CONGRESSO NACIONAL de PESQUISA e ENSINO em CIÊNCIAS
V CONAPESC
ISSN 2525-3999
www.conapesc.com.br

CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS E INTEIROS: UMA IDÉIA AXIOMÁTICA

Juan Pablo França Alves Cantalice [1]
Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva [2]

INTRODUÇÃO

Podemos dizer que hoje, os primeiros números a serem estudados pelos alunos do ensino fundamental, são os números naturais e os números inteiros. Como consequência, são estudadas suas diversas propriedades à medida que o progresso acadêmico vai acontecendo. Entretanto, é muito raro ver alunos dos ensino fundamental ou médio estudando tais tópicos com um tratamento formal maior acerca dos seus resultados. Segundo Pereira (2013), em geral, as demonstrações no ensino médio são esquecidas e resultados matemático são vistos como verdades absolutas. Daí, a importância de um tratamento formal acerca desses conjuntos, com a idéia de trazer mais esclarecimentos e sanar todas as possíveis dúvidas que possam permear tais conjuntos, se torna em muitos casos, útil. Deste modo, neste trabalho, desenvolvemos a idéia da construção do conjunto dos números naturais através dos famosos axiomas de Peano. "Essa axiomatização do conjunto dos números naturais é uma adaptação para a simbologia matemática atual daquela que foi apresentada pelo matemático italiano Giuseppe Peano, no final do século XIX" (FERREIRA, 2013, p. 19-20).

Por conseguinte, sabendo o que de fato é o conjunto dos números naturais bem como suas propriedades, algumas noções básicas de conjuntos e relações de equivalência, construimos o conjunto dos números inteiros. Pode parecer razoável considerar os números inteiros negativos após a construção do conjunto dos números naturais. Acontece que, simplesmente considerar os inteiros negativos como se faz no ensino fundamental, não traz um rigor matemático e pode deixar lacunas de dúvidas para os alunos mais entusiasmados. "Do ponto de vista do rigor matemático, apenas admitir a existência de números inteiros negativos e incorporá-los ao conjunto dos números naturais não é adequado." (FERREIRA, 2013, P. 43).

---

[1] Graduando do Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, juanpablo.contato@gmail.com;
[2] Professor orientador: Pós-Doutor, Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, diogo@mat.ufcg.edu.br;
Resumo expandido resultado de Projeto de Iniciação Cietífica pelo PET - Matemática e Estatística UFCG e financiado pelo FNDE.

Uma construção via axiomas de Peano como essa, representa séculos de avanço matemático e tem uma importância para a divulgação matemática, no sentido de que, professores ao repassar ou ter domínio de conteúdos como esse, contribuem significativamente para o desenvolvimento da matemática em dois aspectos: Primeiro, os professores conseguem tirar as mais diversas dúvidas de seus alunos com relação a estes dois conjuntos e segundo, proporciona para seus alunos, novas técnicas de resolver problemas matemáticos no cotidiano e nas olimpíadas de matemática.

Em nosso estudo, adotamos o quadro branco, bem como, a plataforma Google Meet para as exposições de conteúdos e discussões com o auxílio de uma mesa digitalizadora.

Houve discussões sobre as formas de resolver os problemas, que por sua vez, contribuiram significativamente para a clareza da construção e a exploração de novas formas de solução. Concluindo, após discorrermos sobre a idéia da construção dos conjuntos dos números naturais e inteiros, trouxemos implicações fundamentadas para a divulgação e desenvolvimento da matemática.

METODOLOGIA (OU MATERIAIS E MÉTODOS)

Houve exposições de conteúdos teóricos, bem como, a resolução e discussão dos vários problemas propostos na nossa referência bibliográfica norteadora. No início, fizemos nossas exposições e resoluções com o auxílio de pincel e quadro branco. Posteriormente, as exposições foram feitas através de slides e notas do autor. Já as resoluções das questões, deu-se de forma análoga as exposições. A coleta de informações acerca de dados referentes a importância das olimpíadas, do rigor matemático e a importância das técnicas usadas na nossa construção para com os alunos, foram retiradas de dissertações, artigos científicos, livros publicados e também dos PCN’s.

REFERENCIAL TEÓRICO

O conceito de relação de equivalência, classes de equivalência e conjuntos quocientes permearam grande parte do nosso trabalho, dessa forma, o seu estudo foi indispensável para o entendimento das construções.

A formalização que adotamos foi a axiomática não construtiva, isto é,

ISSN 2525-3999
www.conapesc.com.br

> Ela consiste simplesmente em assumir a existência do conjunto dos números naturais (a partir do qual *construiremos* os demais conjuntos numéricos). Mas o que significa "assumir a existência do conjunto dos números naturais"? Significa assumir a existência de um conjunto satisfazendo certos axiomas que são capazes de caracterizar completamente, e de forma rigorosa, a nossa ideia intuitiva de conjunto dos números naturais. (FERREIRA, 2013, p. 19).

Esses "axiomas" são justamente os axiomas de Peano, quando admitidos, nos fornecem ferramentas para de fato construir o conjunto dos números naturais. Veja que, por mais simples e intuitivo que pareça admitir propriedades como comutativa e associativa com relação as operações de adição e multiplicação nos naturais, com os axiomas de Peano, sua demonstração se torna plenamente possível.

Após a apresentação dos axiomas de Peano, a definição das operações de adição, multiplicação, a relação de ordem nos naturais e as demonstrações de suas principais propriedades, construimos de fato, o conjunto dos números naturais e passamos a considera-lo como $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\dots\}$.

A partir da relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por $(a,b) \sim (c,d)$ quando $a + d = b + c$, denotamos por $\overline{(a,b)}$ a classe de equivalência do par ordenado (a,b) pela relação $\sim$, isto é,

$$\overline{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}); (x,y) \sim (a,b)\}.$$

Isso nos permite definir o seguinte o conjunto quociente $\mathbb{N} \times \mathbb{N} /\!\sim$, constituído pelas classes de equivalência $\overline{(a,b)}$. O denotamos por $\mathbb{Z}$ e o chamaremos de conjunto dos números inteiros. Isto é,

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N} /\!\sim) = \{\overline{(a,b)}; (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}.$$

A partir disso, definimos a operação de adição, multiplicação, sua relação de ordem e suas propriedades que são demonstradas usando as propriedades dos números naturais.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A idéia de trazer um fundamento para aquilo que concebemos intuitivo ou deduzível na matemática, é de grande importância para a humanidade, principalmente para alunos no ensino médio, onde ainda temos alguns problemas a serem enfrentados. "Atualmente em nível de Ensino Médio as demonstrações são, em sua grande maioria, postas de lado, e os resultados matemáticos costumam ser exibidos como verdades absolutas sem questionamentos.” (PEREIRA, 2013, p. 10).

Construções como essas, fornecem para os alunos do ensino fundamental e médio, uma gama de novas técnicas para resolver problemas matemáticos no cotidiano ou em provas de cunho acadêmico. Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o terceiro ciclo do ensino fundamental ainda atentam para a importância desse fato.

> Os parâmetros curriculares nacionais de Matemática para o terceiro ciclo do Ensino Fundamental (6° e 7° anos) apontam para a importância dos estudantes reconhecerem os números naturais e inteiros em diversos contextos, tanto cotidianos quanto históricos. Inclusive sugerem a proposição de situações-problema onde as ideias de falta, diferença, orientação e deslocamento possam ser exploradas (BRASIL, 1998, p. 71 apud BRITO, 2017, p. 8-9).

Como exemplo de técnica, temos o Principio da Indução Completa (Um dos axiomas de Peano) que é muito utilizado nas olimpiadas OBMEP e OBM. “Sua importância é tal que o professor Abramo Hefez, em seu artigo sobre Indução, afirma que este tema deveria ser de conhecimento de todo aluno de Ensino Médio” (PEREIRA, 2013, p. 10). As olimpíadas de matemática tais como OBMEP, tem um grande impacto na vida dos jovens brasileiros e como consequência, é um progama importantissimo no cenário nacional.

> Demonstramos que a OBMEP tem efeito positivo e estatisticamente significativo de 2,14 pontos nas notas médias de matemática das escolas na Prova Brasil (2007) na 8ª série do ensino fundamental. Esse impacto é crescente conforme o maior número de participações das escolas nas edições anuais da OBMEP, e é maior nos percentis mais elevados das distribuições de notas dos alunos (BIONDI; VASCONCELLOS; FILHO, 2009, p. 16).

Os benefícios de uma construção como essa, quando divulgadas/ensinadas, podem trazer um impacto pessoal na vida dos alunos e no desenvolvimento da matemática, como já mencionamos anteriormente. Além disso, traz outros benefícios segundo Biondi, Vasconcellos e Filho (2009).

> A análise de retorno econômico trouxe resultados positivos, nos levando a concluir que a realização da OBMEP proporciona benefícios para a qualidade da educação pública do país, com impacto direto nas avaliações educacionais e ganhos futuros em termos de rendimento no mercado de trabalho dos participantes (BIONDI; VASCONCELLOS; FILHO, 2009, p. 16).

Deste modo, a construção fundamentada do conjunto dos números naturais e dos números inteiros, podem trazer relevantes resultados na área da educação matemática. Ao dominar essa construção e suas técnicas, professores podem se sentir mais seguros em suas respectivas salas de aulas para tirarem eventuais dúvidas relacionadas a esses dois conjuntos.

ISSN 2525-3999
www.conapesc.com.br

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, direcionamos nossa atenção em discorrer sobre uma construção rigorosa e fundamentada do ponto de vista matemático para os conjuntos dos números naturais e inteiros.

Com os axiomas de Peano, demos a ideia da construção do conjunto dos números naturais, e por consequência deste, o conjunto dos números inteiros. Vimos também, como os parâmetros curriculares nacionais destaca acerca da compreensão desses dois conjuntos.

Destacamos o quão importantes são os axiomas de Peano, as técnicas usadas na construção e por conseguinte, os seus efeitos positivos na sociedade.

Esperamos que esse trabalho cumpra com o seu papel principal que é a divulgação matemática. E que sim, podemos tornar entes que por muitos são considerados como primitivos (os conjuntos dos números naturais e inteiros) em uma ideia matemática que tem o seu rigor e fundamento.

Além do mais, esperamos que esse trabalho proporcione uma visão mais crítica a respeito dos conjuntos dos números naturais e inteiros para alunos do ensino médio e fundamental. Esperamos também, que esse trabalho abra oportunidades para que professores possam comentar sobres os axiomas de Peano em suas salas de aulas.

Uma comparação da nossa construção com o método de construção do conjunto dos números naturais via teoria dos conjuntos, pode-se tornar muito proveitosa em vários aspectos. Por último e não menos importante, uma diagonal entre o que é explanado no ensino fundamental e médio com a construção deliberada neste trabalho, podem ser bastante úteis.

Palavras-chave: Axiomas de Peano; Conjuntos numéricos; Construção; Matemática.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos ao PET – Matemática e Estatística pela concessão do auxílio financeiro e ao professor Diogo Diniz por me orientar nesse trabalho.

REFERÊNCIAS

ISSN 2525-3999
www.conapesc.com.br

ALVES, W. J. S. **O Impacto da Olimpíada de Matemática em Alunos da Escola Pública**. São Paulo: Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica. 2010. Disponível em: <https://www.pucsp.br/sites/default/files/download/posgraduacao/programas/educacaomatematica/washington_alves.pdf >. Acesso em: 08/11/2020

BIONDI, R. L.; VASCONCELLOS, L.; MENEZES-FILHO, N. A. **Avaliando o impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) no desempenho de matemática nas avaliações educacionais**. Anais. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Econometria, 2009. Disponível em: <http://bibliotecadigital.fgv.br/ocs/index.php/sbe/EBE09/paper/viewFile/1092/315 >. Acesso em: 08/11/2020

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**.(1° e 2° ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**.(3° e 4° ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

BRITO, F. C. A. **Uma extensão dos axiomas de peano para a construção dos inteiros**. Paraiba: Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) – Universidade Federal de Campina Grande. 2017. Disponível em: <http://mat.ufcg.edu.br/profmat/wp-content/uploads/sites/5/2015/07/TCC-PROFMAT_Fred_Charles_Alves_de_Brito_Vers%C3%A3o_Final.pdf>. Acesso em: 08/11/2020

FERREIRA, J. **A construção dos números**. Rio de Janeiro: SBM, 3ª edição, 2013.

PEREIRA, P. C. A.; **O principio da indução finita: uma abordagem no ensino médio**. Rio de janeiro: Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada. 2013. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/paulo_pereira.pdf >. Acesso em: 08/11/2020