ANÁLISE COMPARATIVA DAS SÉRIES DE TAYLOR E FOURIER

Simone Taiane Gameleira [1]
Davi Ferreira de Lima Silva [2]
Otávio Paulino Lavor [3]

RESUMO

Este trabalho faz uma análise comparativa entre as aproximações de uma função produzidas pelas séries de Taylor e Fourier. As aproximações promovidas pelas séries são comparadas graficamente a fim de verificar qual das séries promove uma melhor aproximação. Com a obtenção das séries de Taylor e Fourier, foram analisados os gráficos formados tomando o mesmo índice final dos somatórios de cada série, donde foi possível identificar que a série de Taylor gera uma melhor aproximação da função.

Palavras-chave: Aproximação, Séries de funções, Gráficos.

INTRODUÇÃO

O estudo de algumas funções devido ao seu grau elevado de complexibilidade, ou a necessidade de encontrar valores em um ponto ainda não conhecido, é recomendado a partir de representações mais simplificadas das mesmas, realizando, portanto, uma aproximação da função desejada por meio de outra função. Uma dessas formas de aproximação de funções é partir da utilização de séries matemáticas.

Uma série corresponde à realização de uma soma de todos os termos de uma sequência que tende ao infinito. Em síntese, quanto mais termos da sequência do somatório adicionados, mais próximo se estará do valor real. Uma série está presente não apenas na ciência matemática, sendo utilizada em inúmeras áreas de estudo, como óptica, relatividade espacial e eletromagnetismo (STEWART, 2013).

Analises de aproximação de funções tem possibilidade de serem realizadas utilizando as séries de Fourier e as de Taylor em equações diferenciáveis. Essas duas séries são análogas no sentido de fornecerem um modo de se expressar funções complexas em termos de certas funções elementares familiares. Em contraponto, são distintas em algumas características, já que a série de Taylor carece de funções diferenciáveis e a série de Fourier exige que as funções

[1] Graduanda do Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, taiane340@gmail.com;
[2] Graduando do Curso de Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Rural do Semi-árido - UFERSA, davi_tali@hotmail.com;
[3] Professor adjunto do Departamento de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, otavio.lavor@ufersa.edu.br;

sejam diferenciáveis por partes, além de contínuas, permitindo a existência de infinitos pontos de descontinuidade na reta (BOYCE E DIPRIMA, 2017).

Portanto, este trabalho visa realizar uma comparação utilizando análise gráfica e de aproximações de funções obtidas por meio das séries de Fourier e Taylor, mais especificamente objetiva dessa forma estudar as séries de Taylor e seu comportamento como um polinômio de aproximação de funções, assim como estudar a série de Fourier para uso de aproximação de funções.

REFERENCIAL TEÓRICO

Séries de Taylor

Sabe-se como serie de potência ou séries de potência em x uma classe específica das séries infinitas do seguinte formato:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots \quad (1)$$

Onde cada termo é multiplicado pelas constantes $c_0, c_1, c_2, \cdots$, denominadas de coeficientes da série de potência, e x_0 é denominado de seu centro. Dessa forma, uma série de potências com o seu centro equivalente a zero torna-se um polinômio em x. (MUNEM E FOULIS, 2011. v.2).

De forma que começa-se com uma função f e tenta-se encontrar uma serie de potência que convirja para esta, realizando portanto uma expansão de f como uma serie de potências.

A série de potência representada na equação (1) é dita convergente em um valor especifico de x, se a sequência das somas parciais, $\{S_N(x)\}$ convergir, ou seja , se o limite da equação 2.1.2 existir:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} c_n(x - x_0)^n \quad (2)$$

Quando essa afirmativa é negada, a série é então chamada de divergente. Toda serie de potências tem um intervalo de convergência que é o conjunto de todos os número reais x para os quais a série converge. O centro do intervalo de convergência é portanto o centro x_0 das séries (ZILL, 2001).

A convergência de uma série de potências pode frequentemente ser determinada pelo teste da razão, basta supor $C_n \neq 0$ para qualquer n que atenda as equações (1) e (2).

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{c_n(x-x_0)^n}\right| = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = L \, . \quad (3)$$

Se o valor obtido para L corresponder a um número menor que 1 a série convergente absolutamente. Já quando obtem-se $L > 1$ a série é divergente, por sua vez quando L possuir valor numérico igual a 1 o teste é considerado inconclusivo, que acontece nos extremos do intervalo de convergência (ZILL, 2001).

Portanto, a série de potência define uma função $f(x)$, em que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n \tag{4}$$

Cujo domínio será o intervalo de convergência da série.

Além de definir uma função, uma série de potência em $x - x_0$ com um raio de convergência positivo ou infinito pode representar uma função $f(x)$ desde que esta seja analítica em um ponto x_0. Funções infinitamente diferenciáveis como e^x, $sen(x)$ e $ln(x+1)$ pode ser representadas pela série de Taylor , que são assim denominadas em homenagem a Brook Taylor (1685-1731) que foi a primeira pessoa a fazer uso de termos especificos em sequencias infinitas para expandir funções e resolver equações diferenciais (THOMAS et al. ,2012) .

Certas funções que possuem como características serem infinitamente deriváveis são capazes de gerar series de potência de Taylor. Podendo a partir disso produzir aproximações polinomiais da função inicial. Para que isso aconteça, basta que a função obedeça o teorema de Taylor, que estabelece segundo Thomas et al. (2012): Se f e suas primeiras derivadas f', f'', f''', ..., $f^{(n)}$ forem continuas no intervalo fechado entre x_0 e x, e $f^{(n)}$ for derivável no intervalo aberto entre x_0 e x, então existe um número c entre x_0 e x , tal que:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \tag{5}$$

De forma que:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{6}$$

Portanto, a função $f(x)$ pode ser aproximada pelo somatório do polinômio de Taylor de ordem n formado $P_n(x)$ e a função $R_n(x)$ que corresponde ao resto de ordem n, ou termo de erro que como pode ser visto acima equivale a $(n+1)$-ésima derivada de $f(n+1)$ num ponto *c* dependente de x_0 e *x* e existente entre esse intervalo.

A série de Taylor é uma classe restrita das séries de potência que permite estudar o comportamento de funções em torno de um ponto especifico. Partindo de uma função infinitamente derivável aplicada a série padrão de potências foi possível encontrar o n-ésimo cociente da série por meio da substituição da n-ésima derivada $f^{(n)}$ definida no ponto especifico x_0 obtendo por fim a série de Taylor que pode ser vista na equação (7) (STEWART, 2013).

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \tag{7}$$

Portanto, quando uma função f consegue ser representada por meio de uma série de potência em torno do ponto x_0, então f é igual à soma de sua série de Taylor. E sendo f a soma de todos os termos de uma série, quando definido um número finito para n , será obtido o polinômio de Taylor de grau n e a função convergirá em torno do limite dessa soma parcial da série. (STEWART,2013).

Séries de Fourier

O nome séries de Fourier é em homenagem a Joseph Fourier, o primeiro a fazer uso sistemático dessas séries em seus artigos de 1807 e 1811 sobre a condução de calor, em que sua preocupação era resolver a equação do calor representando suas soluções como funções não necessariamente contínuas, por soma de séries trigonométricas, onde seus resultados inspiraram um fluxo de pesquisa importante que continua até hoje. (BOYCE E DIPRIMA, 2017). Com estes trabalhos, Fourier estabeleceu que uma função arbitrária pode ser expressa por uma série dada na equação (8):

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \ b_m sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] \tag{8}$$

Assim como a série de Taylor, a série de Fourier é uma ferramenta matemática para representação de funções complexas por meio de termos mais usuais Por meio dessa série é possível resolver muitos problemas que envolvam equações diferenciais parciais, desde que possa expressar uma função integrável de período $2L$ dada como uma série periódica, ortogonal e infinita de senos e cossenos, sendo portanto $2L = 2\pi$ (FIGUEIREDO, 2014). É a partir dessas características que é possível construir expressões para os coeficientes da série de Fourier, a_0, a_m e b_m.

Para encontrar o coeficiente a_0 basta realizar a integração da equação (8) em função de x com o intervalo de integração estabelecido de $-L$ até L (STEWART,2013).

Com a resolução das integrais termos se anulam, exceto o equivalente a primeira integral da direita , que isolando a_0, tem-se a equação que corresponde ao coeficiente desejado.

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) dx \tag{9}$$

Quando trata-se do coeficiente a_m, parte-se do suposto que a equação (8) é verdadeira e então esta é multiplicada por $cos\frac{n\pi x}{L}$ com um valor fixo positivo de n e logo em seguida integra-se em relação ao termo x num intervalo definido de $-L$ até L (STEWART,2013).

Solucionando as integrais formadas é possível identificar que apenas uma das integrais não se anula, e esta difere-se de zero somente quando o valor numérico de $m = n$, em que se obtem que uma parte da integral equivale a L, permitindo escrever termos para valores de m acima de zero, que com fácil manipulação algébricas, compõe o coeficiente e a fórmula definida para o coeficiente $a_m$expresso na equação abaixo.

$$\int_{-L}^{L} cos\frac{m\pi x}{L} dx = La_m \tag{10}$$

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\frac{m\pi x}{L}\, dx \tag{11}$$

Tendo em conta b_m, realiza-se uma multiplicação com a equação (8) , assim como ocorreu para o encontro de a_m, entretendo que o termo multiplicado trata-se de $sen\frac{n\pi x}{L}$, mas considera-se o mesmo intervalo de integração assim com as característica de n positivo. Resolvendo as integrais, é perceptível que o primeiro termo após a igualdade por se tratar de uma função típica senoidal se anulará após substituição do intervalo de integração, assim como acontece com o segundo termo após a igualdade, sobrando, portanto, apenas o ultimo termo após a igualdade que possuirá o valor equivalente que é resultado de $m = n$. Acarretando então a formação da equação que define o coeficiente b_m.

$$\int_{-L}^{L} f(x)sen\frac{n\pi x}{L}\, dx \quad = b_m L \tag{12}$$

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen\frac{m\pi x}{L}\, dx \tag{13}$$

Portanto no conjunto de pontos em que a série converge, ou seja, se a sequências das somas parciais consegue convergir, é definindo então uma função f onde os valores expressos de x correspondem à soma da série para aquele valor de x definido. Podendo dizer então que a série construída é série de Fourier da função f.

Quando a série de Fourier é truncada, ou seja, quando se define um número finito de iterações, obtêm-se o polinômio trigonométrico de Fourier que fornecerá uma aproximação da função a qual representa, onde se origina o questionamento da presente pesquisa na busca por uma melhor aproximação.

METODOLOGIA

F

oi realizado análise bibliográfica acerca da definição de Séries de Taylor e Séries de Fourier. O objetivo desta análise bibliográfica é produzir embasamento teórico, com vistas à concretização dos principais objetivos esperados em relação às séries de Taylor e Fourier.

No que diz respeito ao método abordado, a pesquisa possui natureza aplicada, pois segundo Silva (2005), esta produz estudos para aplicações práticas com o intuito de solucionar problemas específicos que, neste caso, corresponde às equações que são métodos matemáticos que abrangem muitas áreas, inclusive a engenharia. Sobre o ponto de vista da abordagem do problema, para Fonseca (2002) este estudo se classifica como quantitativo, dado que haverá uma análise de dados quantificáveis, com o uso de linguagem matemática, para relatar situações e relações entre variáveis; fazendo uso de instrumentos padronizados e neutros, assim como do uso de um software para determinação de funções a partir de integrais e análise gráfica das aproximações realizadas.

Sendo assim, para chegar aos resultados esperados serão tomados os seguintes passos: pesquisa bibliográfica, escolha da função a serem estudada, determinação de suas séries de Fourier e Taylor, construção de gráficos e análise das aproximações.

Os 6 primeiros termos das séries serão obtidos resolvendo as derivadas necessárias de forma manual e as demais por meio da utilização do *Geogebra*. Este *software* foi escolhido devido a sua licença gratuita juntamente com a possibilidade de resolução das integrais necessárias e principalmente devido a função de construção de gráficos de forma facilitada e de boa qualidade, que são mostrados nas figuras no decorrer do trabalho.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Dentro das funções racionais, foi obtido como uma das escolhas a função $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$ para a realização da aplicação da aproximação por séries.

Esta pode ser aplicada na série de Taylor por ser contínua num certo intervalo e infinitamente derivável, assim como na série de Fourier que, apesar de ser em função de senos e cossenos pode ser aplicada quando não incluindo no intervalo de integração dos coeficientes a indeterminação da função existente em $x = 4$, ou seja , restringindo-se a apenas um intervalo da função.

Para a função $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$ será encontrada a série de Taylor considerando a n-éssima derivada da função em torno de um ponto especifico $x_0 = 0$. Onde obterá o seguinte polinômio de Taylor.

$$P_n(x) = \frac{1}{(0-4)^2}\frac{(x-0)^0}{0!} - \frac{2}{(0-4)^3}\frac{(x-0)}{1!} + \frac{6}{(0-1)^4}\frac{(x-0)^2}{2!} + \cdots \quad (14)$$

$$\frac{1}{(x-4)^2} = \frac{1}{16} + \frac{2}{4^3 \times 1}x + \frac{6}{4^4 \times 2 \times 1}x^2 + \frac{24}{4^5 \times 3 \times 2 \times 1}x^3 + \cdots \quad (15)$$

Devido estar em torno do ponto igual a zero, em cada um dos termos o polinômio que multiplica o fatorial no denominador resultará apenas numa potência de quatro. Como para cada valor de n obteremos novos coeficientes $(c_0, c_1\ c_2, \dots, c_n)$ para determinação da série, abaixo encontra-se a tabela com todos vinte primeiros valores de c_n encontrados.

Para a série de Fourier desta função foi encontrada os coeficientes para esta série num intervalo de integração de $-\pi$ a π. De forma que:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{(x-4)^2}dx \quad (16)$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{(x-4)^2}cos\frac{m\pi x}{\pi}\ dx \quad (17)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{(x-4)^2}sen\frac{m\pi x}{\pi}\ dx \quad (18)$$

Como trata-se de um somatório, há m-éssimos coeficientes para b_m e a_m, diferentemente de a_0 que permanecerá constante ao longo de toda a série definida, sendo encontrado por meio da integração da equação 3.3 a partir do método da substituição, auferindo o valor numérico presente na equação (19).

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{(x-4)^2}dx\ = -\frac{2}{(\pi^2-16)} \quad (19)$$

Como obtenção do coeficiente a_0, é possível então prosseguir para os demais coeficientes necessários, partindo de $m = 1$, dispostos nas equações abaixo.

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{(x-4)^2}\cos(x)\,dx = -0{,}15474159 \quad (20)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{(x-4)^2}\,sen(x)\,dx = \ \ 0{,}12305172 \qquad (21)$$

De forma análoga, resolve-se as integrais para encontrar todos os valores de a_m e b_m utilizados.

Realizando a aproximação da função escolhida com valores de $\mathbf{m = 1}$ para a série de Fourier tem-se a seguinte função, onde o primeiro termo a esquerda representa o coeficiente $\mathbf{a_0}$ multiplicado por um meio:

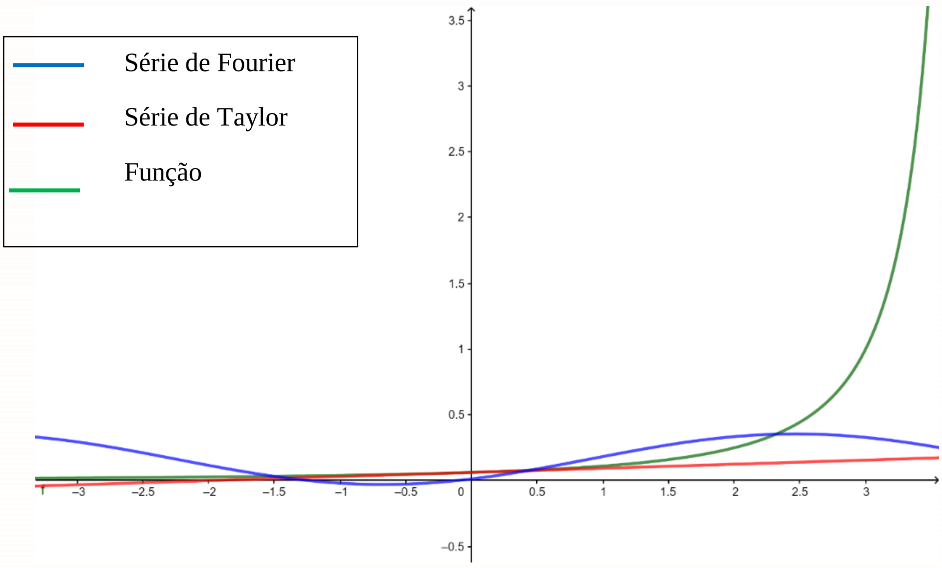
$$f_F(x) = -\frac{1}{(\pi^2-16)} - 0{,}15474159\cos(x) + 0{,}12305172\mathrm{sen}(\mathrm{x}) \qquad (22)$$

Já para a série de Taylor com $n = 1$ tem-se a seguinte expressão:

$$f_T(x) = \frac{1}{16} + \frac{1}{32}x \qquad (23)$$

Abaixo encontra-se o gráfico referente a representação gráfica das funções geradas por cada uma das séries, assim como a função escolhida gerado a partir da utilização do *software* matemático *Geogebra*.

Figura 1: Representação gráfica das funções formadas pelas séries com índice final dos somatórios igual a 1.



Fonte: Autores

É possível observar em verde a função escolhida, em azul a função formada a partir da série de Fourier (f_F) e em vermelho a função formada por meio da série de Taylor (f_T). Por se tratar de uma função trigonométrica com somatório de senos e cossenos, a função f_F tem comportamento de uma onda suave, enquanto f_T possui comportamento de uma função simples de primeiro grau, se aproximando da função principalmente entre o trecho de $-1{,}5 \leq x \leq 1$ onde a função apresenta um comportamento próximo a de uma reta.

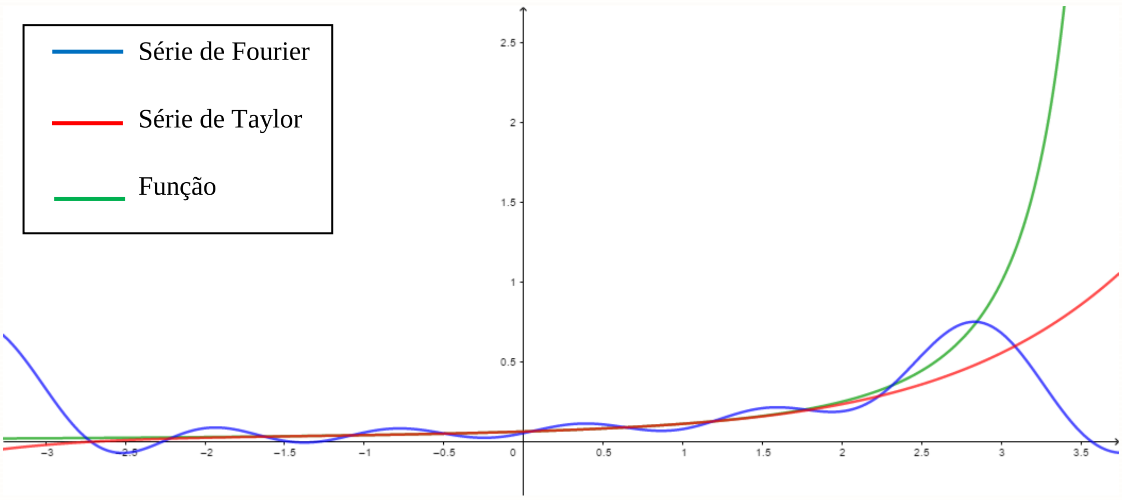
No que se diz respeito a $m = 5$ para o somatório de Fourier e $n = 5$ para o somatório de Taylor, construiu-se as equações abaixo.

$$f_F(x) = -\frac{1}{(\pi^2-16)} - 0{,}15474159\cos(x) + 0{,}08745666\cos(2x) - 0{,}0556899\cos(3x) + 0{,}03825771\cos(4x) - 0{,}02773168\cos(5x) + 0{,}12305172\mathrm{sen}(x) - 0{,}11029227\mathrm{sen}(2x) + 0{,}09358928\mathrm{sen}(3x) - 0{,}07979611\mathrm{sen}(4x) + 0{,}06895769\mathrm{sen}(5x) \tag{24}$$

$$f_T = \frac{1}{16} + \frac{1}{32}x + \frac{3}{256}x^2 + \frac{1}{256}x^3 + \frac{5}{4096}x^4 + \frac{3}{8192}x^5 \tag{25}$$

A atuação das funções formadas ao longo de x para este valor do índice final dos somatórios podem ser visualizadas na Figura 2.

Figura 2: Representação gráfica das funções formadas pelas séries com índice final dos somatórios igual a 5.

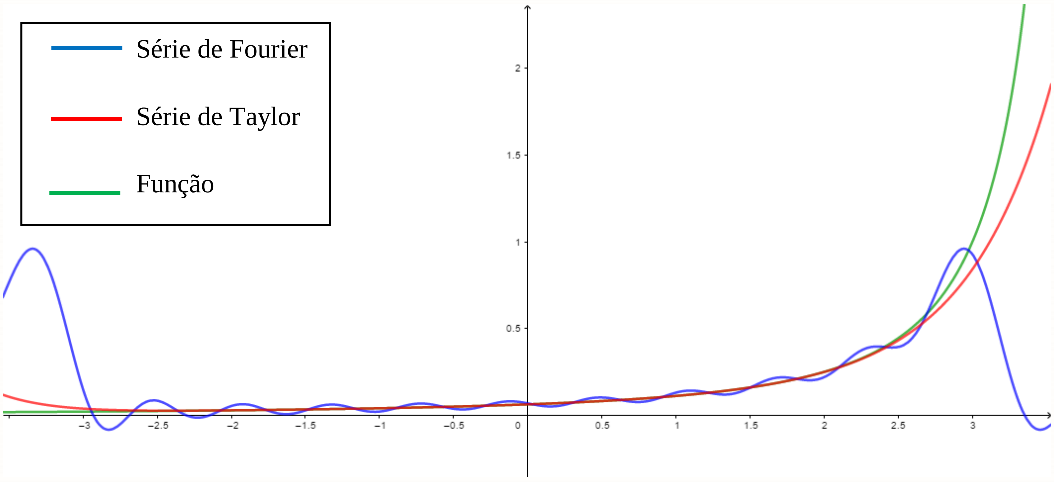


Fonte: Autores

Com cinco termos, é admissível que as séries se aproximam cada vez mais da função desejada no intervalo escolhido.

Averiguando o comportamento das funções formadas para índices mais altos representadas nas Figuras 6 e 7 é constatado mais facilmente como as funções estão se assemelhando.

Figura 3: Representação gráfica das funções formadas pelas séries com índice final dos somatórios igual a 10.



Fonte: Autores

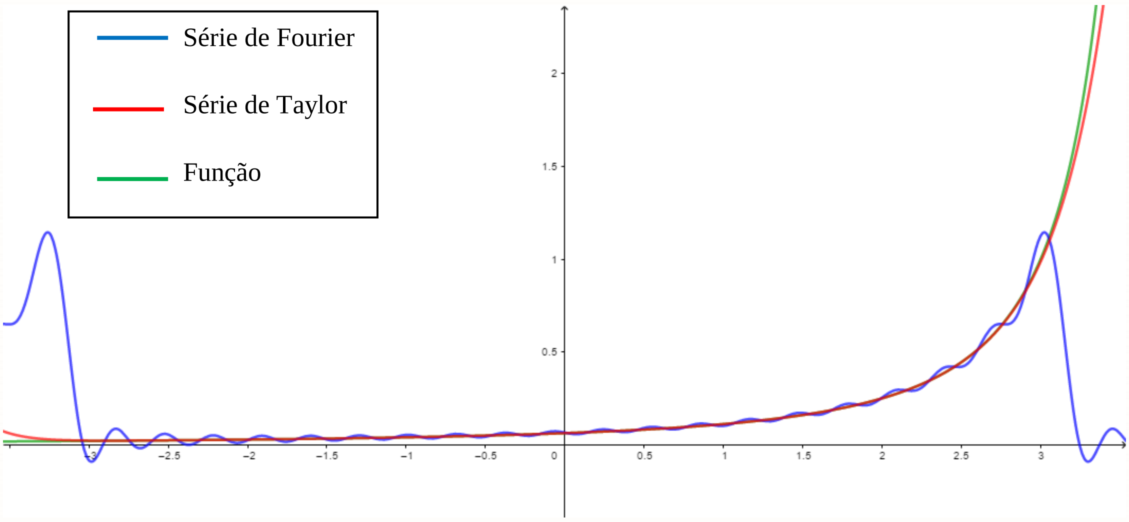
Por se tratar de números relativamente altos de coeficientes, considera-se representar as funções formadas pelo somatório limitado. Atentando-se ao comportamento dos coeficientes encontrados na série de Taylor foi possível encontrar o somatório característico para esta situação que está sendo analisada representando a função formada de maneira mais prática.

$$f_F(x) = -\frac{1}{(\pi^2-16)} + \sum_{m=1}^{10} a_m \cos(mx) + b_m sen(mx) \tag{26}$$

$$f_T = \sum_{n=0}^{10} \frac{(n+1)!}{4^{(n+2)}n!} x^n \tag{27}$$

Explorando as figuras 3 e 4 é plausível uma aproximação crescente da função f_T em relação a f_F, onde esta primeira sobrepôs a função f em praticamente todo o intervalo mostrado na figura, seguindo seu comportamento, inclusive o referente a área mais acentuada do gráfico onde aproxima-se de valores de $x = 4$.

Figura 2: Representação gráfica das funções formadas pelas séries com índice final dos somatórios igual a 20.



Fonte: Autores

Tratando de f_F , na figura 3 e 4 não existiu um aumento significativo ao longo do eixo x, porém a frequência aumentou consideravelmente e as ondas ficaram bem mais suaves no intervalo de $-2{,}5 \leq x \leq 2{,}5$.

Portando, analisando todas as figuras mostradas é perceptível que a série de Taylor produz uma melhor aproximação para a função escolhida em um índice do somatório finito, devido principalmente à série de Fourier ser composta por ondulações de alta frequência que não conseguem seguir de forma aproximada a função desejada como acontece com a série de Taylor composta de um polinômio.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a realização da representação da função $f(x)$ por meio da séries de potências de Taylor centradas em $x_0 = 0$, e a série trigonométrica de Fourier, foi notório ver ao passo que elevava-se os índices dos somatórios mais as funções formadas f_F e f_T se assemelhavam a $f(x)$, realizando uma aproximação entre as funções como era esperado. Entretanto, como a função analisada não era dita periódica e para a formação da série de Fourier foi determinado um intervalo de periodicidade de $-\pi$ a π este é o intervalo o qual a função formada por esta série realiza a aproximação da função $f(x)$ por meio de ondas. Diferentemente da série de Taylor que conseguiu aproximar-se da função escolhida de forma mais precisa e num intervalo mais extenso. Portanto, é admissível dizer que a série de Taylor para a função $f(x)$ é mais aconselhável para realização de aproximações do que a série de Fourier para esta mesma função.

Auxiliado ao requisito de precisão na aproximação alia-se o fato da construção da série de Taylor ser de mais fácil construção, já que derivadas necessitam de menos dedicação de tempo do que resolução de integrais por partes para encontrar os valores numéricos dos coeficientes da série de Fourier.

REFERÊNCIAS

BOYCE, Willian E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica.** Fortaleza: UEC, 2002.

GIL, Antonio Carlos**. Como elaborar projetos de pesquisa.** São Paulo: Atlas, 1991.

MUNEM, Mustafa A. ; FOULIS, David J. **Calculo**. Tradução de André Lima Cordeiro et al. Rio de Janeiro:LTC, 2011, v.2.

SILVA, Edna Lúcia da.; MENEZES, Estera Muszkat. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação**. 4. ed. rev. atual. Florianópolis: UFSC, 2005.

STEWART, James. **Cálculo**. 3. Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v.2.

THOMAS, George B. et al. **Cálculo**. Tradução de Carlos Scalici. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. V.2.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais**. 3. Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001, v.1.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais**. 3. Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001, v.2.