes em relação ao valor nominal para todas as amostras. Nas Tabelas 3 e 4 podemos observar para pequenas e grandes amostras, respectivamente.

Percebe-se que o teste de Shapiro-Wilk seguido do Shapiro-Francia foram os mais precisos de uma forma geral. Porém, para pequenas amostras o teste de Shapiro-Francia perde a segunda colocação para o teste Jarque-Bera, já que mesmo teve menor variância.

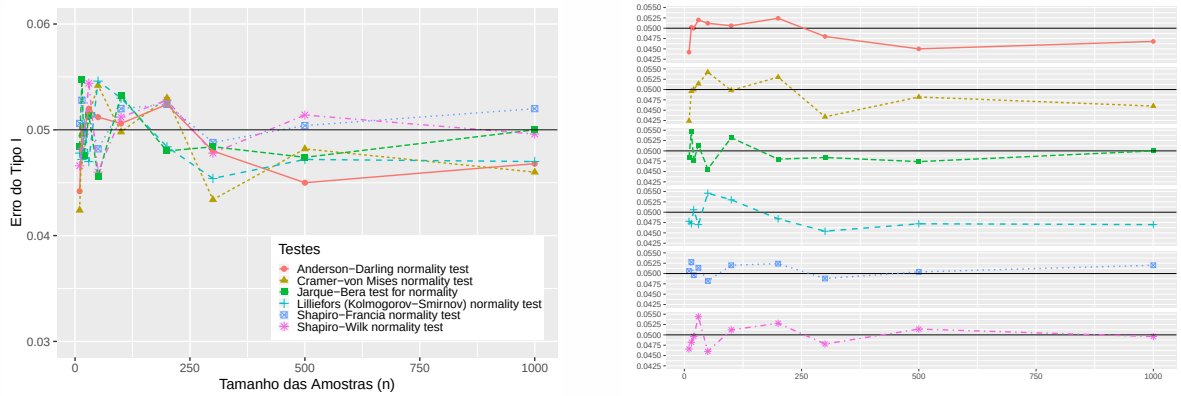



Figura 1: Erro tipo I: Distribuição normal (0,1) sem a presença de *outliers*

Fonte: Autor

Na Figura 2 encontramos o poder de cada teste para as distribuições simétricas e assimétricas, com diferentes tamanhos amostrais.

Para amostras provenientes da distribuição uniforme e beta, percebe-se que o teste de Shapiro-Willk tem um comportamento melhor quando se trata de amostras pequenas, seguido do teste de Anderson-Darling. Em relação aos demais testes, o teste Jarque-Bera apresentou o menor poder nas distribuições uniforme e beta para amostras pequenas, para amostras maiores que 150 o teste de Lilliefors apresentou menor poder.

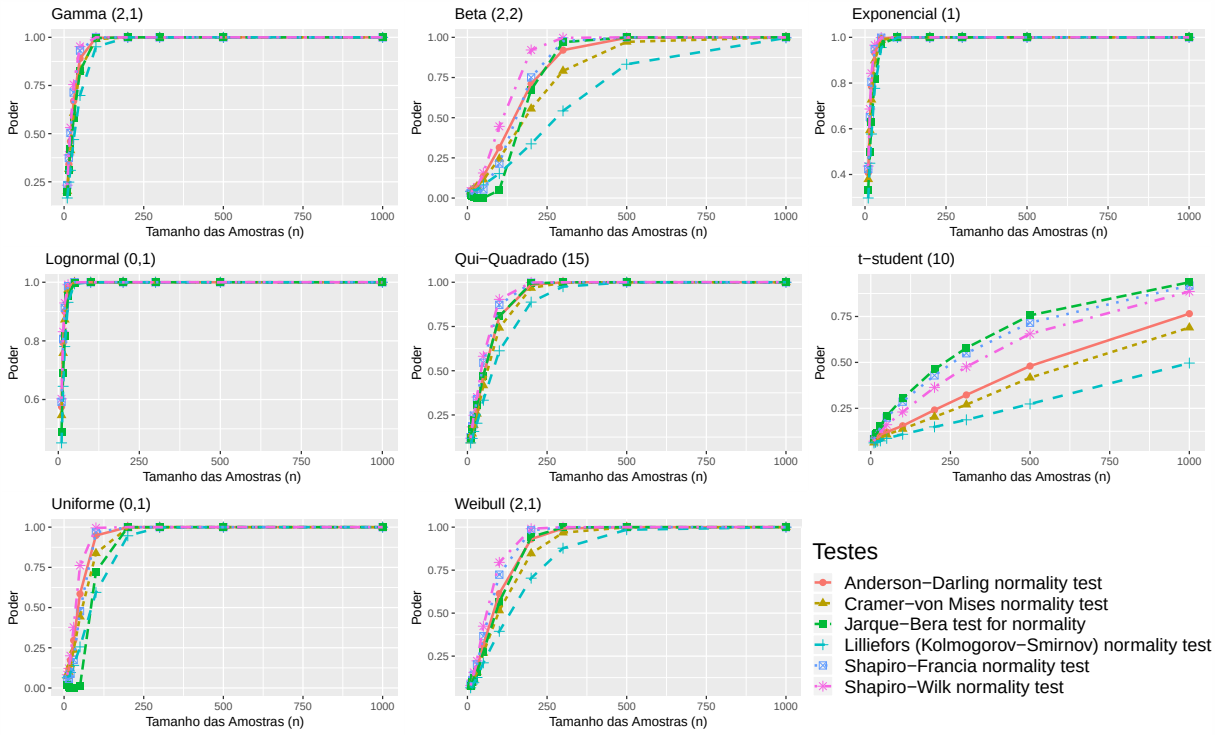
Para a distribuição t-student os testes diferem bastante quanto ao poder, mesmo para o maior tamanho amostral. A dificuldade dos testes em identificar corretamente a falta de norma-

lidade quando os dados seguem a distribuição t-student se deve ao fato das duas distribuições possuírem densidades muito parecidas. Levando em consideração todos os tamanhos amostrais, o teste que melhor identificou os dados provenientes da distribuição t-student foi o Jarque-Bera, seguido do teste Shapiro-Francia. O teste Lilliefors apresentou o menor poder na distribuição t-student.

Nas distribuições assimétricas o teste mais poderoso foi o de Shapiro-Wilk, seguido do Shapiro-Francia. Nas distribuições weibull e $\chi^2$, os mesmos se destacaram para amostras menores que 250, ou seja, para pequenas amostras o poder dos testes de Shapiro-Wilk e Shapiro-Francia se destacaram em relação aos outros. Todos os testes tiveram poder máximo com amostras maiores que 500, exceto pelo teste de Lilliefors, que novamente ficou com menor poder em comparação com os outros testes.

Em oposição a isso, tem-se os testes apresentaram ótimos resultados de poder para as distribuições, lognormal, exponencial e gamma. Mesmo assim, os testes de Shapiro-Wilk e Shapiro-Francia foram superiores em todos os casos.

Figura 2: Poder dos testes para as distribuições em estudo sem a presença de *outliers*




Fonte: Autor

**Teste kappa para amostras sem *outliers***

Pela Tabela 5 temos todos os resultados do teste kappa para as diferentes distribuições mencionadas anteriormente. Percebe-se que para a maioria das distribuições, os testes tiveram forte concordância entre rejeitar ou não a hipótese de normalidade. Porém, as distribuições beta,

$\chi^2$ e t-student obtiveram menor concordância. Isso pode ser visto na Figura 2 onde os testes tem menor precisão na identificação não normalidade. Isso se deve ao fato das distribuições possuírem densidades muito parecidas.

Tabela 5

| Gamma | Beta | Exponencial | Lognormal | $\chi^2$ | t-student | Uniforme | Weibull |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,90 | 0,38 | 0,93 | 1,00 | 0,66 | 0,40 | 0,86 | 0,81 |

Fonte: Autor

**Com a Presença de *Outliers***

A seguir serão apresentados os resultados das simulações com a presença de *outliers* para obtenção do erro do tipo I, poder e concordância dos testes de normalidade. Em cada amostra foram adicionados dois *outliers*, sendo um 10% do valor mínimo e o outro 100% do valor máximo.

Tabela 6: Erro do tipo I das amostras com *outliers* dos testes Anderson-Darling (AD), Lilliefors (LL), Shapiro-Francia (SF), Cramer-von Mises (CVM), Shapiro-Wilk (SW) e Jarque-Bera (JB)

| | **Testes** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Tamanho** | **SW** | **AD** | **CVM** | **LL** | **SF** | **JB** |
| **10** | 0,16 | 0,15 | 0,15 | 0,14 | 0,20 | 0,27 |
| **15** | 0,27 | 0,23 | 0,22 | 0,19 | 0,35 | 0,45 |
| **20** | 0,38 | 0,28 | 0,26 | 0,20 | 0,47 | 0,57 |
| **30** | 0,49 | 0,32 | 0,28 | 0,22 | 0,60 | 0,71 |
| **50** | 0,64 | 0,35 | 0,29 | 0,21 | 0,76 | 0,83 |
| **100** | 0,84 | 0,34 | 0,27 | 0,20 | 0,93 | 0,94 |
| **200** | 0,96 | 0,31 | 0,23 | 0,16 | 0,99 | 0,97 |
| **300** | 0,99 | 0,25 | 0,18 | 0,13 | 1,00 | 0,98 |
| **500** | 1,00 | 0,20 | 0,15 | 0,10 | 1,00 | 0,99 |
| **1000** | 1,00 | 0,13 | 0,10 | 0,08 | 1,00 | 0,99 |

Fonte: Autor

Tabela 7: Variância para todos tamanhos amostrais

| **Testes** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **SW** | **AD** | **CVM** | **LL** | **SF** | **JB** |
| 4,313 | 0,472 | 0,295 | 0,142 | 5,138 | 5,760 |

Fonte: Autor

Tabela 8: Variância para pequenas amostras $n \leq 30$

| Testes | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **SW** | **AD** | **CVM** | **LL** | **SF** | **JB** |
| 0,4033333 | 0,2028 | 0,1680333 | 0,1008333 | 0,6721333 | 1,08 |

Fonte: Autor

Tabela 9: Variância para grandes amostras $n \geq 50$

| Testes | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **SW** | **AD** | **CVM** | **LL** | **SF** | **JB** |
| 6,20498 | 0,4805 | 0,2645 | 0,1125 | 7,03298 | 7,34472 |

Fonte: Autor

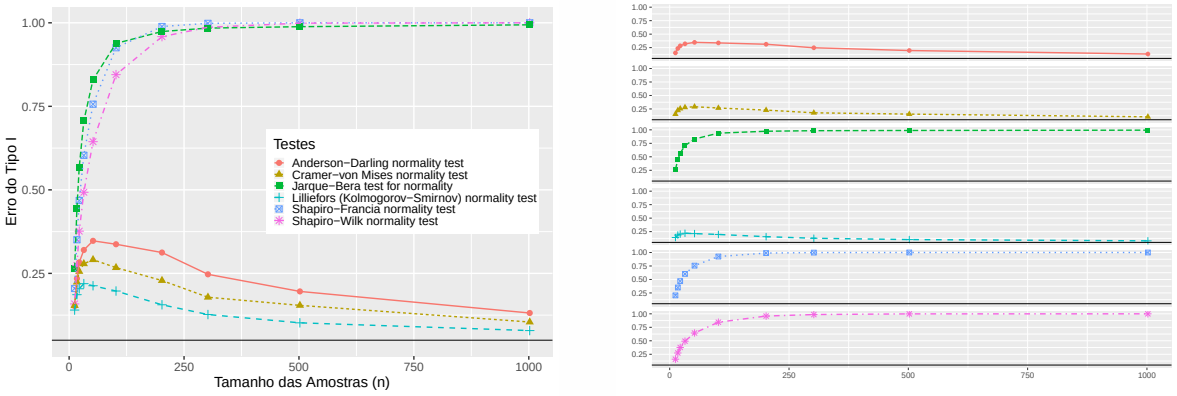
De forma geral, todos os testes apresentaram dificuldades em identificar a normalidade dos dados com a presença de *outliers*. Pela Figura 3, nota-se que os testes são sensíveis com a presença de *outliers* se distanciando bastante do valor nominal de $0,05$.

Os testes de Anderson-Darling, Lilliefors e Cramer-von Mises foram os menos sensíveis aos *outliers*, obtendo melhor desempenho se aproximando do valor nominal de acordo com a Tabela 6.

Pela Tabela 7 podemos observar a variância dos testes em relação ao valor nominal para todas as amostras. Nas Tabelas 8 e 9 podemos observar para pequenas e grandes amostras.

Percebe-se que os testes de Anderson-Darling, Cramer-von Mises e Lilliefors foram os mais precisos de uma forma geral. Para pequenas e grandes amostras o teste de Lilliefors ficou com a menor variância, seguido do teste de Cramer-von Mises. O teste Jarque-Bera foi o mais sensível de todos tendo uma alta variação.

Figura 3: Erro tipo I: Distribuição normal (0,1) com a presença de *outliers*




Fonte: Autor

O poder para as distribuições simétricas e assimétricas geradas com a presença de *outliers*, pode ser observado pela Figura 4.

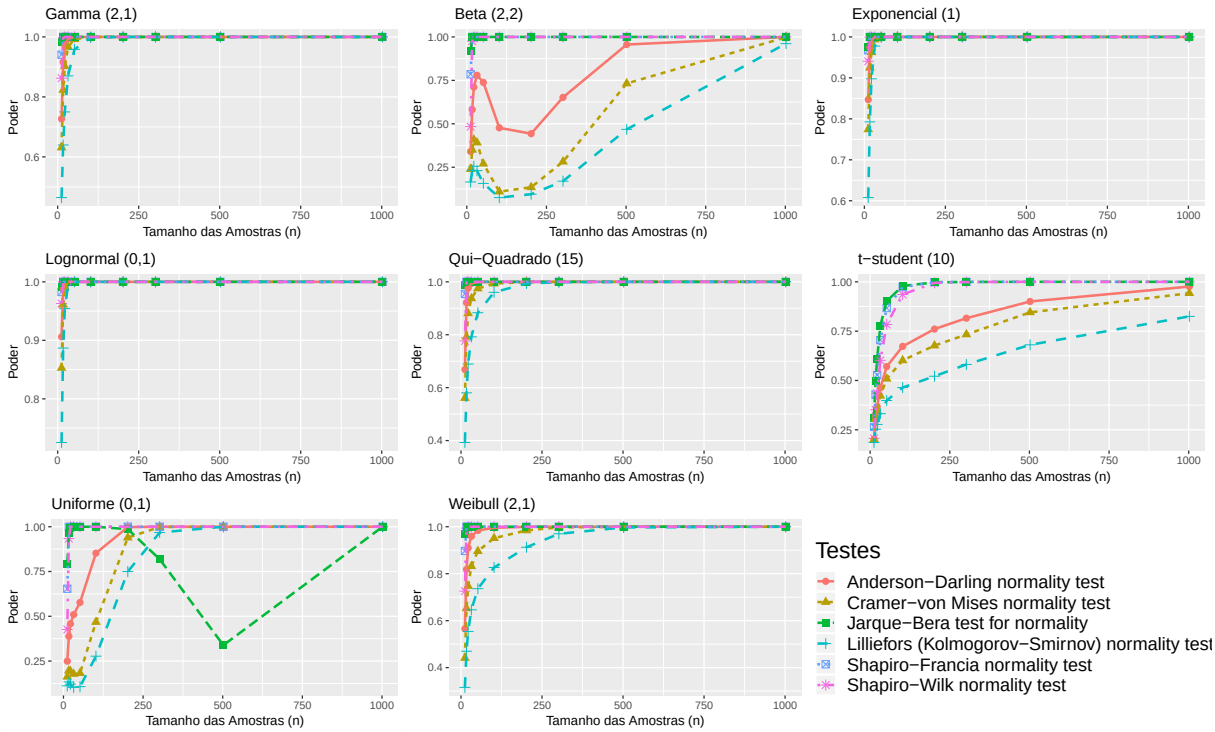
Para amostras provenientes da distribuição uniforme, percebe-se que o teste Jarque-Bera tem o melhor comportamento quando se trata de amostras pequenas, seguido do teste de Shapiro-Francia. A partir de amostras maiores que 250, o teste mais poderoso foi o de Shapiro-Francia, seguido do Shapiro-Wilk. Os mesmos se tornam melhores opções, pois não há oscilações como o teste Jarque-Bera. Em relação aos demais testes, o teste de Lilliefors apresentou menor poder.

Nas amostras provenientes da distribuição beta, o teste Jarque-Bera tem o melhor poder para amostras pequenas. O mesmo ganha poder rapidamente seguido do teste Shapiro-Francia. Os demais testes apresentaram oscilações a medida que as amostras aumentam, porém, essas oscilações tendem a ser crescentes tornando os testes mais poderosos. O teste de Lilliefors mais uma vez, foi o menos poderoso, mesmo para grandes amostras.

Para amostras com *outliers* provenientes da distribuição t-student, os testes seguem com a mesma dificuldade apresentadas na seção anterior. A dificuldade dos testes em identificarem corretamente a falta de normalidade dos dados se deve ao fato das duas distribuições possuírem densidades muito parecidas. Em consideração a todos os tamanhos amostrais, o teste com melhor desempenho na distribuição t-student com a presença de *outliers* foi o Jarque-Bera, seguido do teste Shapiro-Francia. O teste Lilliefors apresentou o menor poder na distribuição t-student.

Nas amostras provenientes das distribuições gamma, exponencial, lognormal e $\chi^2$ os testes apresentaram ótimos resultados de poder, inclusive o teste de Lilliefors. Mesmo assim, os testes de Shapiro-Wilk e Shapiro-Francia foram superiores em todos os casos.

Figura 4: Poder dos testes para as distribuições em estudo com a presença de *outliers*




Fonte: Autor

**Teste Kappa para amostras com *outliers***

Pela Tabela 10 temos todos os resultados do teste kappa para as diferentes distribuições com a presença de *outliers*. Percebe-se que quase todas as distribuições, os testes tiveram fraca concordância entre rejeitar ou não a hipótese de normalidade. Porém, as distribuições exponencial e lognormal obtiveram concordância máxima. As outras distribuições tiveram fraca concordância isso pode ser visto na Figura 4 onde os testes tem menor precisão na identificação da normalidade.

Tabela 10: Teste Kappa-fleiss

| Gamma | Beta | Exponencial | Lognormal | $\chi^2$ | t-student | Uniforme | Weibull |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,43 | 0,06 | 1 | 1 | 0,37 | 0,52 | 0,15 | 0,19 |

Fonte: Autor

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para dados de distribuição normal sem a presença de *outliers*, os testes avaliados foram bem precisos tendo pouca variação em torno do valor nominal de 5%, onde os melhores testes para a taxa de erro tipo I foram o Shapiro-Wilk seguido do Shapiro-Francia. Em relação aos

dados de distribuição normal com a presença de *outliers*, os melhores testes para a taxa de erro tipo I foram o Lilliefors seguido do Cramer-von Mises. Vale ressaltar as dificuldades de todos os testes para amostras com a presença de *outliers* os mesmos tiveram alta variação em relação ao valor nominal.

Em relação ao poder, os testes de Shapiro-Wilk seguido do Shapiro-Francia tiveram melhor desempenho para as distribuições geradas sem a presença de *outliers*, tornando-os testes mais poderosos/adequados para esse tipo de dados. Nas distribuições geradas com a presença de *outliers*, o teste Jarque-Bera foi o que obteve melhor desempenho seguido do teste de Shapiro-Wilk.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Stephens, M.A.; Scholz, F. W. K-Sample Anderson-Darling Tests. Journal of the American Statistical Association, v.82, p. 918-924, 1987.

Stephens, M.A. EDF statistics for goodness of fit and some comparisons. Journal of the American Statistical Association, v.69, p. 730-737, 1974.

Royston, P. A pocket-calculator algorithm for the Shapiro-Francia test for non-normality: an application to medicine. Statistics in Medicine, v.12, p. 181-184, 1993.

Royston, P. An extension of Shapiro and Wilk's W test for normality to large samples. Applied Statistics, v.31, p. 115-124, 1982.

Jarque, C. M.; Bera, A. K. A test for normality of observations and regression residuals. International Statistical Review, v.55, p. 163-172, 1987.

Conger, A. J. Integration and generalisation of Kappas for multiple raters. Psychological Bulletin, v.88, p.322-328, 1980.