ISSN 2525-3999
www.conapesc.com.br

CAMPO VETORIAL E INTEGRAIS DE LINHA NO WOLFRAM MATHEMATICA

Eudivan de Melo e Silva Junior [1]
Thamara Moreira Martins [2]
Joseanny Dulce Souza Santos [3]
Davi Ferreira de Lima Silva [4]
Otavio Paulino Lavor [5]

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar as definições de campo vetorial e integrais de linha, além de utilizar ferramentas tecnológicas. Os campos vetoriais são de muita importância nas ciências, em especial para a área da física, onde sabe-se que vetores possui direção, sentido e intensidade. A fim de apresentar tais conceitos, o Wolfram Mathematica é utilizado para resolver problema de forma que é possível observar as linhas de campo formada pelas forças. A visualização e entendimento das linhas foi eficaz para compreender e calcular as integrais de linha, que são integrais que podem simplificar cálculos de diversos problemas como momento de inércia e centro de massa.

Palavras-chave: Linhas de campo, Vetores, Wolfram.

INTRODUÇÃO

Com o avanço da tecnologia, calcular diversos tipos de funções de todas as formas, sejam elas derivadas, integrais, ou até mesmo encontrar um simples valor de x, se tornou algo muito simples.

Problemas da física em muitos casos são muito complexos e extensos, onde se perde muito tempo tentando encontrar um resultado, temos ele campo vetorial e integrais de linha que muitas vezes apresentam uma função enorme pois necessita de vários métodos matemáticos para resolver questões, o que torna um software bastante necessário neste caso.

O mercado de software hoje está bem recheado de aplicações sendo a mais simples calculadora, programas que para resoluções especificas de equações matemáticas e aplicações

[1] Graduando do Curso de Ciencias e Tecnologia da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, eudivan44@gmail.com;
[2] Graduando do Curso de Ciencias e Tecnologia da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, thamy373@gmail.com;
[3] Graduando do Curso de Tecnologia da Informação da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, ig.joseanny@gmail.com;
[4] Graduando do Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, davi_tali@hotmail.com;
[5] Professor orientador: Doutorado, Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, otavioplavor@gmail.com.

ISSN 2525-3999
www.conapesc.com.br

capazes de resolver qualquer problema, temos como exemplo o software *Mathematica* com o qual iremos trabalhar neste artigo.

O *Wolfran Mathematica* é um software para computador, que permite calcular diversas equações apenas aplicando alguns comandos ao mesmo, sua primeira versão surgiu em 1988, e revolucionou o mundo da computações técnica, onde pode ser usado em diversas áreas, seu verdadeiro potencial está na programação que ele oferece, pois ao escrever programas, o usuário tem o poder de resolver qualquer problema, aplicando novas funções especificas para sua área de atuação. O *Mathematica* é projetado para lidar com cálculos matemáticos tanto como aqueles cálculos numéricos tradicionais. A maioria das funções da física-matemática já está incluída no pacote do software, e permite até mesmo observar graficamente os resultados.

METODOLOGIA

Neste trabalho, usaremos o *Mathematica* para encontrar o trabalho realizado por uma força dada. Com a força dada por um campo vetorial e um a curva a qual se dá o caminho, encontraremos o vetor velocidade a partir da parametrização da curva e calculamos a força ao longo do caminho, ou seja, restringimos o campo vetorial a curva dada. O passo seguinte é encontrar a integral de linha. Para fins de estudo, usamos exemplo a força

$$\vec{F} = (2\mathrm{y} + \mathrm{sen\,x})\hat{\imath} + (\mathrm{z}^2 + \frac{1}{3}\cos \mathrm{y})\hat{\jmath} + \mathrm{x}^4\hat{k} \qquad (1)$$

e a curva

$$r(t) = (\mathrm{sen\,t})\hat{\imath} + (\cos \mathrm{t})\hat{\jmath} + (\mathrm{sen\,2t})\hat{\mathrm{k}}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

Para uso do software, observaremos a questão e identificamos quantas variáveis precisaremos definir para que possamos iniciar o processo. Como sabemos que é uma função de três variáveis, iniciaremos com f, x, y, z, e como possuímos uma reta $r(t)$, temos mais duas outras variáveis, e precisaremos de uma nova variável para armazenar a função derivada da reta $r(t)$.

Clear [x, y, z, t, f, r, v] (3)

Feito isso precisamos inserir a função no software para que ele saiba o que deverá ser calculado.

$$f\,[x\_, y\_, z\_] := \{2y + Sin[x], (z^{\wedge}2) + (1/3)Cos[y], x^{\wedge}4\} \qquad (4)$$

ISSN 2525-3999
www.conapesc.com.br

Sabendo que a reta $r(t)$ é um vetor, iremos determinar suas coordenadas separadas e em seguida inserir na função da reta para melhor organização do nosso sistema. Dessa forma, temos, *x[t_]:=Sin[t], y[t_]:=Cos[t], z[t_]:=Sin[2t] e r[t_]:={x[t], y[t], z[t]}.*

Como precisamos do vetor velocidade, temos *v[t_]:=r'[t]*. Agora para calcular a integral de linha, usamos a seguinte expressão:

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))||r'(t)||dt \qquad (5)$$

onde sabemos que o limite de integração é dado por $[a,b] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Logo, vamos usar as seguintes funções:

integrand = f[x[t], y[t], z[t]].v[t] //Simplify (6)

NIntegrate [integrand, {t, a, b}] (7)

Na primeira função iremos definir a variável *integrand*, que irá ficar a função que deverá ser integrada, ou seja, a função multiplicada pelo modulo da derivada da reta, em seguida a função *Simplify* irá simplificar a equação. Na segunda o aplicativo irá calcular a integral definida dessa função.

CAMPO VETORIAL

Campo vetorial é uma função que representa um vetor a cada ponto de seu domínio. Imagine um plano ou um espaço preenchido um determinado fluido, este fluido possui partículas e em qualquer instando de tempo uma partícula possui velocidade V, em pontos diferentes e num mesmo instante de tempo, a velocidade dessas partículas podem variar, logo o escoamento de um fluido é um bom exemplo de campo vetorial, observe a Figura 1.

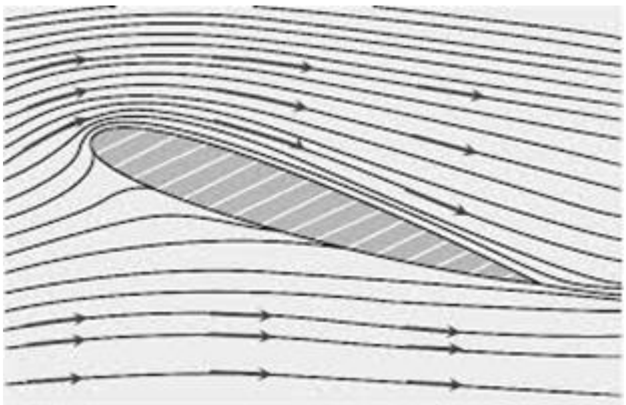


Figura 1: Escoamento de um fluido em um túnel de vento, e seus respectivos vetores velocidades.

Podemos dizer que um campo vetorial no espaço é dado por:

ISSN 2525-3999
www.conapesc.com.br

$$F(x,y,z) = g(x,y,z)\hat{\imath} + h(x,y,z)\hat{\jmath} + k(x,y,z)\hat{k} \quad (8)$$

Podemos dizer também que uma função campo vetorial é dada pelos vetores tangentes e normais a uma curva no espaço. Assim temos que:

$$r(t) = f(t)\hat{\imath} + g(t)\hat{\jmath} + h(t)\hat{k} \quad (9)$$

Um campo vetorial em um plano é uma função que associa a cada ponto P do plano um único vetor F(P) paralelo ao plano. Analogamente, um campo vetorial no espaço tridimensional é uma função que associa a cada ponto P do espaço tridimensional um único vetor F(P) do espaço.” (ANTON, 2014)

Sabendo que $F(x,y)$ é uma função escalar de duas variáveis, seu gradiente é definido por:

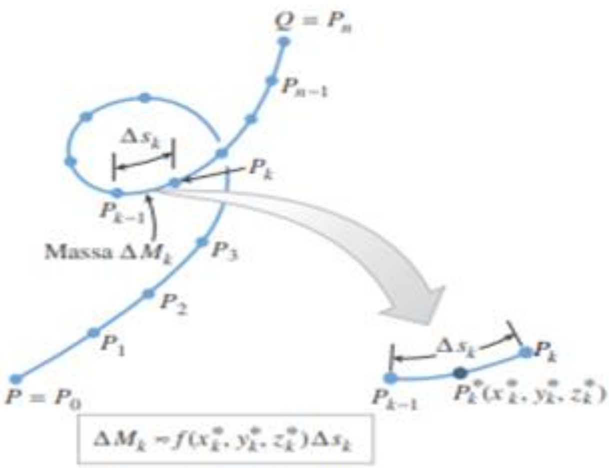
$$\nabla F = F_x(x,y)\hat{\imath} + F_y(x,y)\hat{\jmath} \quad (10)$$

Logo o gradiente de $F(x,y)$ é um campo vetorial, denominado de campo do vetor gradiente, da mesma forma F pode ter também três ou mais variáveis.

INTEGRAL DE LINHA

Integrar uma função ao longo de uma curva. Consideramos o problema de encontrar a massa de um arame muito fino cuja função densidade linear (massa por unidade de comprimento) seja conhecida. Vamos supor que possamos modelar o arame com uma curva lisa C entre dois pontos, P e Q, do espaço tridimensional. Dado um ponto (x,y,z) em C, denotamos pôr $f(x,y,z)$ o valor correspondente da função densidade. Para calcular a massa do arame, procedemos como segue:

- Dividindo C em n seções muito pequenas usando uma sucessão de pontos de partição distintos: $P = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n - 1, P_n = Q$.



ISSN 2525-3999
www.conapesc.com.br

Figura 2: Arame fino modelado por um curva e particionado em pontos distintos. (ANTON, 2014)

Seja ΔM_k a massa da k-ésima seção e seja Δs_k o comprimento de arco entre $P_k - 1$ e P_k.

- Escolha um ponto amostral arbitrário na k-ésima seção, como ilustrado na Figura 2. Se Δs_k for muito pequeno, o valor de f não varia muito ao longo da k-ésima seção e podemos aproximar f ao longo dessa seção pelo valor. Segue que a massa da k-ésima seção pode ser aproximada por:

$$\Delta M_k \approx f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta s_k \tag{11}$$

- A massa M do arame todo pode, então, ser aproximada por:

$$M = \sum_{k=1}^{n} \Delta M_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta s_k \tag{12}$$

- Utilizaremos a expressão max $\Delta s_k \to 0$ para indicar o processo de aumentar n de tal modo que os comprimentos de todas as seções tendam a 0. É plausível que o erro na equação anterior tenda a 0 quando max $\Delta s_k \to 0$ e que o valor exato de M seja dado por:

$$M = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta s_k \tag{13}$$

O limite em M é análogo ao limite de uma soma de Riemann usada para definir a integral de uma função em um intervalo.

Exceto em casos muito simples, não é factível calcular uma integral de linha Contudo, mostraremos agora que é possível expressar uma integral de linha como uma integral definida ordinária, de modo que não serão necessários métodos especiais para calcular as integrais de linha. Por exemplo, suponha que C seja uma curva no plano xy, dada por uma parametrização lisa:

$$r(t) = x(t)i + y(t)j \quad (a \leq t \leq b) \tag{14}$$

Além disso, suponha que a cada ponto P_k de uma partição de C corresponda um valor do parâmetro t_k em $[a, b]$. O comprimento de arco de C entre os pontos $P_k - 1$ e P_k é, então, dado por:

$$\Delta s_k = \int_{t_k-1}^{t_k} ||r'(t)||dt \tag{15}$$

Se denotarmos $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, segundo o Teorema do Valor Médio para Integrais que existe um ponto t_k^* em $t_{k-1}, t_k]$ tal que:

$$\Delta s_k = \int_{t_k-1}^{t_k} ||r'(t)||dt = \left||r'(t_k^*)|\right|\Delta t_k \tag{16}$$

Denotamos pôr o ponto correspondente ao valor do parâmetro. Como a parametrização de C é lisa, pode ser mostrado que $\Delta s_k \to 0$ se, e somente se, $\Delta t_k \to 0$. Além disso, a composta $f(x(t), y(t))$ é uma função real definida no intervalo $[a, b]$, e temos:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t), y(t))||r'(t)||dt \qquad (17)$$

WOLFRAM MATHEMATICA

Por três décadas o *Mathematica* vem definindo o que há de mais avançado em computação técnica disponibilizando o principal ambiente computacional para milhões de inovadores, educadores, estudantes, e muitas outras pessoas ao redor do mundo. Amplamente admirado tanto por sua capacidade técnica quanto por sua usabilidade fácil e sofisticada, o Mathematica fornece um sistema único e integrado, em contínua expansão, abrangendo todo o universo da computação técnica, facilmente disponível na nuvem através de qualquer navegador de internet, além de nativamente em todos os sistemas de desktop modernos.

O software possui aproximadamente 6.000 funções que possibilita resolver infinitas questões de cálculo, que variam desde um cálculo simples, até uma derivada ou integral complexa, também possibilita a plotagem de gráficos de funções, bem como uma enorme variedade de novas ideias importantes que estendem dramaticamente a visão e o escopo do sistema.

O software funciona como uma interface de programação, onde iremos adicionar linhas de códigos onde iremos instruir o computador a calcular determinadas questões. Segue alguns comandos básicos necessários para resolvermos a questão.

- **Clear:** Usado para apagar e definir as variáveis necessárias para a questão especifica;
- **Sin:** Função que calcula o seno;
- **Cos:** Função que calcula o cosseno;
- **F'[x]:** Representa o cálculo de uma derivada, onde F é a função que derivável, x é a variável de derivação.
- **Nintegrate:** Função que irá integrar determinada expressão, onde iremos determinar a expressão, os limites e as variáveis de integração.
- **Simplify:** Função que irá simplificar a expressão, que facilita a leitura do usuário no resultado final.

Como mostra na imagem abaixo, adicionei inicialmente a função $Clear$ e limpei e adicionei duas variáveis, sendo uma delas onde irá ficar a função que será derivada e integrada. Em

ISSN 2525-3999
www.conapesc.com.br

seguida determinei a função, onde nela possui o seno e o cosseno de x logo em seguida derivei em x e depois integrei com limites de 0 a π.

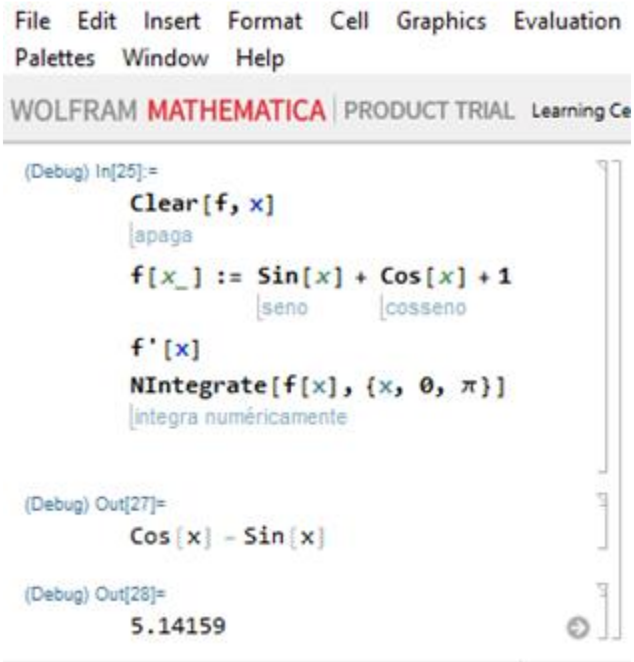


Figura 3: Interface do Wolfram Mathematica com uma função simples derivando e integrando.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Ao aplicar todas as funções no software conforme dito na documentação do mesmo, a figura abaixo representa bem como ficou escrito a sequência dos comandos aplicados:

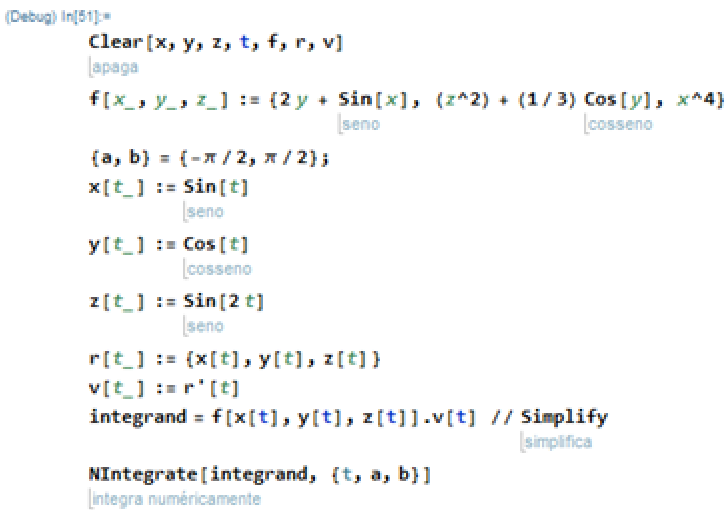


Figura 4: Wolfram Mathematica com comando aplicados referente a questão

ISSN 2525-3999
www.conapesc.com.br

Ao analisar que todos os comandos estão corretos foi executado no software os comandos obtendo dois resultados:

(Debug) Out[59]=

$$2\,\mathrm{Cos}[2\,t]\,\mathrm{Sin}[t]^4 - \frac{1}{3}\,\mathrm{Sin}[t]\,\left(\mathrm{Cos}[\mathrm{Cos}[t]] + 3\,\mathrm{Sin}[2\,t]^2\right) + \mathrm{Cos}[t]\,\left(2\,\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Sin}[\mathrm{Sin}[t]]\right)$$

(Debug) Out[60]=

1.5708

Figura 5: Resultados apresentados pelo *wolfram mathematica*.

Podemos ver nos resultados apresentados pelo software na primeira linha, a função que será integrada, ela já está multiplicada pela derivada da reta, e simplificada, o que mostra que mesmo simplificada ainda é uma função bem complexa para calcular no papel. Na segunda linhas vemos o resultado da integral definida.

O software também permite plotar graficamente a curva que queremos integrar como é visto na figura 6.

```
Plot[integrand, {t, a, b}]
gráfico
```

(Debug) Out[61]=

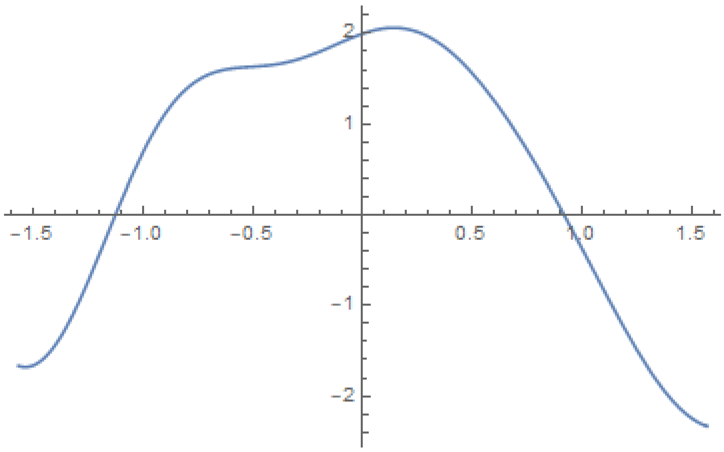


Figura 6: Representação gráfica da função integrada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base no conteúdo apresentado, podemos ver a facilidade que a tecnologia nos proporciona para resolver questões matemáticas que teríamos dificuldade para resolver manualmente, conhecendo essa ferramenta, o cálculo de integrais e derivadas se torna mais fácil e simples, e lógico, continua necessitando de conhecimento teórico, já que você deverá interpretar o problema e montar de forma logica e sequencial o melhor algoritmo para o software resolver, além de conseguir entender de forma mais simples como funcionam campos vetoriais e calcular integrais de linha, permitindo um melhor entendimento sobre campos, sendo ele gravitacionais, elétricos e campo velocidade de fluidos em um determinado escoamento.

REFERÊNCIAS

THOMAS, George B.; WEIR, Maurice D.; HASS, Joel. **Cálculo**. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil Ltda, 2013. v. 2. ISBN 978-85-8143-087-4.

STEWART, James. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2007. v. 2. ISBN 85-211-0484-0.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. 10. ed. Porto Alegre: BOOKMAN EDITORA LTDA, 2014. v. 2. ISBN 978-85-8260-246-1.

WOLFRAM, Stephen. **Wolfram Mathematica**. 12. [*S. l.*], 20 jan. 2020. Disponível em: https://www.wolfram.com/mathematica/. Acesso em: 17 jan. 2020.

RODRIGUES, José Alberto. Wolfram Alpha: uma nova visão da Matemática. In: **6ª Conferência Ibérica de Sistemas e Tecnologias de Informação**. 2011. p. 299-304.

REGANATI, Alessandra Soboll. Tutorial Wolfram Mathematica 6.0.

SANTOS, Laudo Claumir et al. Funções complexas de uma variavel complexa: uma abordagem via software mathematica. 1998.