PRÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA: RESOLUÇÃO E EXPLORAÇÃO DE UM PROBLEMA COM O CÁLCULO DIFERENCIAL

Diego Jonathan Bezerra Silva [1]
Roger Ruben Huaman Huanca [2]

RESUMO

Neste artigo, apresentamos o padrão de conteúdo "Cálculo Diferencial" associado ao problema de otimização, que oferece um vasto potencial de investigação para aqueles que tentam solucioná-lo apoiado na Metodologia de Ensino e de Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. Tradicionalmente o trabalho com o Cálculo em sala de aula não tem envolvido situações cotidianas, em grande parte das vezes é passado os conteúdos para os alunos (definições, fórmulas, teoremas, etc.), mas não é desenvolvido nos mesmos a capacidade de utilizar efetivamente a Matemática aprendida em sala de aula fora dos problemas fechados que são propostos pelo professor. Acreditamos que a metodologia de ensino e de aprendizagem de Matemática e, particularmente, do Cálculo deve acontecer numa atmosfera de investigação orientada em resolução de problemas. O problema deve ser o ponto de partida para o desenvolvimento matemático dos estudantes. Com esse problema, demos oportunidade aos estudantes para que pudessem refletir sobre uma situação-problema envolvendo Cálculo e ir em busca de sua solução. O trabalho realizado com esse problema permitiu a participação ativa dos alunos no processo de resolução de problemas e nas discussões, com colegas, ajudou-os a ter mais confiança, a dar sentido ao que estavam construindo, a estabelecer relações entre os dados e a aumentar suas habilidades em resolução de problemas.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Cálculo Diferencial, Aprendizagem com compreensão, Funções de Várias Variáveis.

INTRODUÇÃO

Segundo Onuchic (1999), no início do século XX, o ensino de Matemática foi caracterizado por um trabalho apoiado na repetição, no qual o recurso à memorização de fatos básicos era considerado importante. Anos depois, dentro de outra orientação, os alunos deviam aprender com compreensão, eles deviam entender o que faziam. Nessa época começou-se a falar em resolver problemas como um meio de aprender Matemática mas, nas décadas de 1960 e 1970, o ensino de Matemática no Brasil e em outros países do mundo foi influenciado por um movimento de renovação conhecido como Matemática Moderna. Todas

[1] Graduando do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, diegoirineu32@gmail.com;
[2] Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista – UNESP – Rio Claro/SP. Professor e Pesquisador da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, rogerkoringa@gmail.com.

essas reformas não tiveram o sucesso esperado. Estariam elas voltadas para a formação de um cidadão útil à sociedade em que vivia? Buscavam elas ensinar Matemática de modo a preparar os alunos para um mundo de trabalho que exige conhecimento matemático?

As investigações sistemáticas sobre resolução de problemas e suas implicações curriculares tiveram início na década de 1970. De acordo com Onuchic (1999), a importância dada à resolução de problemas é recente e somente nas últimas décadas é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia mais atenção. A caracterização de Educação, em termos da resolução de problemas, reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental. Hoje a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa e simultânea de vários níveis.

O presente trabalho tem o objetivo de apresentar a resolução e exploração de um problema com o Cálculo Diferencial seguindo o roteiro da metodologia de Ensino e de Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. Dessa forma, nos preocupamos em investigar saberes e conhecimentos, crenças e concepções de licenciandos sobre resolução de problemas a fim de compreendermos seus pensamentos e sentimentos sobre a construção de conceitos de Cálculo utilizando esta metodologia de ensino e de aprendizagem de Matemática. Assim, buscamos compreender também como eles podem afetar seu desenvolvimento profissional, seu comportamento e sua prática pedagógica no que se refere à predisposição para ensinar e aprender matemática.

METODOLOGIA

Entendemos que a “Metodologia de Ensino e de Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas” constitui-se em um caminho para se ensinar e aprender Matemática e não apenas para ensinar a resolver problemas, ou seja, o ensino está mais associado ao professor e a aprendizagem mais ligada ao aluno. Nela, o problema é um ponto de partida e os professores, através da resolução do problema, devem fazer conexões entre os diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.

Ao se imaginar uma sala de aula e como conduzir a Metodologia de Ensino e de Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, compilamos o roteiro de atividades de Onuchic e Allevato (2011) como dinâmica para trabalhar em sala de aula, que pretende compreensão e significado através da resolução de problemas:

> 1) Preparação do problema – Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.
> 2) Leitura individual – Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.
> 3) Leitura em conjunto – Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora em grupos.
> - Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.
> - Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.
>
> 4) Resolução do problema – A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da matemática nova que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.
> 5) Observar e incentivar – Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.
> - O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicos operatórios, já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.
>
> 6) Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.
> 7) Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.
> 8) Busca do consenso – Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.
> 9) Formalização do conteúdo – Neste momento, denominado formalização, o professor registra na lousa uma apresentação formal – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 83-85).

Isto posto, um problema envolvendo Cálculo Diferencial foi utilizado. Esse problema foi resolvido por 7 alunos do 4º período do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, campus Monteiro. Eles se dividiram em duas duplas e um grupo com três integrantes e levaram aproximadamente 1 hora para concluir a tarefa.

DESENVOLVIMENTO

As bases teóricas deste artigo relacionam-se à Prática no Ensino de Matemática e ao Cálculo, ao papel dos afetos na Matemática e à Resolução de Problemas como um dos procedimentos de ensino e de aprendizagem. Polya (1945) inicia uma discussão acerca da resolução de problemas a partir da publicação da obra “A arte de resolver problemas”. Para ele, um problema é algo que nos apresenta uma dificuldade inicial que precisamos resolver e para a qual não temos uma solução imediata. Ele destaca que para que o aluno se torne um resolvedor de problemas, o professor precisa ajudá-lo de maneira discreta e natural, para não tirar dele o sabor da descoberta. Ressalta que essa ajuda deve ser dada em forma de pistas e indicações que o levem a pensar, de forma que ao aluno caiba uma boa parte do trabalho.

A Resolução de Problemas a partir dos estudos de Polya (1945) passa a desempenhar um importante papel na elaboração do conhecimento matemático (BRASIL, 1998; ONUCHIC, 1999; ONUCHIC & ALLEVATO, 2004; VAN de WALLE, 2009). No entanto, percebemos que para alguns professores que atuam no Ensino Superior, a Resolução de Problemas é vista como um fim em si mesmo. Vários autores afirmam que a Resolução de Problemas, se for trabalhada como uma metodologia para o ensino de Matemática, pode ser um dos pontos de partida para a atividade Matemática e construção de novos conceitos matemáticos. (ONUCHIC & ALLEVATO, 2011; ONUCHIC & HUANCA, 2013; ALLEVATO & ONUCHIC, 2014). Ou seja, a Resolução de Problemas, além de ser uma possibilidade para explorar o uso de conceitos matemáticos e uma alternativa para aprender diferentes formas de resolução, pode ser usada como uma estratégia metodológica de ensino de Matemática para construir e aprender outros conhecimentos matemáticos (KILPATRICK, 2017).

Para podermos utilizar o Cálculo como ferramenta para a solução de alguns problemas interessantes de otimização, é necessário além de saber derivar conhecer algumas definições e teoremas essenciais que algumas vezes são esquecidos pelo fato de tornarmos a derivada um processo mecânico.

Desse modo, a seguir trazemos algumas definições sobre máximos e mínimos para funções de uma e de várias variáveis, além de apresentarmos a demonstração do teorema de Fermat. (NETO, 2009; STEWART, 2016a; STEWART, 2016b; THOMAS et al., 2012).

Definição: Seja c um número no domínio D de uma função f. Então f(c) é:

- *O valor máximo absoluto de f em D se f(c) ≥ f(x)* $\forall x \in D$
- *O valor mínimo absoluto de f em D se f(c) ≤ f(x)* $\forall x \in D$.

Definição: O número f(c) é um:

- *Máximo local de f se* $f(c) \geq f(x) \forall x$ *em uma vizinhança de centro c.*
- *Mínimo local de f se* $f(c) \leq f(x) \forall x$ *em uma vizinhança de centro c.*

Estas são duas definições essenciais quando se fala em problemas de otimização, pois é isto que na maioria das vezes estamos procurando, máximos e mínimos locais ou máximos e mínimos absolutos.

Para as definições anteriores terem uma real utilidade consideremos o teorema de Fermat:

Teorema: Se f *tiver um máximo ou mínimo local em c, e se* $f'(c)$ existe, então $f'(c) = 0$.

Demonstração: faremos a demonstração para o caso de *f* possuir máximo local em *c*. De acordo com a definição temos, $f(c) \geq f(x)$ em alguma vizinhança de centro *c*. Considerando um número h suficientemente próximo de 0 escrevemos $f(c) \geq f(c+h)$ ou ainda,

$$f(c+h) - f(c) \leq 0$$

supondo *h > 0* e dividindo ambos os lados da igualdade por *h* temos:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

tomando o limite lateral a direita em ambos os lados da igualdade segue:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

no entanto se $f'(c)$ existe temos

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

donde segue que $f'(c) \leq 0$.

Considerando *h<0* e dividindo a desigualdade $f(c+h) - f(c) \leq 0$ por *h* temos:

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$$

tomando o limite lateral a esquerda segue,

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$$

com isto temos $0 \leq f'(c) \leq 0$, donde concluímos $f'(c) = 0$. O caso de um mínimo local é análogo. ❑

Definição: Um número crítico de uma função f é um número no domínio de f tal que ou $f'(c) = 0$ *ou* $f'(c)$ *não existe.*

Ainda para estudarmos problemas de otimização com o Cálculo Diferencial consideremos o teste da segunda derivada, que diz o seguinte:

Teste da segunda derivada: Suponha que f'' *seja continua na proximidade de c.*

a) Se $f'(c) = 0$ *e* $f''(c) > 0$*, então f tem um mínimo local em c.*

b) Se $f'(c) = 0$ *e* $f''(c) < 0$*, então f tem um máximo local em c.*

Sobre o Cálculo de uma variável estes conceitos apontados até o momento são suficientes para o objetivo do trabalho. Agora vamos apresentar alguns resultados acerca de funções de várias variáveis.

Definição: (função de várias variáveis) Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$*. Uma função* $F: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *que corresponde a cada* $X \subset S$ *um único número real* $F(X) \in \mathbb{R}$*, é chamada função de várias variáveis.*

Embora que a teoria acerca de funções de várias variáveis seja bastante extensa, para este trabalho (envolvendo um problema de otimização) o que nos interessa no momento é o teorema de Lagrange (ou método dos multiplicadores de Lagrange). Antes de apresentar o teorema consideremos a seguinte definição

Definição: (vetor gradiente) Se f é uma função de várias variáveis, então o vetor gradiente de f é a função vetorial ∇f *definida por*

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} e_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} e_n$$

onde e_i *é o i-esimo vetor da base canônica de* $\mathbb{R}^n$.

Método dos Multiplicadores de Lagrange: Para determinar os valores máximos e mínimos de f(x,y,z) sujeitos a restrição g(x,y,z)=k [supondo que esses valores extremos existam e que $\nabla g \neq 0$ *sobre a superfície g(x,y,z)=k]:*

a) Determine todos os valores x, y, z e λ *tais que*

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$$

e

$$g(x, y, z) = k$$

b) Calcule f em todos os pontos (x,y,z) que resultaram do passo a). O maior destes valores será o valor máximo de f, e o menor será o valor mínimo de f.

É claro que os conceitos aqui apresentados não são suficientes para um leitor conseguir compreender o conteúdo, para isso seria necessário livros (e ainda se torna complicado). O objetivo destes apontamentos sobre o Cálculo é situar o leitor acerca da teoria utilizada, teoria esta apresentada dentro de três cursos de Cálculo, salve engano.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

No primeiro semestre de 2019, na disciplina “Prática no Ensino de Matemática I” do Curso de Matemática da UEPB campus Monteiro/PB, escolhemos alguns textos sobre Resolução de problemas e Tendências metodológicas para o ensino da Matemática para leitura e discussão em sala de aula. O intuito era de aprofundar os conhecimentos teóricos, para que os estudantes obtivessem um conhecimento e uma preparação melhor para que pudessem levar a metodologia de Resolução de Problemas para as salas de aula. Não pretendíamos apenas aplicar tarefas prontas, mas oportunizar o desafio de aprender a criar situações-problema.

Neste trabalho, tentamos descrever um episódio de aula vivido pelo primeiro e segundo autores e pelos estudantes com relação ao problema apresentado. O professor comentou:

– Seria bom procurar saber qual a melhor forma para resolver o problema, isto é, a minimizar o custo para um máximo de aproveitamento. Para isso, no decorrer de uma aula foi apresentado o seguinte problema pelo segundo autor.

Problema: Mario quer cercar uma área de 15 000 m² em um terreno retangular e então dividi-lo ao meio com uma cerca paralela a um dos lados do retângulo. Como fazer isso de forma a minimizar o custo da cerca?

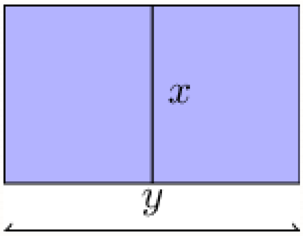
Iniciou-se a discussão da resolução da situação-problema. O professor perguntou, referindo-se ao problema, o seguinte:

- Esse problema está relacionado com Álgebra? Com a Geometria? O que temos que fazer para minimizar o custo da cerca?

Nesse momento, o representante de um dos grupos respondeu:

– Primeiro, temos que fazer um desenho para compreender a situação, mas já sabia o primeiro autor que, estava com um problema que poderia ser solucionado utilizando o Cálculo Diferencial. Desta forma consideremos a figura 1, e vamos procurar elaborar uma função que modele nossa situação matematicamente.

Figura 1: Imagem do problema



Já sabemos que nosso objetivo é minimizar o comprimento da cerca, assim escrevemos uma função que o descreve, temos:

$$\rho(x, y) = 3x + 2y$$

no entanto temos uma função de duas variáveis, desta forma utilizemos a informação sobre a área da região retangular e podemos escrever a seguinte restrição:

$$xy = 15000 \Rightarrow y = \frac{15000}{x}$$

agora substituímos y em ρ, temos a função de uma variável:

$$\rho(x) = 3x + \frac{30000}{x}$$

desta forma podemos aplicar o conhecimento de Cálculo para minimizar a função encontrada. Calculando a derivada de primeira ordem temos:

$$\frac{d}{dx}\rho(x) = 3 - \frac{30000}{x^2}$$

vamos aplicar o teorema de Fermat, fazendo $\frac{d}{dx}\rho(x) = 0$, segue:

$$3 = \frac{30000}{x^2} \Rightarrow x^2 = 10000 \Rightarrow x = \pm 100$$

neste momento já podemos descartar o valor negativo de x, pois estamos trabalhando com a medida do comprimento, assim consideremos apenas $x = 100$ como ponto crítico da função. Derivando ρ pela segunda vez temos:

$$\frac{d^2}{dx^2}\rho(x) = \frac{60000}{x^3}$$

utilizando agora o teste da segunda derivada, aplicamos o ponto crítico encontrado anteriormente em $\frac{d^2}{dx^2}\rho(x)$. Daí,

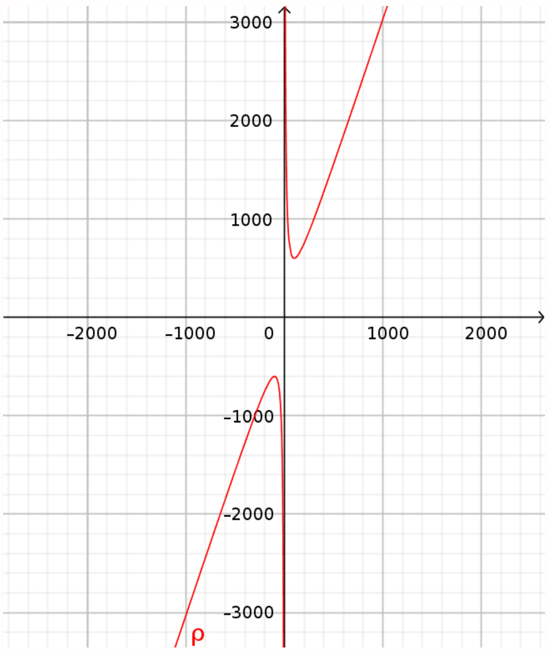
$$\frac{d^2\rho}{dx^2}(100) = \frac{6}{100} > 0$$

como $x>0$ e $\frac{d^2\rho}{dx^2} > 0$, pelo teste da segunda derivada segue que $x=100$ é ponto de mínimo da função, que é o que estávamos procurando. Para encontrar o valor mínimo, bastava aplicar x em ρ, o que segue,

$$\rho(100) = 600$$

sabemos que ρ nos dá o comprimento da cerca, e utilizando o Cálculo foi possível minimizar a função, desta forma podemos concluir que o comprimento de cerca que minimiza seu valor é *600 m*. Ainda podemos verificar nossos cálculos através do gráfico da função, podemos notar na figura 2 que o gráfico trata-se de uma hipérbole, e que o valor que havíamos desconsiderado nos retornaria um número negativo que neste problema não nos seria útil.

Figura 2: Gráfico da função



Agora avancemos além do Cálculo I e vamos abordar o mesmo problema através do Cálculo de várias variáveis, mais especificamente podemos aplicar o teorema de Lagrange, onde veremos como proceder adiante.

Consideremos a função de duas variáveis encontrada na primeira solução,

$$\rho(x, y) = 3x + 2y$$

sujeita a restrição,

$$\psi(x, y) = xy - 15000 = 0$$

onde $\psi(x,y) = xy$ é nossa função, e $\psi(x,y) = xy = 15000$ é a curva de nível que nos interessa. Do teorema de Lagrange sabemos que, $\nabla f = \lambda \nabla g$ e $g(x,y) = 0$. Para aplicarmos o teorema a nosso problema calculemos primeiro os vetores gradientes de ρ e ψ. Daí,

$$\nabla\rho = (\frac{\partial\rho}{\partial x}, \frac{\partial\rho}{\partial y}) \Rightarrow \nabla\rho = (3,2)$$

e

$$\nabla\psi = (\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}) \Rightarrow \nabla\psi = (y,x)$$

donde segue o sistema:

$$\begin{cases} \nabla\rho & = & \lambda\nabla\psi \\ \psi(x,y) & = & 0 \end{cases}$$

resolvendo temos:

$$\begin{cases} 3 & = & \lambda y \\ 2 & = & \lambda x \\ xy & = & 15000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 & = & \lambda y & \quad (i) \\ 2 & = & \lambda\left(\frac{15000}{y}\right) & \quad (ii) \end{cases}$$

de *(ii)* temos, $\lambda = \frac{y}{7500}$. Substituindo λ em *(i)* segue,

$$3 = \frac{y}{7500} \cdot y \Rightarrow y^2 = 22500 \Rightarrow y = \pm 150$$

no entanto a natureza do problema admite apenas valores positivos, ou seja consideremos apenas *y=150,* sabendo que $x = \frac{15000}{y}$ tiramos *x=100.* Desta forma temos as dimensões que minimizam o custo da cerca, *x=100 m* e *y=150 m,* e o comprimento total da cerca de valor mínimo é $\rho(100,150) = 600\ m$.

Usando o teorema de Lagrange encontramos o mesmo resultado da primeira solução (o que não poderia ser diferente). Tal resultado também podemos interpretar graficamente, agora não só como gráfico de funções mas como curvas de nível das superfícies representadas por ρ e ψ . Na figura 4 temos os gráficos de ρ e ψ, em azul e vermelho respectivamente, e na figura 3 temos as respectivas curvas de nível. Na figura 3 a curva de nível *600* do plano intercepta a curva de nível *15000* da função ψ, e este é o ponto que procuramos que possui as cordeadas que representa as dimensões da cerca de menor custo. Tais pontos de intercessão é onde temos $\nabla\rho \parallel \nabla\psi$.

Figura 3: Curvas de nível

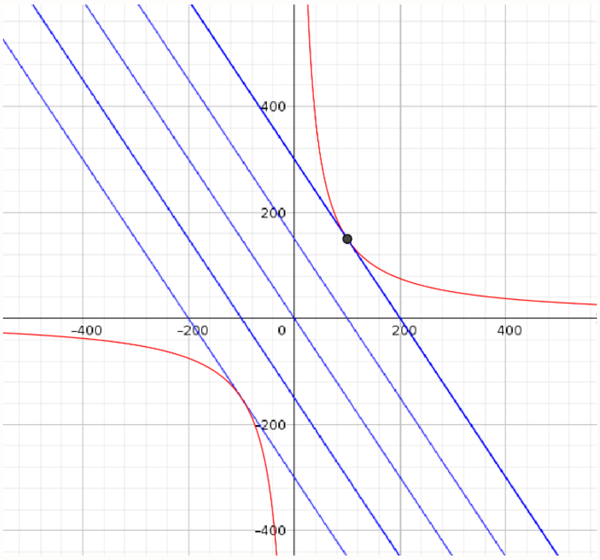
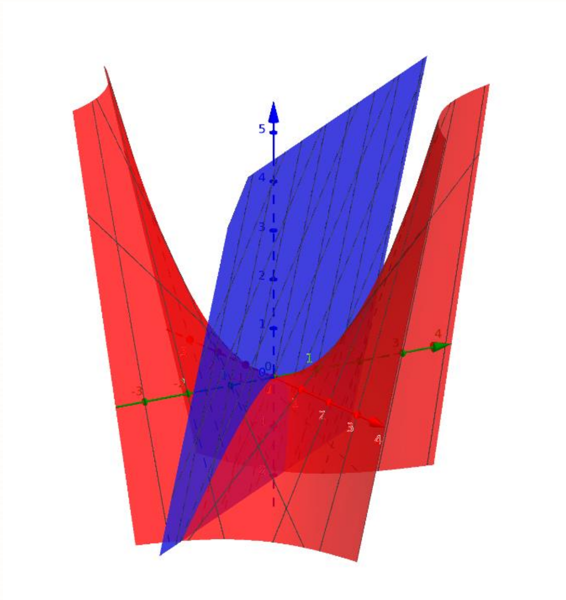


Figura 4: Gráfico das funções de duas variáveis



CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tradicionalmente o trabalho com Cálculo em sala de aula não tem envolvido situações cotidianas. Além disso, no trabalho com o Cálculo Diferencial em sala de aula e na maioria dos livros didáticos predominam as fórmulas e regras que os estudantes usam sem lhes dar o menor significado.

O tema Cálculo Diferencial vem ocupando lugar de destaque no currículo das disciplinas de Cálculo nas Instituições Superiores. No estudo desse tema, o Cálculo Diferencial têm grande importância, pois podem ser aplicadas tanto no dia a dia quanto na Ciência e na alta Tecnologia. Assim como Huanca (2014), acreditamos que o trabalho de ensino e de aprendizagem de Matemática e, particularmente, do Cálculo deve acontecer numa atmosfera de investigação orientada em resolução de problemas. Os estudantes devem ser desafiados a resolver um problema e devem desejar fazê-lo. O problema deve conduzi-los a utilizar seus conhecimentos anteriores e, por outro lado, deverá exigir que se busquem novas alternativas, novos recursos, novos conhecimentos para a obtenção da solução.

Com esse problema, demos oportunidade aos alunos para que pudessem refletir sobre uma situação-problema envolvendo o Cálculo Diferencial e ir em busca de sua solução.

O trabalho realizado com esse problema permitiu a participação ativa dos alunos no processo de resolução de problemas e nas discussões, com colegas, ajudou-os a ter mais confiança, a dar sentido ao que estavam construindo, a estabelecer relações entre os dados e a aumentar suas habilidades em resolução de problemas.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R. et al. (Org.) Resolução de Problemas: teoria e prática. São Paulo: Paco, 2014. p. 35-52.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática-3º e 4º ciclos. Brasília: MEC, 1998. 148p.

HUANCA, R. R. H. A Resolução de Problemas e a Modelização Matemática no processo de Ensino-Aprendizagem- Avaliação: uma contribuição para a formação continuada do professor de matemática. 2014. 315 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.

KILPATRICK, J. Reformulando: Abordando a Resolução de Problemas Matemáticos como Investigação. In: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (Org.). Perspectivas para Resolução de Problemas. São Paulo: Livraria da Física, 2017. cap. 6, p. 163-187.

NETO, J. B. Cálculo: Para entender e usar. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: Editora UNESP, 1999. cap.12, p.199-220.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. (Org.). Educação matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004, p. 213-231.

_______. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 25, nº 41. p. 73-98, 2011.

ONUCHIC, L. R.; HUANCA, R. R. H. A Licenciatura em Matemática: O desenvolvimento profissional dos formadores de professores. In: FROTA, M. C. R.; BIANCHINI, B. L.; CARVALHO, A. M. F. T. (Orgs.). Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior. 1ed. Campinas: Papirus, 2013, v. 1, p. 307-331.

POLYA, G. How to solve it: A new aspect of mathematical method. Princeton: Princeton University Press, 1945.

STEWART, J. Cálculo. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. v. 1 e 2.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. Cálculo. 12. ed. São Paulo: Pearson Education Brasil, 2012. v. 2.

VAN DE WALLE, J. A. Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.