



EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E CAMPOS DE DIREÇÃO COM A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA

Gabriela Freitas Carvalho ¹
Vitor Gomes Melo Barra ²
Otávio Paulino Lavor ³

RESUMO

As equações diferenciais se aplicam a diversas áreas do conhecimento e a compreensão de suas soluções é fundamental na interpretação dos fenômenos modelados por tais equações. Neste sentido, neste trabalho, é proposto a apresentação das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com a utilização do software GeoGebra, em que são plotados os campos de direção. Após discutir as soluções das equações, os campos são mostrados graficamente e é possível ter uma visualização da solução, bem como o domínio em que tal solução é válida. Dessa forma, pode-se ver o GeoGebra é um software que pode ser acrescentado às aulas de equações diferenciais gerando mais interação entre a solução e a interpretação do fenômeno modelado.

Palavras-chave: GeoGebra, Software, Campos de direção.

INTRODUÇÃO

A investigação no ensino e aprendizagem de equações diferenciais faz-se necessário quando se compreende que este conteúdo tem diversas aplicações. Uma intervenção que pode ser realizada é a inserção de recursos tecnológicos, como o GeoGebra.

A potencialidade da utilização dos computadores no ensino dos tópicos avançados da Matemática no que se refere à aprendizagem é indicada por Tall quando diz:

[...] utilizar os computadores para visualizar conceitos matemáticos de maneira útil no Cálculo e em Análise. A utilização criativa dos softwares, que plotam gráficos, e das calculadoras gráficas tem permitido aos estudantes lidar de maneira significativa com conceitos como a diferenciação por meio da noção de “retidão local”, integração por meio da soma de áreas, e resolver equações diferenciais (de 1.^a ordem) por meio da visualização da construção das curvas solução com um gradiente dado. Durante esse tempo, me tornei cada vez mais consciente do conceito imagem limitado oferecido por gráficos plotadores de gráficos que só desenhar gráficos razoavelmente suaves dados por fórmulas (TALL, 1993, p. 2, tradução nossa).

¹ Graduanda do Curso de Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Rural do Semi Árido - Ufersa, gabriela.carvalho@alunos.ufersa.edu.br;

² Graduando do Curso de Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Rural do Semi Árido - UF, vitor.barra@alunos.ufersa.edu.br;

³ Professor orientador: Doutor em Engenharia Elétrica. Docente do Departamento de Ciências Exatas e Naturais do Centro Multidisciplinar de Pau dos Ferros – Ufersa, otavio.lavor@ufersa.edu.br.



Sobre o conceito de equações diferenciais em virtude da importância dele para as outras áreas de conhecimento, Boyce e Diprima afirma que:

A importância das equações diferenciais está no fato de que mesmo as equações mais simples correspondem a modelos físicos úteis, como por exemplo, o decaimento de substâncias radioativas, o comportamento de sistemas de massas e molas e o comportamento de circuitos elétricos (BOYCE; DIPRIMA, 1999, prefácio).

Segundo a definição de Beltrão (2009) para o termo “cálculo”, na visão matemática, são as ferramentas de análise das variações ocorridas em fenômenos com alguma natureza física, ou palpável. Sendo que o desenvolvimento do cálculo esteve intimamente relacionado ao avanço de pesquisas das chamadas ciências naturais, especialmente a Física. Os nomes relacionados ao início do desenvolvimento do cálculo são Isaac Newton (1642- 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). [Boyer (1974)].

Nesse sentido os campos de direções são muito úteis, pois possibilitam analisar as tendências de uma equação diferencial de maneira bem clara. Campos de direção são meios de analisar uma tendência sem achar uma solução determinada. Usando da definição de derivada, encontrada em Boyce e DIPRIMA (2002):

Definição 1- Se $y = y(x)$ é uma função derivável em um intervalo aberto $I = (a, b)$ e seja $x_0 \in I$, então $y'(x_0)$ que apresenta a inclinação da reta tangente t ao gráfico de $y = y(x)$, no ponto $(x_0, y'(x_0))$.

Sendo assim quando não é obtida a solução da diferencial há como recurso usar um diagrama auxiliador. O campo de direções da equação diferencial é um gráfico da função g de forma que para cada ponto $Q = (x, y)$ do domínio, g apresenta uma direção de qualquer solução y que passe pelo ponto $Q = (x, y)$. Direção essa representada por um segmento de reta cujo coeficiente angular é o valor da função g naquele ponto $Q = (x, y)$ e cuja origem do segmento é o ponto $Q = (x, y)$.

De acordo com o livro Boyce, campos de direção são ferramentas valiosas no estudo de soluções de equações diferenciais da forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (1)$$

em que f é uma função dada de duas variáveis, t e y , algumas vezes chamada de função taxa.

A função diferencial $y=y(t)$ será chamada uma solução de (1) em um intervalo aberto I de \mathbb{R} se e somente se y e sua derivada y' satisfazem (1).

Um campo de direção para equações de forma geral pode ser constituído calculando-se f em cada ponto de uma malha retangular. Em cada ponto da malha desenha-se um pequeno



segmento de reta é tangente ao gráfico de uma solução contendo aquele ponto. Um campo de direções desenhado em uma malha razoavelmente fina fornece uma boa ideia de comportamento global das soluções de uma equação diferencial. Basta, em geral, uma malha contendo algumas centenas de pontos. A construção de um campo de direções é, muitas vezes, um primeiro passo bastante útil na investigação de uma equação diferencial.

O computador pode contribuir para o desenvolvimento, visto que a utilização de um software adequado é possível desenvolver as atividades. A potencialidade da utilização dos computadores no ensino dos tópicos avançados da Matemática no que se refere à aprendizagem é indicada por Tall quando diz:

[...] utilizar os computadores para visualizar conceitos matemáticos de maneira útil no Cálculo e em Análise. A utilização criativa dos softwares, que plotam gráficos, e das calculadoras gráficas tem permitido aos estudantes lidar de maneira significativa com conceitos como a diferenciação por meio da noção de “retidão local”, integração por meio da soma de áreas, e resolver equações diferenciais (de 1.^a ordem) por meio da visualização da construção das curvas solução com um gradiente dado. Durante esse tempo, me tornei cada vez mais consciente do conceito imagem limitado oferecido por gráficos plotadores de gráficos que só desenhar gráficos razoavelmente suaves dados por fórmulas (TALL, 1993, p. 2, tradução nossa).

Nessa perspectiva, um computador, munido de um software adequado, pode ser utilizado “para propiciar imagens que auxiliarão no desenvolvimento de tópicos do Cálculo e da Análise” (ALMEIDA, 2013, p. 114).

O principal objetivo do trabalho é apresentar uma abordagem de ensino para equações diferenciais ordinária de 1^o ordem com a utilização do computador, usando o software GeoGebra. O GeoGebra foi escolhido pelo fato de ser um software de Geometria Dinâmica gratuito que possui uma interface simples e intuitiva, possibilitando assim a construção das atividades que unem a Geometria, a Álgebra e o Cálculo. Apresenta relevantes contribuições pela dinâmica de sua funcionalidade. Na realização das pesquisas, utilizamos o Geogebra para análise e desenvolvimento das equações diferenciais ordinárias de 1^o ordem, nos quais pretendemos explorar conceitos tais como: observação dos esboços dos gráficos, o comportamento das funções, pontos de máximo e mínimo, vértice da parábola, raízes da função, intervalos, concavidade da parábola e parâmetros.

Esse software de Geometria Dinâmica foi escolhido porque além de ser gratuito possui interface simples e intuitiva, e, possibilita o desenvolvimento de atividades que unem a Geometria, a Álgebra e o Cálculo. Esse software possui todas as ferramentas e comandos que possibilitam a construção dos campos de direção. Com isso, pretende-se destacar que o



GeoGebra pode ser utilizado na introdução de conceitos avançados do Cálculo Diferencial e Integral. O que motivou a forma de abordagem por meio da exploração dos campos de direção associado a uma equação diferencial, foi tratar-se de uma abordagem qualitativa e possibilitar o estudo no registro de representação geométrico (ARTIGUE, 1994). Além disso, porque livros de Cálculo, editados atualmente, como Stewart (2005) e Anton, Bivens e Davis (2007) indicam o uso da abordagem por meio dos campos de direção.

METODOLOGIA

A metodologia utilizada nesta pesquisa, é o método de pesquisa bibliográfica, onde consiste na utilização de equações diferenciais ordinárias de 1º ordem, no intuito de mostrar como se comportam no software GeoGebra. Espera-se que este trabalho possa servir como suporte para um melhor entendimento do que foi escrito e aplicado que permeiam a profissão docente e que possa suscitar novas discussões que propiciem uma valorizada no trabalho em questão das equações diferenciais ordinárias de 1º ordem no campo de direção com a utilização do software, não um específico, mas um que seja de escolha pessoal e de melhor desempenho.

Koche entende que uma pesquisa com esse viés pode ser realizada para fins como:

ampliar o grau de conhecimentos em uma determinada área, capacitando o investigador a compreender ou delimitar melhor um problema de pesquisa; b) para dominar o conhecimento disponível e utilizá-lo como base ou fundamentação na construção de um modelo teórico explicativo de um problema, isto é, como instrumento auxiliar para a construção e fundamentação de hipóteses. (KOCHE, 1997, p. 122)

Inicialmente foram feitas pesquisas, que consistia na leitura de materiais para reconhecimento de objetos. As informações relacionadas à pesquisa, foram retiradas de em livros, teses, dissertações, anais etc.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Inicialmente será apresentado comandos e ferramentas, que estão disponíveis no *software* GeoGebra possibilitando a construção de campos de direções associado a uma equação diferencial ordinária $y' = f(x, y)$, no seguinte conjunto do plano.

A construção de um campo de direções é feita através do esboço de um conjunto dos segmentos de retas com um dos extremos em (x, y) e inclinação igual a $f(x, y)$. No caso do nosso artigo vamos utilizar as variáveis (v, t) .



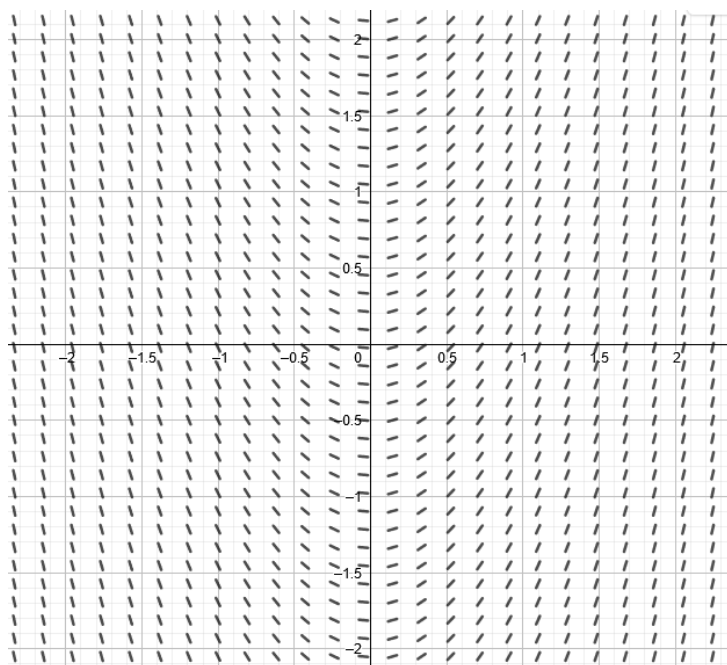
A primeira ferramenta a ser apresentada é a do *Campo de Entrada* na qual é possível o usuário informar a sentença $f(x, y)$. Após isso o software irá esboçar o campo de direções.

Em seguida é só clicar no ícone Campo de Entrada clique em Janela de Visualização onde o objetivo é de posicionar o campo. Após clicar irá aparecer uma janela, com dois campos: Legenda e Objeto Vinculado. É no campo legenda que é colocada a identificação em relação a esse campo. Por exemplo, adotamos nesse artigo a seguinte legenda: “Informe o segundo membro da equação $y' = f(x, y)$. Já no campo Objeto Vinculado, é necessário selecionar um objeto que já foi construído no GeoGebra, onde esse será associado ao Campo de Entrada e irá receber como parâmetro o que foi informado nesse Campo. Que no caso, o objeto é uma função real com duas variáveis.

$$f(x, y) = x + y \quad (2)$$

O comando a ser apresentado é “*Segmento [<ponto>, <ponto>]*” (HOHENWARTER, 2009, p.49) que cria um segmento de reta onde os extremos são as coordenadas dos pontos informados no comando. Para incluir um ponto no GeoGebra é necessário incluir, entre parênteses, a abscissa e a ordenada do ponto separadas por vírgulas.

Figura 1: O esboço do campo de direções associados à equação diferencial.

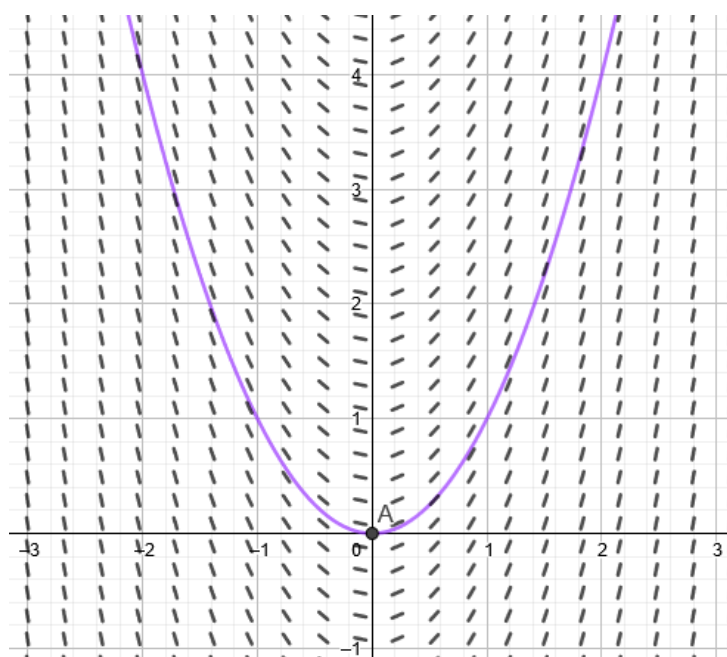


Fonte: Autores



Os segmentos de reta refere-se a direção da curva solução em certo ponto. Esse campo auxiliará a visualizar as curvas solução da equação diferencial. Exemplificando, a curva solução no ponto (0,0) associado à equação $y'=2x$:

Figura 2: Representação da curva solução da equação diferencial no ponto (0,0).



Fonte: Autores

A visão das EDO's através de campo de direções proporciona significado à solução, auxiliando a uma melhor compreensão.

O terceiro comando é o comando Sequência. De acordo com o manual do software (HOHENWARTER, 2009, p. 60–61), para utilizá-lo é necessário digitar o seguinte no Campo Entrada: “Sequência[<Expressão>, <Variável>, <Valor inicial>, <Valor Final>, <Incremento>]”.

Após apresentados todas as ferramentas e comandos tem-se como resultado os elementos na *Janela de Visualização*: o *Campo de Entrada* para que o usuário informe a sentença da função de duas variáveis relacionada à equação diferencial ordinária, e o campo de direções, relacionado a essa equação diferencial ordinária, no seguinte conjunto do plano cartesiano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2 \text{ e } -2 \leq y \leq 2\}$.

Os exemplos encontram-se no capítulo introdutório do livro de Boyce e Di Prima (1999). O primeiro exemplo está na seção “Um objeto em queda”.



Temos a seguinte situação: suponha que um objeto está caindo na atmosfera, perto do nível do mar. Esse movimento é governado pela segunda Lei de Newton, que diz que o módulo da força resultante sobre um objeto é igual ao produto da massa do objeto pela aceleração.

$$F_{resultante} = ma \quad (3)$$

Visto que m é a massa do objeto em quilogramas (em kg), a aceleração metros por segundo ao quadrado (m/s^2) e F a sua força resultante que está agindo sobre o objeto, em newtons (N). É notório que aceleração (a) e a velocidade do objeto (v) estão relacionados, obtendo assim a seguinte formula:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (4)$$

Dessa forma, a equação (2) pode ser reescrita na seguinte forma

$$F_{resultante} = m \frac{dv}{dt} \quad (5)$$

Figura 3: Figura de forças agindo num objeto em queda livre.



Fonte: Boyce e Di Prima (1999,p.2)

A seguir, uma das forças que está agindo sobre o objeto é a força peso, do qual o módulo é dado por mg (tendo em consideração que g foi determianda como aproximadamente igual a $9,8 m/s^2$, próximo a superfície da Terra). A outra força existente é devido à resistencia do ar, onde essa é mais difícil de se modelar. Admitimos então que a resistencia do ar seja proporcional à velocidade do objeto. Sendo assim, a força de resistencia do ar tem magnitude igual a $\gamma \cdot v$, em que γ é uma constante chamada de resistencia do ar, que pode variar de acordo com o objeto, e v como sendo a velocidade do objeto em queda livre.

Para demonstrar, vamos considerar que a massa do nosso objeto é igual a $10 kg$, $\gamma = 2 kg/s$ e a gravidade $9,8 m/s^2$. Logo pela equação (5) tem-se que:

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5} \quad (6)$$

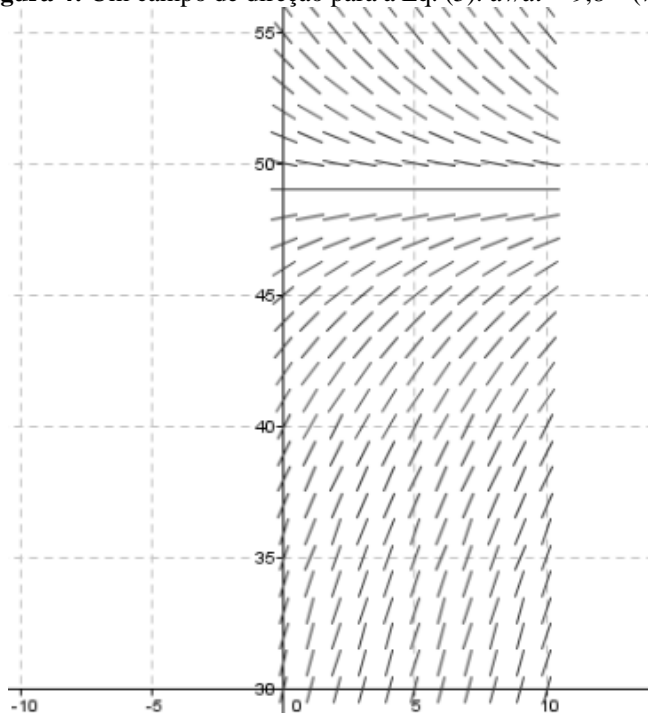


Na equação (6), $f(t, v) = 9,8 - \frac{v}{5}$. Apesar de não se ter conhecimento acerca à curva solução, pode-se tirar algumas conclusões a cerca de como: se o ponto (t_0, v_0) for pertencente à curva solução, logo $\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v_0}{5}$. Isso quer dizer que a inclinação da reta tangente à curva solução em (t_0, v_0) é $9,8 - \frac{v_0}{5}$. Na exemplificação feita nesse artigo, é possível deduzir que independentemente do valor de t , o valor da inclinação no ponto vai ser o mesmo. Diante disso, o campo de direções relacionados à equação diferencial irá possuir nos pontos do plano, onde as abscissas são iguais, segmentos com a mesma inclinação.

Para demonstrar irá ser fixado dois valores de v : se $v_I = 30$ então $\frac{dv}{dt} = 3,8$; e se $v_I = 49$ então $\frac{dv}{dt} \cong 0$.

Com a aplicação que foi construída neste artigo, foi possível esboçar o campo de direções da equação (5) no conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 10 \text{ e } 30 \leq y \leq 49\}$. Para não ter uma representação muito “poluída” foi preciso alterar alguns parametros: o primeiro a ser alterado é o tamanho de cada um dos segmentos que compõe o campo de direções, logo não ajudaria no estudo pretendido. Em razão ao conjunto que será representado, os valores iniciais e finais precisaram ser modificados e o incremento também, que antes era 0.2 u passa a ser 1 u. c..

Figura 4: Um campo de direção para a Eq. (5): $dv/dt = 9,8 - (v/5)$.



Fonte: Autores.



A partir da representação do campo de direções é possível tirar outras conclusões qualitativas com relação ao comportamento das soluções da EDO's. A primeira é que a velocidade de queda do objeto fosse menor que o valor estabelecido, logo os coeficientes angulares são positivos, e a velocidade de queda aumenta enquanto o objeto cai. Isso pode ser observado na figura 4, em valores de v menor que 49 m/s . No caso de coeficiente angulares das retas que compoem o campo de direção serem negativos, no caso dos valores de v maior que 49 m/s , significa que a velocidade do objeto em queda vai diminuindo.

Pela observação, no campo de direções para $v = 49\text{ m/s}$, os segmentos parecem formar uma reta. Considerando a função constante v , dada pela sentença $v(t) = 49\text{ m/s}$. Como a solução não varia com o tempo, essa é a chamada solução de equilíbrio (BOYCE, DI PRIMA, 1999, p. 3). A solução corresponde a um perfeito equilíbrio entre a gravidade e a resistência do ar.

De fato, com o campo de direções representado (Figura 3), é possível verificar que todas as outras soluções, da equação diferencial vista, parecem convergir para a solução de equilíbrio, ou são atraídas para ela, quando t tende ao infinito.

No entanto, em ambos os problemas, a solução de equilíbrio é bastante importante para a compreensão do comportamento das soluções da equação diferencial dada (BOYCE, DI PRIMA, 1999, p.6). Outra recomendação é que após evidenciar a maneira analítica de como resolver a equação diferencial linear de 1ª ordem, deve-se esboçar junto campo de direções, uma das soluções da equação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo foi apresentado o uso das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem nos campos de direções com a utilização do software GeoGebra. Contudo, é vantajoso a utilização do computador para o ensino desta área. A partir da utilização do GeoGebra, conseguimos alcançar o objetivo do trabalho, que era apresentar uma abordagem de ensino para equações diferenciais ordinárias de 1º ordem com a utilização do computador.

O GeoGebra é uma ferramenta que agrega metodologia e conhecimento, e sua prática apresenta excelentes resultados no estudo da matemática e também da física. Esperamos que nossa pesquisa incentive professores, instituições e até mesmo outras pessoas a colocar em pratica o uso de software no processo de aprendizagem na matemática, tornando mais significativo e prazeroso.



REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. V. Um Panorama de Artigos sobre a Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral na Perspectiva de David Tall. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. Cálculo. Volume I. Tradução Claus Ivo Doering. Bookman, 8ª ed. PortoAlegre: Bookman, 2007.

ARTIGUE, M. Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. In: BIEHLER, R. E. A. (Ed.). Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline. Netherlands: KluwerAcademicPublishers, p.27 – 39, 1994.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. Tradução Valéria de Magalhães Iorio. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. Tradução de Horácio Macedo. 6. ed. rev. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

BOYER, C. B. História da Matemática. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Editora: Edgar Blücher, Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

HOHENWARTER, J.; HOHENWARTER, M. Ajuda GeoGebra: Manual Oficial da Versão 3.2. Tradução e adaptação para português (de Portugal) de António Ribeiro. 2009. Disponível em: < <https://pt.slideshare.net/cluz01/manual-geogebra-32>> Acesso em 05/11/2020.

KÖCHE, J. C. Fundamentos de metodologia científica: teoria da ciência e prática da pesquisa. 15. Ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 1997.

STEWART, J. Cálculo. Vol. II. 4 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005.



TALL, D. Real Mathematics, Rational Computers and Complex People. In: ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE ON TECHNOLOGY IN COLLEGE MATHEMATICS TEACHING, 5., 1993, Proceedings, Addison-Wesley, p. 243 – 258, 1993.