



## TRIGONOMETRIA: UMA ANÁLISE DOS RECURSOS CONCRETOS EM LIVROS DIDÁTICOS.

Willamy Francelino de Oliveira <sup>1</sup>  
Manoel Arthur Barbosa Correia <sup>2</sup>

### RESUMO

O presente artigo é um estudo que teve como objetivo analisar/discutir os principais recursos concretos/manipuláveis encontrados nas atividades e na abordagem da trigonometria em três coleções de livros didáticos do 1º ano do Ensino Médio onde era feita uma introdução da trigonometria no triângulo retângulo e no 2º ano do Ensino Médio onde se inicia o estudo da trigonometria no círculo. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõe que os estudantes utilizem tecnologias (recursos), como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, focando assim na importância na familiarização com o recurso o mais cedo possível. Foi observado que em sua grande maioria os livros didáticos utilizam a calculadora e a tabela trigonométrica com principal recurso ao trabalhar a trigonometria, algumas possibilidades de abordagem com uso de softwares e um único caso onde ainda é utilizado a régua e o transferidor.

**Palavras-chave:** Livro didático, Recurso concreto, Trigonometria.

### INTRODUÇÃO

O processo de ensino e aprendizagem da trigonometria é desafiador e requer tanto do professor quanto do aluno uma atenção especial. A maneira com que o professor de matemática estudou trigonometria durante a educação básica e superior tende a contribuir na abordagem futura que irá ser construída e a formação inicial do professor é importantíssima tendo em vista que tipo de reprodução do conteúdo será realizada durante as aulas.

Diante das dificuldades encontradas durante a educação básica (Bezerra et al., 2012) discutem no que diz respeito ao ensino da trigonometria que acontece no Ensino Médio, o aluno que sai dos anos finais do Ensino Fundamental se depara com um conteúdo jamais visto antes, que requer uma abstração maior, que precisa de uma articulação de alguns conteúdos estudados anteriormente, em alguns casos sua abordagem é construída de forma bem tradicional e abstrata dificultando a compreensão do aluno ao longo do processo fazendo com

---

<sup>1</sup> Graduado do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE. Pós-Graduado em Tópicos Especiais em Matemática pela Faculdade Dom Alberto, [willamyufpe@gmail.com](mailto:willamyufpe@gmail.com).

<sup>2</sup> Graduado em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Pernambuco - IFPE. Graduado e Pós-Graduando em Gestão Pública pela FAEL - Faculdade da Lapa. [arthurbc89@gmail.com](mailto:arthurbc89@gmail.com).



que cada vez mais sua interação durante as aulas não aconteça, prologando assim suas dúvidas e dificuldades.

Nesse sentido, os recursos concretos/manipuláveis podem ser introduzidos durante a abordagem da trigonometria minimizando possíveis dificuldades de compreensão do objeto estudado, facilitando a interação aluno-professor, tornando a abordagem do conteúdo mais prática e lúdica. Os principais recursos analisados nesta pesquisa será a calculadora científica e a tabela trigonométrica para calcular ângulos não notáveis e o uso de softwares pra o estudo de funções trigonométricas.

## **METODOLOGIA**

A metodologia desta pesquisa foi dividida em três momentos, em um primeiro momento foram escolhidas as coleções a serem escolhidas/analizadas do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) do ano de 2019, as coleções escolhidas foram Coleção Conexões com a Matemática, Coleção Contato Matemática e Coleção Matemática Contexto e Aplicações. O objeto matemático foco de nossa observação foram as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente).

Em um segundo momento foi observado durante a abordagem dos tópicos de conteúdos da trigonometria quais recursos estavam sendo estudados, como estava sendo construído a abordagem com esses recursos e quais eram as principais indicações do livro para utilização do recurso. Por fim, os recursos foram observados durante as atividades propostas pelas coleções, os principais pontos foram: em que situação o aluno utilizava esse recurso, quais recursos tinha sua recomendação mais frequente e se existia algum caso que mais de um recurso dessa conta do exercício.

## **REFERENCIAL TEÓRICO**

Os recursos didáticos concretos têm sido objeto de estudo em várias pesquisas na educação matemática, em particular, no ensino da trigonometria os principais recursos utilizados atualmente se baseiam no uso de softwares de geometria dinâmica e em alguns casos a calculadora científica.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõe que os estudantes utilizem tecnologias (recursos), como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Destacando a importância do recurso das tecnologias digitais e



aplicativos para a investigação matemática, de modo que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos ao longo da educação básica (BNCC, 2017).

Bezerra et.al (2012) aponta a importância de o professor de matemática trabalhar conteúdo da trigonometria a partir dos recursos que estejam disponíveis, pois é esse trabalho articulado da teoria e da prática (manipulação desses objetos) que o aluno conseguirá dar maior significado ao conhecimento aprendido.

Os recursos ou materiais didáticos concretos têm sido objeto de estudo em várias pesquisas na educação matemática. Lorenzato (2006) define o material didático como sendo todo e qualquer instrumento útil que possa ser usado no processo de ensino-aprendizagem, já o material didático concreto diz respeito ao que o aluno poderá tocar e manipular e ainda, numa interpretação mais ampla, incluir imagens gráficas (LORENZATO, 2006).

Para (Lopes, 2011) o recurso provoca o interesse no aluno pela seu dinamismo, a representação gráfica no caso da trigonometria e a movimentação na tela proporcionam no aluno uma visualização que não pode ser percebida na lousa de forma estática, esse tipo de situação pode desencadear no professor as múltiplas possibilidades de representação da matemática, facilitando as construções, análises, observações de regularidades e ao estabelecer relações entre os objetos.

## **RESULTADOS E DISCUSSÃO**

As três coleções trabalham durante as atividades e explicações do conteúdo alguns recursos concretos. Chamaremos de C1 a coleção Conexões com a Matemática, C2 a Coleção Contato Matemática e C3 Coleção Matemática Contexto e Aplicações.

Inicialmente o recurso mais utilizado durante as coleções é a calculadora, ela aparece na coleção C1 sendo trabalhada durante algumas atividades de trigonometria contudo não é utilizada ainda para calcular ângulos não notáveis. Uso da calculadora como recurso obrigatório para calcular ângulos não notáveis surge após uma breve explicação de como fazer o manuseio correto, em seguida é solicitado alguns "experimentos" do seno e cosseno com 4 casas decimais para obter uma aproximação da tangente.



Figura 1: Exemplo do uso da calculadora coleção 01.



Calculadora com as teclas "sin", "cos" e "tan". Observe que também há as funções "sin<sup>-1</sup>", "cos<sup>-1</sup>" e "tan<sup>-1</sup>", que fornecem a medida do ângulo, a partir do seno, do cosseno ou da tangente dele, conforme veremos no exercício resolvido R6.

**Exemplos**

- a) Vamos calcular  $\text{sen } 53^\circ$  na calculadora. Primeiro, verificamos se a opção "graus" está selecionada para a calculadora reconhecer 53 como  $53^\circ$ . Em geral, essa opção é indicada por **deg**, que significa "grau" (grau, em inglês, é *degree*). Em seguida, digitamos: **5** **3** **sin** **=**

Fonte: Coleção 01 do 1º ano, página 245.


A coleção C2 utiliza a calculadora ao longo dos exercícios propostos, faz uma explicação passo a passo de como calcular um ângulo não notável e em seguida faz um teste com os alunos propondo o cálculo de alguns ângulos.

Figura 2: Uso da calculadora coleção 02.

**44. Calculadora**

Para o cálculo do seno ou do cosseno de um ângulo agudo, além da tabela trigonométrica, podemos utilizar uma calculadora científica. Veja o procedimento utilizado para o cálculo do seno e do cosseno de  $55^\circ$ .

Inicialmente pressionamos a tecla seno: **sin**



Em seguida, inserimos o número 55, correspondente a  $55^\circ$ : **5** **→** **5**



Por fim, pressionamos **=** para obter o valor de  $\text{sen } 55^\circ$ .



*Caso não haja calculadoras para todos os alunos, reúná-os em grupos para que possam realizar a atividade ou, então, veja a possibilidade de trazer algumas calculadoras para a sala de aula.*

Fonte: Coleção 02 do 1º ano, página 254.

Diferentemente das coleções C1 e C2 que fazem o uso da calculadora ao longo dos exemplos e exercícios, articulando o recurso com o conteúdo estudado, a coleção C3



apresenta o recurso no final do capítulo. A coleção dedica uma página inteira para falar brevemente da história do seu surgimento, a evolução do cálculo e a utilização da calculadora científica para descobrir senos e cossenos de todos os ângulos de forma rápida.

Figura 3: Uso da calculadora coleção 03.

### A evolução do cálculo dos senos e cossenos

Com uma calculadora científica você obtém facilmente senos e cossenos de qualquer ângulo. Por exemplo, para saber o cosseno do ângulo de  $20^\circ$  apertamos a tecla "cos" da calculadora, digitamos o número "20", depois a tecla "=" e aparece o número 0,93969...

#### Fique atento!

Observe se a calculadora científica está aceitando valores de graus; geralmente essa função já está selecionada. Caso o valor obtido para  $\cos 20^\circ$  não seja igual ao indicado, verifique no modo (mode) de funcionamento da calculadora se a opção grau (degree) está selecionada.

No século XVIII, com o Cálculo de Newton e Leibniz em pleno desenvolvimento, um matemático inglês chamado Brook Taylor descobriu que funções podem ser aproximadas por polinômios. Por exemplo, para calcular  $\cos x$  quando  $x$  é um número real relativamente pequeno usamos o Polinômio de Taylor, que para a função cosseno é:



Detalhe de uma calculadora científica.

Fonte: Coleção 01 do 1º ano, página 256.

A tabela trigonométrica aparece nas coleções C1 e C2 como um suporte para os alunos, as coleções explicam basicamente que existe diversos ângulos e que nem todos eles devem ser “aprendidos e/ou decorados” e por isso tanto a calculadora quanto a tabela trigonométrica poderiam ser utilizadas para o cálculo desses ângulos.



Figura 4: Tabela trigonométrica.

## Tabela trigonométrica

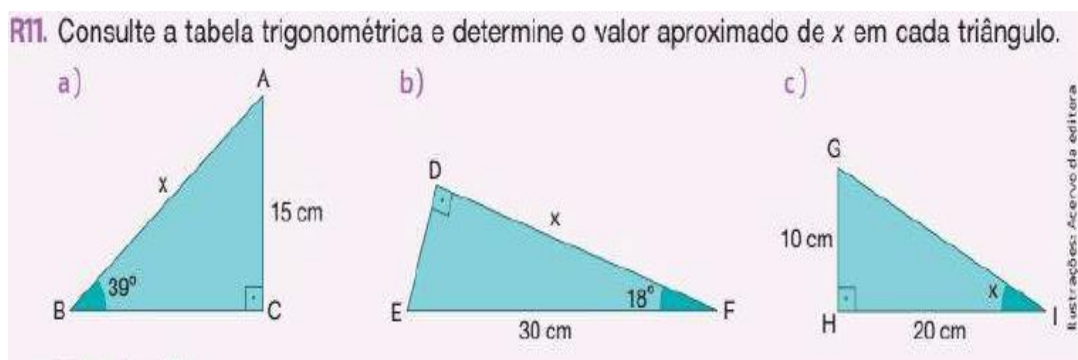
A tabela a seguir apresenta valores aproximados do seno, do cosseno e da tangente de ângulos, cujas medidas são inteiras e variam de  $1^\circ$  a  $89^\circ$ . Esses valores são úteis para a resolução de alguns problemas que envolvem triângulos retângulos.

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente	Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
$1^\circ$	0,017	1,000	0,017	$46^\circ$	0,719	0,695	1,036
$2^\circ$	0,035	0,999	0,035	$47^\circ$	0,731	0,682	1,072
$3^\circ$	0,052	0,999	0,052	$48^\circ$	0,743	0,669	1,111
$4^\circ$	0,070	0,998	0,070	$49^\circ$	0,755	0,656	1,150
$5^\circ$	0,087	0,996	0,087	$50^\circ$	0,766	0,643	1,192
$6^\circ$	0,105	0,995	0,105	$51^\circ$	0,777	0,629	1,235
$7^\circ$	0,122	0,993	0,123	$52^\circ$	0,788	0,616	1,280
$8^\circ$	0,139	0,990	0,141	$53^\circ$	0,799	0,602	1,327
$9^\circ$	0,156	0,988	0,158	$54^\circ$	0,809	0,588	1,376
$10^\circ$	0,174	0,985	0,176	$55^\circ$	0,819	0,574	1,428
$11^\circ$	0,191	0,982	0,194	$56^\circ$	0,829	0,559	1,483
$12^\circ$	0,208	0,978	0,213	$57^\circ$	0,839	0,545	1,540
$13^\circ$	0,225	0,974	0,231	$58^\circ$	0,848	0,530	1,600

Figura 5: Fonte: Coleção 02 do 1º ano, página 251.

A tabela trigonométrica é utilizada na coleção como um recurso de consulta para algumas das atividades e exemplos das coleções como podemos ver na atividade a seguir:

Figura 6: Exercício do livro.



Fonte: Coleção 02 do 1º ano, página 251.

O recurso régua e transferidor é mencionado na coleção C3 e é utilizado em apenas um exercício do livro, na construção de triângulos com ângulo medindo  $40^\circ$ . Um ponto positivo que chama atenção é a proposta de ser trabalhado um exercício com o grupo de classe, de modo que eles possam resolver e discutir com os demais suas respostas.



Figura 7: Exercício em grupo.

**36.** Usem transferidor e régua para construir um triângulo retângulo que tenha um ângulo de  $40^\circ$ . Meçam os lados e calculem  $\tan 40^\circ$ ,  $\sin 40^\circ$  e  $\cos 40^\circ$ , com aproximação de três casas decimais. (No fim deste capítulo temos uma tabela com valores de seno, cosseno e tangente que poderão ser usados em alguns exercícios.)

Verifiquem se os valores encontrados para  $\tan 40^\circ$ ,  $\sin 40^\circ$  e  $\cos 40^\circ$  estão próximos dos valores da tabela.

Resposta pessoal.

**Você sabia?**

$\cos 40^\circ$ , por exemplo, significa cosseno do ângulo cuja medida é  $40^\circ$ , ou seja, identificamos o ângulo com sua medida.

Fonte: Coleção 03 do 1º ano, página 253.

Por fim, destacamos o uso de software como recurso que aparece nas coleções 01 e 03. A coleção 01 propõe um exemplo interessante que busca articular os comandos dados e o desenvolvimento do gráfico no software, analisando o que ocorre a cada passo.

Figura 8: Uso do software coleção 01.

**R8.** Com o auxílio de um *software* de construção de gráficos, a partir do gráfico de uma das funções trigonométricas fundamentais, construir passo a passo o gráfico de  $f$ , tal que  $f(x) = 2 + 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ , e analisar o que ocorre com o gráfico a cada passo. Indicar o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude de  $f$ .

**► Resolução**

Primeiro, vamos traçar o gráfico da função trigonométrica dada por  $g(x) = \cos x$ .

Campo para digitar a lei da função cujo gráfico queremos construir.

Podemos selecionar a opção de exibir linhas de grade para ficar mais fácil visualizar as mudanças no gráfico a cada passo.

É possível escolher a unidade com que graduaremos os eixos. Nesse caso, graduamos o eixo  $y$  em intervalos de 1 unidade e o eixo  $x$  em intervalos de  $\frac{\pi}{4}$ .

Acompanhe os passos descritos a seguir.

- 1º passo:  $\cos x \rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Fonte: Coleção 01 do 2º ano, página 40.

Em outra atividade, observa-se a utilização do software para construir os gráficos de duas funções para serem comparadas no mesmo plano, indicando imagem, domínio e amplitude.



A coleção 03, ao contrário do que ocorre com a calculadora, não faz o uso do recurso de softwares durante a conceituação, exemplos e exercícios do capítulo. Há apenas a explicação de como podem ser feitos gráficos de funções trigonométricas no computador com o software Geogebra (há uma breve explicação do criador e como surgiu). O livro detalha como pode ser adquirido o aplicativo (mostrando sua instalação). Em seguida, explica passo a passo como colocar os valores/ funções de entrada para gerar os gráficos.

Figura 9: uso do software na coleção 03.

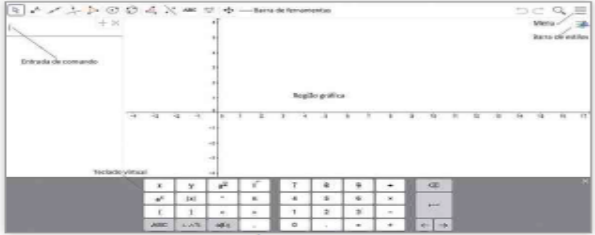
**Matemática e tecnologia**

### Gráfico de funções trigonométricas no computador

Agora, vamos aprender, ou relembra, como construir gráficos de funções trigonométricas usando o software livre GeoGebra.

Trata-se de um software matemático, criado por Markus Hohenwarter, que reúne Álgebra e Geometria. Ele pode ser utilizado em todos os níveis de ensino e já recebeu diversos prêmios na Europa e nos Estados Unidos. A instalação desse software é simples:

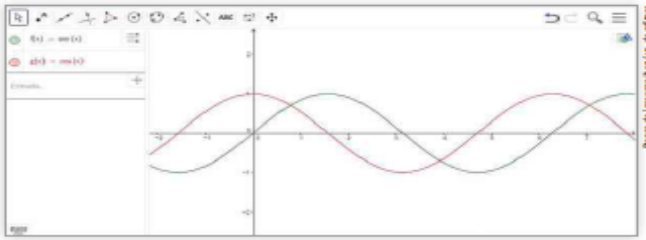
- Acesse o site <[www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)> e clique em "Baixe agora", para tê-lo instalado no computador, ou em "Comece a criar", para usá-lo on-line. Optando por utilizar a versão on-line, você deve clicar no botão "Álgebra"; a tela que abrirá se parece com a reproduzida abaixo.



Captura de tela do software no modo Álgebra.

Depois de acessar o programa, faça os exercícios a seguir.

1. Construa o gráfico das funções  $f(x) = \sin x$  e  $g(x) = \cos x$ , como a seguir. Para isso siga os passos:
  - 1º passo: No campo Entrada de comando (situado na parte esquerda da tela) digite a função:  $f(x) = \sin x$  e teclie "Enter". Em seguida, no mesmo campo digite  $g(x) = \cos x$  e teclie "Enter".



Captura de tela do 1º passo.

- 2º passo: Do lado direito da Barra de ferramentas (parte superior da tela), clique na Barra de estilos, depois, em "Exibir ou esconder a malha" e selecione a malha quadriculada. Para colocar o eixo x na escala de  $\pi$  radianos, clique sobre o eixo x com o botão direito do mouse e selecione com o botão esquerdo do mouse a opção "Janela de Visualização". Clique na aba "Eixo X" e selecione em "Unidade" a opção  $\pi$ . A opção "Distância" não deve estar selecionada.

Fonte: Coleção 03 do 2º ano, página 51.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após analisar as coleções podemos perceber que a utilização dos recursos didáticos concretos em sua maioria continua se pautando basicamente na utilização da calculadora, em





algumas coleções é mencionado o uso de software como recurso e a utilização régua e transferidor em um único exercício.

O uso da calculadora e do software além de aparecer com recorrência durante as explicações e atividades, poderiam ser mais bem explorado pelo livro com mais atividades em grupos, atividades que fizesse com que os alunos comparassem respostas e o uso dos gráficos com a parte algébrica estudada.

Atividades que mobilizassem o uso de mais de um recurso simultaneamente poderia ser interessante de modo que o aluno estaria trabalhando com “todo” recurso disponível e que pudesse estabelecer parâmetros de comparações entre os recursos, por fim destacar qual recurso seria mais útil/preciso para resolver algum tipo de problema em específico.

Por fim, em cada coleção podemos observar/destacar ao menos um ponto positivo, a utilização do recurso de forma articulada durante os exercícios propostas, o cuidado e as instruções que as coleções em geral têm com o manuseio correto dos recursos, uma abordagem enxuta dos conteúdos e as atividades em que os alunos podem compartilhadas seus resultados em grupos com o uso de softwares.

## REFERÊNCIAS

BEZERRA, A. S. V.; ARAÚJO, A. G. P.; ARAÚJO, A. I. S. O ensino da trigonometria subsidiado por novos recursos. Encontro Paraibano De Educação Matemática, v. 7, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Base nacional comum curricular: educação é a base. Brasília: MEC, 2017.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & aplicações: Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. v.1

\_\_\_\_\_ Matemática: Contexto & aplicações: Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. v.2

\_\_\_\_\_ #Contato matemática, 2º ano. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016. v.2  
LEONARDO, Fabio Martins de. Conexões com a matemática. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016. v.1

\_\_\_\_\_ Conexões com a matemática. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016. v.2



LOPES, Maria Maroni. Contribuições do software GeoGebra no ensino e aprendizagem de Trigonometria. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. 2011. p. 1-12.

LORENZATO, Sérgio Aparecido. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sérgio (org.). O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006.

SOUZA, Joamir Roberto de. #Contato matemática, 1º ano. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016. v.1