

USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA PREVISÃO DE ENCHENTES

José Lira de Oliveira Júnior¹
Francisco Eduardo Duarte da Silva²
Otávio Paulino Lavor³

RESUMO

Este trabalho apresenta os fundamentos teóricos sobre enchentes (ou inundações) e meios de previsão para tais, assim como uma breve introdução sobre equações diferenciais (EDs) e modelagem matemática, tendo como propósito estabelecer um modelo matemático que torne possível a previsão do alcance de uma enchente de uma bacia hidrográfica, assim, exemplificando uma das diversas aplicações das EDs. Fazendo uso de, provavelmente, o método mais simples de resolução de equações diferenciais, assim como de algumas manipulações algébricas, conseguimos encontrar a área inundada por um fluxo constante ou variável. Para isso, é necessário conhecer os dados e parâmetros coletados e observados experimentalmente a fim de encontrar os valores necessários para uma boa previsão.

Palavras-chave: Enchentes, Equações Diferenciais, Modelagem Matemática, Fluxo Constante.

INTRODUÇÃO

Segundo Lourenço Leme (2006), o processo de ocupação dos centros urbanos provoca impactos no meio ambiente, particularmente, relacionados com as modificações do ciclo hidrológico e a intensa impermeabilização do solo, cujas consequências são o crescimento dos eventos de inundações urbanas em número e magnitude com prejuízos materiais, patrimoniais e humanos para a sociedade.

O número de inundações em rios tem aumentado significativamente em diversas localidades do Brasil em decorrência do crescimento desordenado das cidades brasileiras, do aumento do número de ocupações às margens de rios e também devido a precipitações intensas com duração suficiente para ultrapassar a capacidade do volume de água do rio.

Existem medidas estruturais e não estruturais para evitar as inundações, todavia não estruturais são as mais recomendadas e ideais no controle de inundações, pois envolvem menos

¹ Graduando do Curso de Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, jljuniorpb@gmail.com;

² Graduando pelo Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, eduardoduarte12@gmail.com;

³ Professor adjunto do Departamento de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, otavio.lavor@ufersa.edu.br;

investimento e não causam impactos ambientais, atuando na minimização das consequências vindas desses eventos. Assim, utilizaremos as equações diferenciais como uma medida não estrutural para realizar previsões de enchentes.

METODOLOGIA

Neste trabalho, foram utilizados dados de literaturas sobre enchentes em bacias hidrográficas. Foi feita uma revisão bibliográfica do tema abordado através do trabalho de conclusão de curso de Aloisio José Battisti (2002). Algumas equações presentes no trabalho foram manipuladas a fim de propiciar melhor compreensão, visando contribuir de maneira efetiva para o aprimoramento do conhecimento.

Através de equações diferenciais, foi possível obter um modelo matemático e encontrar fórmulas para o problema físico (enchentes). A fim de encontrar a área inundada foi preciso realizar uma série de cálculos, utilizando fórmulas e manipulações. Os cálculos foram feitos primeiramente para escoamento variável, depois com fluxo constante e variável.

DESENVOLVIMENTO

Os problemas encontrados no estudo da Física geralmente são modelados por equações diferenciais. Segundo Kreyszig (2009), uma equação diferencial ordinária é uma equação que contém uma incógnita. Essas equações possuem apenas derivadas em relação a uma única variável. Para exemplificar, a equação 1 mostra a equação diferencial que rege o movimento de um pêndulo simples.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (1)$$

Na equação 1, a incógnita é $\theta(t)$ e t é nossa variável independente.

Modelagem Matemática: Para Mendonça (1993), modelagem matemática é um processo de sentido global que se inicia numa situação real (problema), para a qual buscamos uma solução que traduz, em linguagem matemática, as relações naturais do problema de origem.

Essa área de conhecimento estuda a simulação de sistemas reais, buscando prever como estes irão se comportar, ou seja, ao utilizar-se de uma modelagem, seu resultado final poderá descrever um fenômeno através da matemática.

Segundo Battisti (2012), em uma modelação matemática é necessário percorrer as duas seguintes etapas: a obtenção de dados experimentais, selecionando variáveis que serão essenciais para o problema, após isso se monta o modelo matemático adequado e comparam-se os resultados obtidos com os dados reais.

As equações diferenciais são muito utilizadas para a análise com este tipo de modelo matemático, e elas possuem um papel de destaque, visto que estas vem sendo utilizadas desde o século XVII.

Agora, partiremos para o assunto principal do trabalho, que são as enchentes e formas de previsão: Enchentes são eventos de vazões extremas que ocorrem quando a chuva é intensa e com uma duração suficiente para que a vegetação, o armazenamento temporário e a absorção de água pelo solo tenham seu limite ultrapassado, causando um volume de água que ao chegarem aos cursos de água façam que eles ultrapassem sua carga natural gerando inundações de áreas próximas a eles.

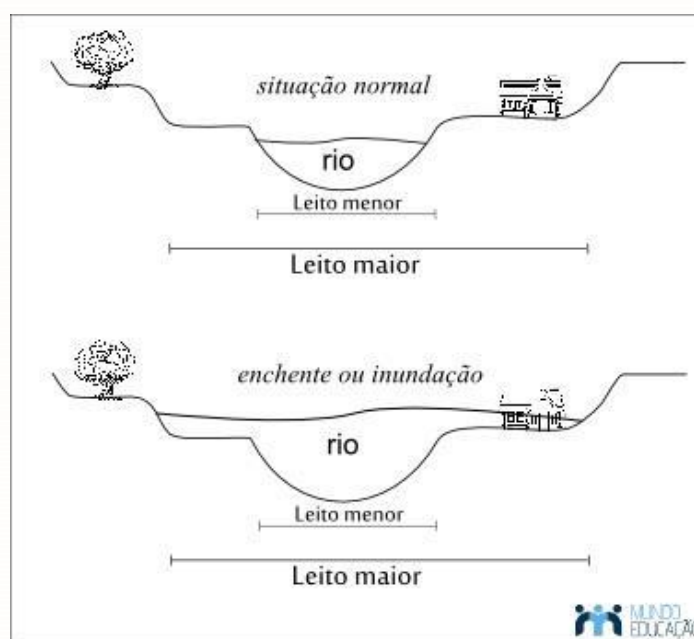


Figura 1 - Origem natural das enchentes. Fonte: Mundo Educação

Os principais impactos e prejuízos para a sociedade oriundos desse fenômeno são:

- Perdas materiais e humanas;
- Interrupção da atividade econômica;

- Contaminação por doenças de veiculação hídrica;
- Contaminação da água.

Boa parte dos problemas ocorrem pela má formação de cidades ou aglomerados pertos dos rios e lagos. Para combater e evitar tais problemas recorreríamos a previsão dessas enchentes se adaptando ao que poderia ocorrer durante os anos.

A previsão pode ser realizada em curto ou a longo prazo. Para o caso de longo prazo, a previsão só pode ser realizada por meio de modelos probabilísticos determinando os eventos extremos e o período de retorno das enchentes. São utilizadas nas medidas estruturais de obras hidráulicas, nas barragens ou obras de drenagem urbana, a fim de minimizar os efeitos das inundações que pode vir a acontecer nessas obras.

Já a previsão a curto prazo, é realizada ao longo da ocorrência dos processos com base nos conhecimentos das variáveis das enchentes, como a vazão, precipitação, entre outras. Este tipo de previsão se divide em mais dois casos que são as previsões contínuas ou eventuais, a contínua é realizada e simulado ao longo do tempo, já a eventual é realizada e trabalha-se com dados já predefinidos com condições específicas do ambiente, condições críticas.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A primeira parte que precisa descrever dos cálculos é utilizando o escoamento variável. Então, a taxa de volume precipitado $Q(t)$ pode ser encontrada através da fórmula mostrada abaixo:

$$Q(t) = Ka(t)\sqrt{2gy} \quad (2)$$

Onde y é a altura, K é uma constante de proporcionalidade determinada pela razão entre o volume precipitado acumulado e o volume precipitado e g é a gravidade.

O objetivo é encontrar $a(t)$, isto é, a área de escoamento. Então, isolando o termo na equação 2, obtemos:

$$a(t) = \frac{Q(t)}{K\sqrt{2gy}} \quad (3)$$

Assim, para cada análise, podemos encontrar os respectivos valores das variáveis através da substituição dos mesmos, a área de escoamento que caracteriza o comportamento da bacia hidrográfica é determinada.

Por exemplo, considerando o valor da gravidade $9,8 \text{ m/s}$ e $Q(t)$ um valor x ; y um valor h ; K um valor W , obtemos o seguinte:

$$a(t) = \frac{x}{W\sqrt{19,6h}}$$

Essa é uma equação que muda de resultado, pois varia de acordo com o tempo. Por exemplo, a precipitação acumulada não é a mesma do dia anterior, assim, os valores das variáveis variam, conseqüentemente, afetam o resultado. Portanto, pode-se ter uma tabela com diversos valores de $a(t)$ e através de um software adequado encontrar a expressão polinomial de $a(t)$.

Caso já se conheça o valor de $a(t)$, é preciso encontrar valores para uma equação que forneça a área inundada representada pelo fluxo constante $s(y)$ e pelo fluxo variável $s_n(y)$. Agora, faremos os cálculos considerando um fluxo constante e resolvendo a equação diferencial de primeiro grau por separação de variáveis em dy e dt , assim:

$$s(y) \frac{dy}{dt} = Ka(t)\sqrt{2gy} \quad (5)$$

$$s(y) \frac{dy}{dt} = Ka(t)\sqrt{2g}\sqrt{y}$$

$$s(y) \frac{dy}{dt} \frac{1}{\sqrt{y}} = Ka(t)\sqrt{2g}$$

$$\int s(y)y^{-0.5} dy = \int Ka(t)\sqrt{2g} dt$$

$$s(y) \frac{y^{0.5}}{0.5} = KA(t)\sqrt{2g}$$

$$2s(y)\sqrt{y} = KA(t)\sqrt{2g} + c$$

Sendo c uma constante que deve ser determinada através do problema de valor inicial, onde $y = y_0$ e $t = 0$, logo,

$$2s(y)\sqrt{y_0} = 0 + c$$

$$c = 2s(y)\sqrt{y_0}$$

Substituindo c , encontramos:

$$2s(y)\sqrt{y} = KA(t)\sqrt{2g} + s(y)2\sqrt{y_0}$$

$$2s(y)\sqrt{y} - 2s(y)\sqrt{y_0} = KA(t)\sqrt{2g}$$

$$2s(y)(\sqrt{y} - \sqrt{y_0}) = KA(t)\sqrt{2g}$$

Logo,

$$s(y) = \frac{KA(t)\sqrt{2g}}{2(\sqrt{y} - \sqrt{y_0})} \quad (6)$$

Já que o fluxo foi considerado constante, ou seja, a água que sai é a mesma que entra, obtemos $s(y) = a(t)$.

Com essas informações, através da equação 5, temos:

$$\frac{dy}{dt} = K\sqrt{2gy}$$

Resolvendo essa EDO pelo mesmo método de separação de variáveis, chegamos ao resultado mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= K\sqrt{2g}\sqrt{y} \\ \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy &= \int K\sqrt{2g} dt \\ \int y^{-0.5} dy &= \int K\sqrt{2g} dt \\ \frac{y^{0.5}}{0.5} &= K\sqrt{2g}t \\ 2\sqrt{y} &= Kt\sqrt{2g} + c \end{aligned}$$

Novamente, para determinar a constante, utilizaremos o mesmo problema de valor inicial, assim, similarmente:

$$c = 2\sqrt{y_0}$$

Daí, substituindo na solução, vamos encontrar:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{y} &= Kt\sqrt{2g} + 2\sqrt{y_0} \\ 2\sqrt{y} - 2\sqrt{y_0} &= Kt\sqrt{2g} \\ 2(\sqrt{y} - \sqrt{y_0}) &= Kt\sqrt{2g} \end{aligned}$$

Se substituirmos esse último resultado na equação 6, ficamos com:

$$s(y) = \frac{KA(t)\sqrt{2g}}{Kt\sqrt{2g}}$$

Simplificando,

$$s(y) = \frac{A(t)}{t}$$

A partir dessa equação é possível encontrar valores para a área inundada, já que sabemos como calcular $A(t)$, pois o mesmo é a equação primitiva de $a(t)$ e t corresponde ao período compreendido usado no cálculo da área de escoamento. Então, conseqüentemente, assim como em $a(t)$, só que, por meio dessa equação, também podemos encontrar diferentes valores para $s(y)$, já que temos várias variáveis que mudam de acordo com cada situação e tempo.

Porém, se considerarmos um fluxo não constante, isto é, fluxo variável, resolvendo pelo método de separação de variáveis, temos:

$$s_n(y) \int_{y_0}^y y^{-0.5} dy = \sqrt{2g} \int_{t_0}^{t_1} a(t) dt$$

$$2s_n(y) \sqrt{y} \Big|_{y_0}^y = \sqrt{2g} A(t) \Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$2s_n(y) (\sqrt{y} - \sqrt{y_0}) = K \sqrt{2g} [A(t_1) - A(t_0)]$$

Para $y_0 = 0$, isolando $s_n(y)$,

$$s_n(y) = \frac{K \sqrt{2g}}{2 \sqrt{y}} [A(t_1) - A(t_0)] \quad (7)$$

$A(t_0)$ e $\frac{K \sqrt{2g}}{2}$ são constantes, então, para simplificar, vamos escrever:

$$A(t_0) = z$$

$$\frac{K \sqrt{2g}}{2} = n$$

Portanto, a equação 7 pode ser reescrita como

$$s_n(y) = \frac{n}{\sqrt{y}} [A(t) - z]$$

$A(t)$ e y são variáveis que podem ser encontradas pelas fórmulas já apresentadas. Então, com determinados valores para todas as variáveis, obteremos $s_n(y)$. Através de transformações básicas de unidades de medida, obtemos esse valor em km^2 (quilômetros quadrados).

Diante disso, se aplicado dados de enchentes reais, pode-se encontrar valores para as áreas inundadas e é possível prever as regiões vizinhas da bacia hidrográfica que serão atingidas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Utilizando da modelagem matemática podemos descrever fenômenos físicos, que desta forma, possamos melhor compreendê-los e prevê-los. A construção desse trabalho nos permitiu empregar a modelagem matemática para previsão de enchentes em bacias hidrográficas utilizando equações diferenciais de primeira ordem, que nos possibilitou chegar aos resultados expostos.

Através da tecnologia existente, é possível realizar a estimação de alcance de enchentes, de forma técnica, utilizando diversos métodos e aparelhos. O uso das equações diferenciais para estimação de enchentes foi apenas mais uma maneira de solucionar um problema. Para isso, devem-se aplicar, nas equações, os respectivos dados coletados e observados, para obter os valores desejados. Então, fizemos uso de manipulações algébricas e tornamos as equações utilizáveis a qualquer situação real.

REFERÊNCIAS

BATTISTI, Aloisio José. **Equações diferenciais aplicadas em escoamento de fluidos**. 2002. 48 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002. Cap. 05.

COSTA JUNIOR, Lourenço Leme da; BARBASSA, Ademir Paceli. **Parâmetros de projeto de microrreservatório, de pavimentos permeáveis e de previsão de enchentes urbanas**. Scielo, São Paulo, v. 11, n. 1, p.46-54, 27 jan. 2006.

KREYSZIG, Erwin. **Matemática Superior para Engenharia**. Volume 2. 9ª ed. LTC, 2009.

MENDONÇA, M. C. D. **Problematização: Um caminho a ser percorrido em Educação Matemática**. Tese (Doutorado) - UNICAMP, 1993.

PENA, Rodolfo F. Alves. **Enchentes: O problema das enchentes e das inundações no espaço urbano muito se relaciona com o crescimento desordenado das cidades**. Disponível em: <<http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/geografia/enchentes.htm>>. Acesso em: 15 mar. 2017.