SISTEMA MASSA-MOLA COM MASSA VARIÁVEL COMO UMA EQUAÇÃO DE CAUCHY-EULER

José Lira de Oliveira Júnior [1]
Davi Ferreira de Lima Silva [2]
Francisco Eduardo Duarte da Silva [3]
Otávio Paulino Lavor [4]

RESUMO

Este trabalho apresenta uma revisão teórica sobre equações diferenciais, iniciando com uma breve introdução histórica, relatando o desenvolvimento da área a partir do cálculo diferencial e integral, estudado por Isaac Newton e Gottfried Leibniz, conceitos fundamentais e métodos de resolução analíticos, algumas equações diferenciais especiais, destacando-se a equação de Cauchy-Euler e o problema do sistema massa-mola, tendo como propósito modelar matematicamente o oscilador massa-mola, problema bastante corriqueiro nos estudos de Física, porém, neste caso, com massa variável, a fim de servir como base para o estudo de características do movimento harmônico. Normalmente, o problema proposto é tratado de forma bastante simplista, onde temos um corpo de massa constante preso a uma mola, portanto, buscamos aproximar o problema à realidade. Para isso, propomos funções de variação para a massa da mola, assim, o movimento do sistema foi modelado por uma equação de Cauchy-Euler. Por fim, solucionamos a equação diferencial obtida e este resultado pode ser utilizado para a análise do oscilador harmônico.

Palavras-chave: Equações diferenciais, Equação de Cauchy-Euler, Oscilador harmônico, Modelagem matemática.

INTRODUÇÃO

A necessidade de descrever a realidade não é atual. Desde os primórdios, a humanidade busca entender os fenômenos naturais que nos cercam e através da diligência e esforço de grandes mentes ao longo de toda a nossa história foi possível para nós obter toda a tecnologia e informação existente hoje. Após a grande divisão de áreas do conhecimento, a Física tornou-se a ciência que persegue os porquês do Universo e uma poderosa ferramenta utilizada por físicos é a modelagem matemática.

[1] Graduando do Curso de Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, jljuniorpb@gmail.com;
[2] Graduando pelo Curso de Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, davi_tali@gmail.com;
[3] Graduando pelo Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, eduardoduarte12@gmail.com;
[4] Professor adjunto do Departamento de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, otavio.lavor@ufersa.edu.br;

Seja para estudar o crescimento da população em determinada região ou entender o movimento dos corpos celestes, podemos (ou tentamos) desenvolver um **modelo matemático** capaz de descrever determinado fenômeno. De acordo com Zill (2016, p. 21), um modelo matemático começa com a identificação das variáveis responsáveis pela variação do sistema e depois a elaboração de um conjunto de hipóteses razoáveis, e estas dependerão de quão preciso o modelo precisa ser.

Para tratar o conceito de variáveis e taxas de variação, as ferramentas matemáticas mais adequadas e utilizadas são equações envolvendo derivadas, isto é, equações diferenciais, ou ainda, sistemas de equações diferenciais.

Com isso em mente, o objetivo desse trabalho é modelar um problema bastante conhecido em estudos de Física, o sistema massa-mola, que é basicamente um corpo com uma massa qualquer preso a uma mola que sofre a influência de forças externas. No entanto, este problema geralmente é mostrado de forma simplificada, onde a massa do corpo não se altera. Aqui buscaremos um modelo matemático capaz de descrever o movimento do sistema citado tendo massa variável, buscando assim uma maior aproximação da realidade.

O tema foi escolhido por conta da importância do sistema massa-mola. As suas características definem o que é chamado de movimento harmônico simples (ou amortecido, dependendo da situação considerada), assim, podemos fazer generalizações e obter informações sobre o movimento de corpos em situações similares.

Para a realização do objetivo estabelecido, buscamos aportes teóricos em bibliografias especializadas na área de Equações Diferenciais, como Zill (2016), Boyce (2006), Barata (2018) e Machado (2014), assim como autores que apresentam o problema do sistema massa-mola, como Nussenzveig (2002) e Halliday et al. (2011). A partir daí foi possível definir conceitos imprescindíveis para a elaboração do trabalho, introduzidos por um breve contexto histórico. Fazemos a modelagem matemática do problema por métodos analíticos, logo após, discutimos os resultados e as conclusões que podemos tomar por estes.

METODOLOGIA

A metodologia utilizada será uma revisão bibliográfica, com foco na teoria das equações diferenciais ordinárias (EDOs), seus métodos de resolução, equações diferenciais especiais e como utilizá-las para modelagem matemática.

A partir de referências como Zill (2016), Boyce (2006), Barata (2018) e Machado (2014) podemos apresentar definições importantes de EDOs, seus principais tipos e métodos de resolução com ênfase no método de séries e Fröbenius. Cajori (1909) e Kupferman (2012) nos apresentam um breve histórico das equações diferenciais, mostrando a evolução desde os estudos de cálculo diferencial e integral com Gottfried Leibniz e Isaac Newton até os métodos numéricos usados em máquinas hoje. Nussenzveig (2002) nos mostra o sistema massa-mola, os princípios básicos do estudo deste e uma análise sobre o movimento harmônico simples.

No estudo das equações diferenciais, daremos destaque à equação de Cauchy-Euler, por ser parte do conteúdo principal deste trabalho. A partir dos conhecimentos citados nessas referências modelaremos o sistema massa-mola usando de princípios como a lei de Hooke e a segunda lei de Newton.

Após isso, propomos uma variação de massa de tal forma que encontramos uma equação diferencial, e assim, encontrar uma solução para tal.

DESENVOLVIMENTO

O cálculo diferencial e integral foi desenvolvido no século XVII, motivado pela necessidade de descrever as leis da natureza, inicialmente através dos estudos de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646 - 1716). Constantemente os problemas encontrados no estudo da Física eram modelados por equações diferenciais. Com isso, foi necessário o desenvolvimento de métodos para a resolução destes problemas.

De acordo com Kupferman (2012), a primeira referência a uma equação diferencial é uma equação estudada por Newton em 1671, enquanto desenvolvia o cálculo diferencial:

$$y'(t) = 1 - 3t + y(t) + t^2 + ty(t) \qquad y(0) = 0 \tag{1}$$

A abordagem de Newton para resolver essa equação foi baseada num método que chamamos hoje de **expansão assintótica**. Ele buscava uma solução que pudesse ser expressa como uma série de potências.

Segundo Boyce (2006, p. 15-16), Leibniz descobriu o método de separação de variáveis, desenvolveu o método de redução de equações homogêneas em equações separáveis assim como o procedimento para resoluções de equações lineares de primeira ordem. Leibniz era conhecido por viajar bastante, e corresponder-se com outros matemáticos, e com essa busca por soluções de equações diferenciais, os irmãos Jakob (1654-1705) e Johann (1667-1748) Bernoulli fizeram inúmeras contribuições para o ramo das equações diferenciais, tanto que há uma equação diferencial não linear que leva este sobrenome em homenagem a Jakob por este ter encontrado uma solução para tal.

Aluno de Johann Bernoulli, e amigo do seu filho Daniel Bernoulli (conhecido principalmente por seus estudos em mecânica dos fluidos), Leonhard Euler (1707 - 1783), considerado o maior matemático do século XVIII, identificou a condição para que equações diferenciais de primeira ordem sejam exatas, desenvolveu a teoria do fator integrante, usou bastante séries de potências, assim como propôs um método numérico que leva seu nome. (CAJORI, 1909, p. 288 - 295). Alguns estudiosos notáveis que também contribuíram para o crescimento da teoria das equações diferenciais são Lagrange, Laplace, Cauchy, Bessel, Gauss, Hermit, Legendre e Lipschitz.

Definição 1: Uma equação diferencial é a equação que contém as derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais funções não conhecidas (ou variáveis dependentes), em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de **equação diferencial (ED)**. (ZILL, 2016, p. 2).

As EDs podem ser classificadas de acordo com seu tipo (ordinária ou parcial), ordem e linearidade, como será mostrado a seguir:

A equação (2) é uma **equação diferencial ordinária (EDO)**, por só conter derivadas em relação a uma variável independente.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = 8x + \frac{2}{3}\ln(x) \qquad (2)$$

A equação (3) é uma **equação diferencial parcial (EDP)**, por conter derivadas em relação a mais de uma variável independente.

$$\frac{\partial^3 y}{\partial t^2} + 2\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad (3)$$

Uma equação também pode ser classificada de acordo com a ordem da sua maior derivada. Por exemplo, as equações (2), (3) e (4) tem **ordem 1, 3** e ***n***, respectivamente.

$$\frac{\partial^n y}{\partial t^n} = 4e^{2t} \tag{4}$$

Por fim, uma ED é classificada como **linear** caso seja da seguinte forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{5}$$

Um exemplo de equação da forma de (5) é:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{5} = 9{,}8 \tag{6}$$

Uma equação que não é da forma de (5) é dita **não-linear**, por exemplo, se em (6), ao invés de $\frac{v}{5}$ tivéssemos $\frac{v^2}{5}$ ou $\frac{\sin v}{5}$ a ED deixaria de ser linear.

As equações que trataremos neste texto serão sempre EDOs, portanto é importante falar sobre as soluções de uma equação diferencial ordinária.

Definição 2: Toda função Ω n-vezes diferenciável, definida em um intervalo I, é dita **solução** da equação diferencial de ordem n, se ao substituirmos Ω e suas derivadas na equação, a equação for reduzida a uma identidade.

Para encontrar as soluções de uma EDO, existem várias maneiras, como o método dos coeficientes indeterminados, variação de parâmetros, fator de integração, entre outros. Cada método tem melhor aplicação em uma determinada classe de equação.

De acordo com Zill (2016, p. 171), uma **equação de Cauchy-Euler** é a equação diferencial linear da forma:

$$\mathrm{a_n x^n}\frac{\mathrm{d^n y}}{\mathrm{dx^n}} + \mathrm{a_{n-1} x^{n-1}}\frac{\mathrm{d^{n-1} y}}{\mathrm{dx^{n-1}}} + \cdots + \mathrm{a_1 x}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + \mathrm{a_0 y} = \mathrm{g(x)} \tag{7}$$

Vamos encontrar uma solução para a equação de Cauchy-Euler de segunda ordem homogênea, isto é,

$$ax^2\frac{d^2 y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{8}$$

Vamos supor uma solução da forma $y = x^m$, onde m deve ser determinado. Temos que:

$$ax^2 \frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = (am(m-1) + bm + c)x^m \quad (9)$$

Assim, nota-se que $y = x^m$ será uma solução da equação diferencial sempre que m for uma solução da equação característica abaixo:

$$am(m-1) + bm + c = 0 \implies am^2 + (b-a)m + c = 0 \quad (10)$$

A equação acima é quadrática, portanto, três casos devem ser considerados: o caso (i) onde teremos raízes reais e distintas, o caso (ii) com raízes repetidas e o caso (iii) com raízes complexas e conjugadas.

Para o primeiro caso temos $m_1 \neq m_2$, logo, a solução geral será:

$$y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2} \quad (11)$$

No segundo caso, onde $m_1 = m_2 = m$, a solução geral é dada por:

$$y = c_1x^m + c_2x^m \cdot ln\,x \quad (12)$$

Por fim, para o terceiro caso, $m_1 = \alpha + i\beta$ e $m_2 = \alpha - i\beta$, a solução geral é:

$$y = x^{\alpha}[c_1\,cos(\beta\,ln\,x) + c_2\,sin(\beta\,ln\,x)] \quad (13)$$

O sistema massa-mola é um dos problemas mais clássicos da Física, consiste de um objeto de massa *m* qualquer vinculado a uma mola de rigidez *k*. O objeto sofre o efeito de uma força ou conjunto de forças fazendo com que se desloque, e junto com ele a mola, que pode aumentar ou diminuir seu comprimento, e experimentalmente, verifica-se que a mola exerce uma força restauradora no corpo de massa *m*, e a intensidade dessa força (supondo movimento unidimensional) é dada pela equação a seguir, conhecida como Lei de Hooke:

$$F(x) = -kx \quad (14)$$

O sinal negativo na Lei de Hooke indica que a força elástica, como já foi dito, é uma força restauradora, ou seja, a força F(x) sempre irá se opor ao movimento, portanto, se for dado um referencial inercial, quando o deslocamento da mola é negativo, a força elástica será no sentido positivo do eixo, e vice-versa.

Para o estudo do sistema massa-mola é imprescindível recordar a segunda lei de Newton, publicada em seu livro *Philosophiae naturalis principia mathematica*:

Definição 3: A variação do momento é proporcional à força impressa, e tem a mesma direção da força. Matematicamente (para uma massa *m* constante), temos:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \tag{15}$$

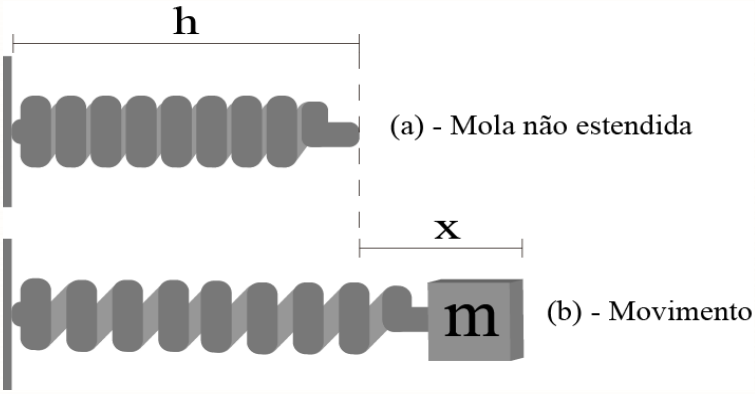

Figura 1- Representação idealizada de um sistema massa-mola.

Fonte: Autor

Onde $\vec{v}$ é a velocidade do corpo, e $\vec{a}$ a sua aceleração, que são respectivamente as derivadas de primeira e segunda ordem da posição *x* em (14).

Então, vamos supor que o sistema da figura (1.a) está em repouso. Teremos:

$$m\vec{a} = 0 \therefore a = 0 \tag{16}$$

Agora, suponha uma força externa que imprime uma aceleração ao bloco de massa m, o deslocando a uma distância x do ponto inicial e após cessa sua ação, como mostra a figura (1.b). Caso não haja outras forças de amortecimento, a única força que irá atuar sobre o corpo é a força restauradora da mola que é contrária ao movimento, logo, de acordo com a segunda lei de Newton, temos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{17}$$

Dividindo ambos os membros por m:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \tag{18}$$

Já que consideramos um movimento unidimensional do sistema, a notação vetorial foi retirada.

Por fim, chegamos na equação abaixo que, pelas definições que vimos no capítulo anterior, é uma equação diferencial linear ordinária de segunda ordem, e matematicamente representa o movimento harmônico simples (MHS).

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{19}$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A partir da teoria mostrada até aqui iremos buscar uma equação que modele o sistema massa-mola com uma massa m variável. Partiremos da equação (19). Se tivermos uma massa variável com o tempo, a derivada segunda da posição (ou deslocamento) x precisara ser reescrita através da regra da cadeia, da seguinte forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{dm^2}\left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \frac{dx}{dm}\frac{d^2m}{dt^2} \tag{20}$$

Portanto, a equação (19) fica da seguinte forma:

$$m\left(\frac{dm}{dt}\right)^2\frac{d^2x}{dm^2} + m\frac{d^2m}{dt^2}\frac{dx}{dm} + kx = 0 \tag{21}$$

Se supormos a variação temporal da massa como $m(t) = At^2$, temos:

$$\frac{dm}{dt} = 2At \Longrightarrow \left(\frac{dm}{dt}\right)^2 = 4A^2t^2 \Longrightarrow \frac{d^2m}{dt^2} = 2A \qquad (22)$$

Substituindo (22) em (21) e simplificando, obtemos:

$$m^2\frac{d^2x}{dm^2} + \frac{m}{2}\frac{dx}{dm} + \frac{Bm^2}{4A}x = 0 \qquad (23)$$

Fazendo a substituição $x(m) = m^a z(m)$, reescrevemos novamente as derivadas como:

$$\frac{dx}{dm} = am^{a-1}z(m) + m^a z'(m) \qquad (24)$$

$$\frac{d^2x}{dm^2} = m^a z''(m) + 2am^{a-1}z'(m) + a(a-1)m^{a-2}z(m) \qquad (25)$$

Substituindo (24) e (25) em (23), e depois dividindo por m^a, a equação torna-se:

$$m^2z''(m) + \left[2a + \frac{1}{2}\right]mz'(m) + \left[a^2 - \frac{a}{2} + \frac{k}{4A}\right]z(m) = 0 \qquad (26)$$

Nota-se que a equação (26) é uma equação de Cauchy-Euler, já que a, k, e A são constantes.

A fim de evitar confusão do *m* utilizado para representar a massa com o *m* utilizado para representar as raízes da equação de Cauchy-Euler, suporemos uma solução da forma $z = m^j$. Assim, a equação característica descrita por (10) é:

$$j^2 + \left(2a - \frac{1}{2}\right)j + \left(a^2 - \frac{a}{2} + \frac{k}{4A}\right) = 0 \qquad (27)$$

Calculando o discriminante, temos que:

$$\Delta = -\frac{k}{A} + \frac{1}{4} \qquad (28)$$

Então,

$$j = -a + \frac{1}{4} \pm \sqrt{-\frac{k}{4A} + \frac{1}{16}} \tag{29}$$

Como a fração $\frac{k}{4A}$ é um valor positivo, teremos três casos possíveis, assim:

Se $\frac{k}{4A} < \frac{1}{16}$, a raiz se torna positiva e temos:

$$j_1 = -a + \frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{k}{4A} + \frac{1}{16}}$$
$$j_2 = -a + \frac{1}{4} - \sqrt{-\frac{k}{4A} + \frac{1}{16}} \tag{30}$$

Se $\frac{k}{4A} = \frac{1}{16}$,

$$j_1 = j_2 = -a + \frac{1}{4} \tag{31}$$

Se $\frac{k}{4A} > \frac{1}{16}$,

$$j_1 = -a + \frac{1}{4} + i\sqrt{\frac{k}{4A} - \frac{1}{16}}$$
$$j_2 = -a + \frac{1}{4} - i\sqrt{\frac{k}{4A} - \frac{1}{16}} \tag{32}$$

Aqui, percebemos que $\alpha = -a + \frac{1}{4}$ e $\beta = \sqrt{\frac{k}{4A} - \frac{1}{16}}$. Portanto, a solução para o primeiro caso é

$$z(m) = c_1 m^{j_1} + c_2 m^{j_2} \tag{33}$$

Voltando à variável inicial,

$$x(m) = m^a z(m) \Longrightarrow x(t) = (At^2)^a z(At^2) \tag{34}$$

Isto é,

$$x(t) = (At)^{2a}\left[c_1(At)^{2j_1} + c_2(At)^{2j_2}\right] \tag{35}$$

Similarmente, as soluções para o segundo e terceiro caso são, respectivamente, da seguinte forma:

$$x(t) = (At)^{2a}\left[c_1(At)^{2j_1} + c_2(At)^{2j_2} \cdot 2\,ln(At)\right] \tag{36}$$

$$x(t) = (At)^{\frac{1}{2}}[c_1\,cos(2\beta\,ln(At)\} + c_2\,sin(2\beta\ln At)] \tag{37}$$

As equações (35), (36) e (37) expressam a posição do bloco em qualquer instante de tempo e são, portanto, as soluções analíticas para o problema proposto.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Portanto, de acordo com o aporte teórico utilizado e os resultados obtidos, podemos concluir que o uso das equações diferenciais é bastante eficiente para dar respostas a problemas propostos pela Física. Além disso, a equação de Cauchy-Euler mostrou-se útil para a modelagem do sistema massa-mola com massa variável, possibilitando a melhor compreensão do movimento desse sistema de tamanha importância para o estudo da física e dos movimentos harmônicos, ainda em três possíveis casos. Assim sendo, os objetivos estabelecidos foram alcançados, ou seja, este trabalho pode servir de base para uma revisão teórica de equações diferenciais, e, principalmente, para estudar características do sistema massa-mola com um modelo matemático de resolução razoável e bastante próximo à realidade.

Também podemos concluir que ao fazer suposições diferentes para variação da massa, ou ainda, supor uma rigidez variável para a mola, pode-se obter outros tipos de equações diferenciais, tornando possível obter outros modelos para o mesmo sistema, o que pode ser bastante útil, dependendo do tipo de análise que está sendo buscada.

REFERÊNCIAS

BARATA, J. C. A. **Curso de Física - Matemática**. Departamento de Física-Matemática da Universidade de São Paulo, Versão de 2018, v.17.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

CAJORI, Florian. **A history of mathematics**. The MacMillan Company, 1909.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física: Mecânica**. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

KUPFERMAN, Raz. **Ordinary Differential Equations**. Institute of Mathematics - The Hebrew University: [s. n.], 26/06/2012. Disponível em: http://www.ma.huji.ac.il/~razk/iWeb/My_ Site/Teaching_ files/ODEs.pdf. Acesso em: 14 abr. 2019.

MACHADO, Kleber Daum. **Equações diferenciais aplicadas à física**. Editora UEPG, 2004.

NÓBREGA, Danielle Dantas. **Equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações**. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó - RN, 2016. Disponível em: https://monografias.ufrn.br/jspui/handle/123456789/2777. Acesso em: 04 out. 2018

NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de Física Básica**, Vol. 1 (4ª edição). São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

TENNENBAUM, Morris; POLLARD, Harry. **Ordinary differential equations**: an elementary textbook for students of mathematics, engineering, and the sciences. 1985.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, c2001. 2 v. ISBN 8534612919 (v.1).