SISTEMA MASSA-MOLA COM RIGIDEZ VARIÁVEL COMO UMA EQUAÇÃO DE AIRY

Francisco Eduardo Duarte da Silva [1]
Otávio Paulino Lavor [2]
Davi Ferreira De Lima Silva [3]
José Lira de Oliveira Júnior [4]
Otávio Paulino Lavor [5]

RESUMO

Um problema clássico apresentado por diversos autores é o do sistema massa-mola que apresenta diversas formas de oscilações e uma dessas é o movimento harmônico simples. Entretanto, esse só é apresentando com uma mola que possui uma rigidez constante em relação ao tempo, um caso totalmente idealizado. Contudo, esse problema pode se tornar mais complexo se considerarmos que o mesmo se dispõe de uma mola com rigidez variável em relação ao tempo. Neste intuito estaria saindo de um caso ideal para uma particularidade em que existe uma dependência temporal na rigidez. A dependência é do tipo linear e o problema é conduzido a equação de Airy, após substituições de variáveis. A equação é resolvida apresentando uma solução analítica para o problema proposto.

Palavras-chave: Equações diferenciais, Equação de Airy, Sistema massa-mola, Rigidez variável.

INTRODUÇÃO

A introdução desde o começo dos tempos o homem vem buscando solucionar problemas que existem ao seu entorno, isso teve inicio por um fato muito intrínseco, ou seja, buscando a própria sobrevivência o ser humano buscou desenvolver meio e técnicas que o propiciassem um modo de vida seguro. Entretanto, com o passar das décadas ou até mesmo de eras a busca pelo conhecimento se tornou algo que ia além da sobrevivência e pessoas começaram a ir atrás do conhecimento por mera curiosidade, assim quem busca o sabe apenas pelo saber foi denominado de filosofo. Por muito tempo esses englobavam toda as áreas do

[1] Graduando do Curso de Engenharia civil da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, eduardoduarte12@gmail.com;
[2] Professor Adjunto da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, otavio.lavor@ufersa.edu.br.
[3] Graduando do Curso de Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, davi_tali@hotail.com;
[4] Graduando do Curso de Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, cjljuniorpb@gmail.com;
[5] Professor orientador: Doutorado, Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, otavio.lavor@ufersa.edu.br.

conhecimento, contudo, com o passar dos anos a filosofia foi se ramificando em várias áreas onde, então surgiu a filosofia natural que hoje e denominada de ciência.

Na ciência teve-se um desenvolvimento das equações diferenciais ferramenta poderosíssima para solucionar problemas de diversos tipos, com um bom entendimento das equações diferenciais, assim como das modelagens matemáticas as barreiras para solucionar não só problemas físicos, mas uma gama infinita de problemas existentes, bem menores.

Um problema comumente retratado nas academias, voltadas às ciências exatas é o do sistema massa-mola, tal problema e introduzido de forma simples e bastante idealiza. Onde tantos os professores como também as literaturas existentes comumente tratam o mesmo com uma mola que possui tanto rigidez como massa constante em relação ao tempo. Entretanto sabemos que na realidade esse sistema esta sujeito a diversos outros fatores tal como dissipação de energia térmica, mola que por vezes possui rigidez variável em relação ao tempo. Neste intuito solucionar um sistema massa-mola que se disponha de uma mola com rigidez variável em ralação ao tempo, não só estaríamos tratando de um caso mais complexo, como também de um caso que se aproxima aos poucos a realidade.

METODOLOGIA

A metodologia a ser usada nesse trabalho será revisões bibliográfocas em referências clássicas voltadas para estudo de equações diferenciais, como também análise de literaturas que retratem as leis de Newton bem como alguns princípois destas.

Outro ponto será aprofunda-se nas deduções matemáticas com principios de se obter a equação que descreva um sistema massa-mola de rigidez variável e ainda com base em modelagens obeter a equação de airy partindo da equação deduzida do sistema massa-mola.

DESENVOLVIMENTO

De início para começarmos a tratar do problema de um sistema massa-mola se faz necessário entender o que seria uma equação diferencial. Estas são basicamente equações que contêm derivadas ou diferenciais de uma função que dependa de uma, ou mais variáveis com relação a uma ou mais variáveis independentes, onde, a resolução destas é voltada a encontrar qual função ou quais funções satisfazem a igualdade existente na mesma. Dentre essas podem existir equações diferenciais ordinárias quando as derivadas dessa são em relação a apenas uma variável ou as equações diferenciais parciais onde as derivadas desta são em relação à duas, ou mais variáveis. Como exemplos, temos:

$$\frac{dy}{dx} = 6 \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3 = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + \frac{\partial^3 \theta}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \tag{4}$$

As equações (1) e (2), são equações diferenciais ordinárias (EDO'S), pois, elas contêm derivadas ordinárias com relação a uma única variável dependente, onde, por exemplo, a equação (1) a variável dependente seria $y = y(x)$ é variável independente seria x. Nas equações (3) e (4), temos que estas possuem derivadas parciais em relação à duas ou mais variáveis independentes, portanto, são denominadas de equações diferenciais parciais (EDP'S).

Podemos ainda classificar as equações acima quanto a sua ordem, onde a ordem de uma equação diferencial é definida como sendo a ordem da derivada de maior ordem na equação diferencial em questão, temos, portanto, que a equação (1) é de primeira ordem, a (3) pode ser confundida com uma equação de terceira ordem, contudo, ela é uma equação de segunda ordem, já que no segundo termo a esquerda temos uma derivada primeira de ordem elevada ao cubo, e não uma derivada terceira da função, a (2) é de segunda ordem e (4) de quarta ordem. Para encontrar as soluções destas equações existem inúmeras maneiras, tais como separação de variáveis, método de Cauchy-Euler, método de séries de potências dentre outros inúmeros existentes.

Método de Series

Uma série é dita série numérica quando seus elementos são números, tal série é representada por,

$$\sum_{n=n_0}^{n=n_f} a_n \tag{5}$$

no caso em que os elementos da série são potências de variáveis, temos então uma série de potências. Onde esta é caracterizada por,

$$\sum_{n=n_0}^{n=n_f} a_n x^n \tag{6}$$

Definição 1.0 (Série de Taylor): Seja $f = f(x)$ uma função que possa ser indefinidamente derivável a representação desta por uma série de Taylor em torno do ponto $x = x_0$ é, a série de potências definida por,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n f(x)}{dx^n}|_{x_0}(x-x_0)^n = f(x_0) + (x-x_0)\frac{df(x)}{dx}|_{x_0}$$
$$+\frac{1}{2}(x-x_0)^2\frac{d^2f(x)}{dx^2}|_{x_0} + \cdots + (x-x_0)^n\frac{1}{n!}\frac{d^nf(x)}{dx^n}|_{x_0} + \cdots$$

representa a n-ésima derivada de $f(x)$ aplicada no ponto x_0, para que a série possa representar a função $f(x)$, a mesma terá que ser convergente, ou seja, a mesma terá que convergir para uma constante c_1. Por outro lado tem-se que uma série é divergente quando a mesma tentende para o infinito, ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n f(x)}{dx^n}|_{x_0}(x-x_0)^n = \infty$$

Com isso temos então que diversas funções tais como as trigonométricas podem ser expressas por uma série de potências. Onde não só podemos representar diversas funções como também obter soluções para diversas equações diferencias. Dentre a inúmera gama que foram solucionadas por tal método iremos retratar a equação de Airy.

Equação de Airy

George Biddell Airy (1801 -1892) foi um astrônomo britânico que desenvolveu a equação,

$$\frac{d^2y}{dz^2} - zy(z) = 0 \tag{7}$$

durante seus estudos sobre a teoria do Arco-Íris, estudando os raios de luz que eram refletidos ou refratados (BARATA, 2018). Tal equação é tida como uma diferencial de segunda ordem com coeficientes variáveis, que por sua vez é uma equação ordinária em $z_0 = 0$, portanto, podemos determinar uma solução para esta por meio de séries infinitas. Para tanto supondo uma solução do tipo,

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{8}$$

temos que,

$$y'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$$

e,

$$y''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n z^{n-2} \tag{9}$$

que pode ser reescrito como

$$y''(z) = \sum_{m+2=2}^{\infty} (m+2)(m+2-1) c_{(m+2)} z^{(m+2)-2} = y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)(m+2) c_{(m+2)} z^m$$

$$y''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{(n+2)} z^n \tag{10}$$

Substituindo (10) e (8) em (7), temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{(n+2)} z^n - z \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 0$$

$$2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{(n+2)} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} z^n = 0$$

que pode ainda ser escrito acima da seguinte forma

$$2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n+2) c_{n+2} - c_{n-1}] z^n = 0$$

onde tem-se uma igualdade de polinômios, em o polinômio da direita é o polinômio nulo. Então, temos que

$$c_2 = 0,$$

$$\underbrace{(n+1)(n+2) c_{n+2} - c_{n-1} = 0}_{I}, \quad \forall_{n \geq 1}$$

Reescrevendo I, com $n = m + 1$ ficamos com

$$(n+2)(n+3) c_{n+3} - c_n = 0, \quad \forall_{n \geq 0}$$

que pode ser reescrito como

$$c_{n+3} = \frac{c_n}{(n+2)(n+3)}$$

e sabendo que,

$$c_2 = 0$$

para $n = 0,1,2,3 \cdots$, temos

$$c_3 = \frac{c_0}{2 \cdot 3}$$

$$c_4 = \frac{c_1}{3 \cdot 4}$$

$$c_5 = \frac{c_2}{5 \cdot 6} = \frac{0}{5 \cdot 6} = 0$$

$$c_6 = \frac{c_3}{5 \cdot 6} = \frac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$c_7 = \frac{c_4}{6 \cdot 7} = \frac{c_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}$$

$$c_8 = \frac{c_5}{7 \cdot 8} = \frac{c_2}{4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{0}{4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8} = 0$$

E para o k-esimo termo, teremos

$$c_{3k} = \frac{c_0}{3^k k!\,(3k-1)!!!}$$

$$c_{3k+1} = \frac{c_1}{3^k k!\,(3k+1)!!!}$$

$c_{3k+2} = 0$, já, que $c_2 = 0$

Em termos da função Gamma de Euler, temos as seguintes igualdades (MACHADO, 2006).

$$(3k-1)!!! = \frac{3^k \Gamma\left(k + \frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}, \quad (3k+1)!!! = \frac{3^k \Gamma\left(k + \frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}$$

Com isso podemos formular a solução, ficando com

$$y(z) = c_0\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{3k}}{3^k k!\,\Gamma\left(k+\frac{2}{3}\right)}\right) + c_1\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{3k+1}}{3^k k!\,\Gamma\left(k+\frac{4}{3}\right)}\right) \qquad (11)$$

que é a solução para equação de Airy.

Sistema Massa-Mola

Em sua definição mais básica tal sistema pode gerar uma oscilação conhecida como movimento harmônico. Para o melhor entendimento desse se faz necessário o conhecimento de algumas propriedades importantes, como por exemplo a lei de Hooke.

Definição 1.1 (Lei de Hooke). A lei de Hooke afirma que ao prendermos um bloco com certa massa a uma mola, esta exercerá uma força restauradora contrária ao deslocamento provocado pelo bloco de massa m. , Quando uma massa m_1 é acoplada a mola, essa se distende a uma distância s_1 e quando uma massa m_2, com $m_2 > m_1$, é colocada na mesma mola ela irá se deslocar a uma distância s_2, onde $s_2 > s_1$. Quanto maior o descolamento, maior a força restauradora exercida pela mola e tal fato é anunciado como $f(s) = -ks$, onde a força restauradora exercida por uma mola é diretamente proporcional ao deslocamento sofrido por esta (NUSSENZVEIG, 2002)

Definição 1.2 (Segunda Lei de Newton). A aceleração que age sobre um corpo deve ser igual à força atuante no mesmo vezes um coeficiente de proporcionalidade dado por, $1/m$. Dessa forma, a força atuante em um corpo por sua vez pode ser entendida como o produto da massa pela aceleração, ou seja, $f = ma$ (NUSSENZVEIG, 2002).

Para o sistema massa-mola, temos que quando um bloco for acoplado a uma mola como já citado anteriormente, ele deslocará a mola a uma distância x desse ponto de equilíbrio e após esse deslocamento, sendo liberado, inicia-se assim um movimento oscilatório, onde temos que a força resultante será uma força dinâmica e expressa pela segunda lei de Newton, onde a aceleração é dada como sendo a derivada segunda do espaço em relação ao tempo. Assim

$$f = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Segundo Zill (2001), se nenhuma outra força atuar no sistema, iniciando-se então um movimento harmônico livre e a força resultante f pode ser igualada a força restauradora, obtendo

$$m\frac{d^2x}{dt} = -kx$$

ou ainda

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = 0 \quad (12)$$

A equação (13) retrata o movimento harmônico simples.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com todos os tópicos já apresentados, imaginar que movimento do sistema massa-mola já deduzido seria o caso mais perfeito possível, em casos reais quando se desloca o bloquinho uma distância x qualquer do ponto de equilíbrio é o soltamos a partir desse momento não se entra em ação apenas a força restauradora da mola e a força resultante do peso mais sim uma gama de fatores atuam nesse momento tais como a resistência do ar, a dissipação de energia por aquecimento da mola, o bloquinho atado a mola pode perder massa com o tempo dentre outros inúmeros. Nesse intuito se considerarmos que a mola atada ao bloquinho se dispõe de uma rigidez variável em ralação ao tempo, não só estaríamos tratando de um caso mais complexo, mas também de um caso que se aproxima um pouco da realidade. Dessa forma como já se sabe que a equação que descreve o movimento harmônico simples é

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = 0 \quad (13)$$

Se tivermos uma rigidez variável com o tempo, dada por

$$k = -\frac{t}{m}$$

temos que a equação (14), fica da forma,

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{\frac{t}{m}x}{m} = 0 \quad (14)$$

Realizando uma substituição do tipo,

$$u = \frac{t}{m}$$

temos que,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt}$$

e

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{du} \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{d^2x}{du^2} \cdot \frac{du}{dt}$$

de forma que a equação (14) é reescrita como

$$\frac{dx}{du} \cdot 0 + \frac{d^2x}{du^2} \cdot \frac{1}{m} - \frac{ux}{m} = 0$$

ou

$$\frac{d^2x}{du^2} \cdot \frac{1}{m} - \frac{ux}{m} = 0$$

ou ainda,

$$\frac{d^2x}{du^2} - ux = 0 \qquad (15)$$

Esta equação é a conhecida equação de Airy, onde já conhecemos a solução que é dada pela equação (7).

$$x = c_0 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{3k}}{3^k k!\, \Gamma(k + \frac{2}{3})}\right) + c_1 \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{3k+1}}{3^k k!\, \Gamma\left(k + \frac{4}{3}\right)}\right) \qquad (16)$$

Entretanto, sabemos que $u = \frac{t}{m}$. Assim teremos:

$$x = c_0 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{m}\right)^{3k}}{3^k k!\, \Gamma(k + \frac{2}{3})}\right) + c_1 \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{m}\right)^{3k+1}}{3^k k!\, \Gamma\left(k + \frac{4}{3}\right)}\right) \qquad (17)$$

A equação (17) é a solução para o problema de um sistema massa-mola com uma rigidez variável com dependência linear. A variável x fornece os deslocamentos do bloco em cada tempo t.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por fim, com base em todos os tópicos a presentados ao longo deste trabalho, conseguiu-se observar a importância das equações diferenciais para se solucionar problemas físicos de diversas características. Ao tratarmos do sistema massa-mola foi notório a importância de modo geral do sistema massa-mola, pois, ao tratarmos tal sistema com uma rigidez variável observamos uma das inúmeras formas de oscilações que o mesmo pode apresentar e ao tentar encontrar a solução deste foi notório a importância das modelagens, pois, conseguimos soluciona o problema de um sistema com rigidez variável utilizando a equação do astrônomo Airy, que por vezes foi desenvolvida pelo mesmo para o estudo de raios de luz que eram refletidos ou refratados em arco-íris. Dessa forma observando que com o bom entendimento das equações diferenciais as barreiras para solucionar as diversidades de problemas existentes se tornam bem menor.

REFERÊNCIAS

BARATA, J. C. A. **Curso de Física -Matemática**. Departamento de Física-Matemática da Universidade de São Paulo, Versão de 2018, v.17.

MACHADO, Kleber Daum. **Equações diferenciais aplicadas**. Ponta Grossa: TODAPALAVRA Editora, 2012.

NUSSENZVEIG, Herch Moyseys. **Curso de física básica: mecânica**. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, c2001. 2 v. ISBN 8534612919 (v.1).