III CONEDU
CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO

CONCEITOS, PROPRIEDADES E APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES, EM PARTICULAR A FUNÇÃO QUADRÁTICA

Valdson Davi Moura Silva,
Universidade Estadual da Paraíba, valdsondavi@gmail.com

Alécio Soares Silva,
Universidade Estadual da Paraíba, mataspe@hotmail.com

Ailton Diniz de Oliveira,
Universidade Estadual da Paraíba, ailton_diniz@hotmail.com

Resumo

Nem sempre percebemos, mas estamos em contato com as funções no nosso dia a dia, por exemplo: Quando assistimos ou lemos um jornal, muitas vezes nos deparamos com um gráfico, que nada mais é que uma relação, comparação de duas grandezas ou até mesmo uma função, mas representada graficamente. Neste trabalho considera-se o uso e a importância dos conceitos das funções, como uma ferramenta que potencializa o cálculo de áreas máximas em problemas geométricos, com o intuito de utilizá-la de forma contextualizada. Para os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio, o conceito de função desempenha também importante papel para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construções de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Para atingir o objetivo de potencializar o ensino de funções, busca-se atingir um estudo sobre aplicação do conceito para calcular valores máximos e mínimos da imagem delas. Faz-se aqui uma abordagem ao conteúdo de função, explorando alguns tipos de funções, bem como dos conceitos e das suas propriedades, logo após fizemos algumas aplicações, contextualizando dessa forma o conteúdo tratado no cálculo de valores maximizados ou minimizados em situações problema, concluindo então com uma proposta de estudo com foco em aplicar a função quadrática refletindo sua importância não apenas aos interesses da Matemática, mas colocado em prática em outras ciências como citado anteriormente. Acreditamos que aproximar os saberes em construção ao dia a dia dos nossos alunos, possibilita que eles percebam a importância e a utilidade daquilo que estudam.

Palavras-chave: Funções; Aplicação; Educação Matemática.

1 INTRODUÇÃO

A contextualização de conceitos se faz necessário em diversas áreas de aplicação da matemática, bem como, em diferentes ciências. É fato que o ensino de matemática foi desenvolvido ao longo muitos séculos, com a contribuição de diversos matemáticos, filósofos, pedagogos, psicólogos, dentre outros. Nesse contexto pode-se destacar o conteúdo de função quadrática reforçada nos PCNs, sendo que a sugestão que tal conteúdo comece abordado no ensino fundamental devido seu caráter essencial para desempenho das funções básicas do cidadão brasileiro em suas atividades cotidianas. Neste trabalho teve-se como objetivo contribuir no ensino aprendizagem de funções e um de seus objetivos específicos foi mostrar algumas de suas aplicações, como também, seu surgimento através da história da matemática. Nele faz-se uma abordagem de conceitos, definições e técnicas importantes para a aplicação deste conteúdo, em seguida algumas aplicações práticas, em alguns problemas geométricos, escolhidos com a intenção de evidenciar a utilidade do conteúdo estudado.

A escolha de tais problemas foi feita levando em consideração a recomendação feita por BRASIL (2006), p.73, onde se afirma que “O estudo da função quadrática pode ser motivado via problemas de aplicação, em que é preciso encontrar certo ponto de máximo (clássicos problemas de determinação de área máxima)”, tal trecho, propõe que a abordagem ao estudo de funções, que possuem pontos com imagem tendo valores máximos ou mínimos, seja feita explorando justamente essa propriedade, pois tal atitude pode ser um boa estratégia motivadora no que se refere a introdução do conteúdo.

- **OBJETIVOS**

Este trabalho tem por objetivo geral potencializar o ensino de funções, com ele busca-se atingir um estudo com foco em aplicar o cálculo de grandezas maximizadas.

- **OBJETIVOS ESPECÍFICOS:**

- Estudar alguns conceitos e propriedades sobre funções;
- Mostrar uma aplicação do conteúdo no processo de resolução de problemas geométricos.
- Motivar o aluno, buscando evidenciar uma aplicação para o conteúdo estudado.

- **PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS**

Na elaboração deste trabalho, procurou-se realizar uma pesquisa de caráter bibliográfico, buscando elementos para sua fundamentação. Atentou-se para que fosse feita uma aplicação do conteúdo contextualizando em outra área da matemática para denotar sua relevância.

FUNÇÕES

Nesta seção aborda-se o conteúdo de funções, buscando esclarecer ideias básicas sobre os conceitos envolvidos em seu ensino, para que se possa fundamentar a base necessária para abordar as maximizações de áreas de figuras geométricas. Inicia-se abordando o conceito de função, que é, sem dúvida, o modelo matemático que mais se aproxima do mundo real, para que possamos, em seguida, tratar de alguns casos específicos.

Em 1939 o grupo Bourbaki, um grupo de matemáticos, em sua grande maioria franceses, que se reuniram por volta de 1935, período no qual lançaram alguns livros que tinham por objetivo fundamentar a teoria dos conjuntos. O grupo Bourbaki tem gabinete na École Normale Supérieure, em Paris. O uso do pseudônimo Nicolas Bourbaki foi a escolha de um personagem inventado. Eles ampliaram o conceito de função, abrangendo relações entre dois conjuntos de elementos, não só de números, como até então o conceito era abordado.

Passou-se a definir uma função como uma terna ordenada (X, Y, f), na qual X e Y são conjuntos e f é um subconjunto de $X \times Y$, tal que se (x, y) pertence a f e (x, y') pertence a f, então $y = y'$. Tomando essa definição de função, o grupo Bourbaki apresenta uma nova visão das Operações matemáticas e constrói um ramo da matemática que se chama Estruturas Algébricas.

O conceito de função é um dos mais genéricos e unificadores de toda a Matemática atual, presente em efetivamente todos os campos, incluindo Aritmética, Álgebra, Geometria, Análise, Combinatória, Probabilidade, etc. Muitas noções importantes, desde as mais simples até as mais sofisticadas, admitem formulações usando a linguagem própria das funções, que contribuem para a clareza da exposição e simplificam o desenvolvimento de conceitos. Grande parte do conteúdo de matemática lecionado no ensino médio e superior está relacionado ao estudo de funções, e são inúmeras as experiências frustradas de alunos que não conseguem assimilar significativamente seus conceitos, seja como objeto de estudo, seja como ferramenta para o estudo de outros conteúdos, sendo talvez um dos grandes responsáveis pelo alto índice de reprovação em disciplinas elementares estudadas no início de suas vidas acadêmicas

Nota-se que o tratamento dado ao conceito de função pelos professores dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, nem sempre surge de problemas sociais que aparecem no decorrer da história para resolver alguma situação caracterizada como obstáculo. É sabido que priorizar uma abordagem que vise o pragmatismo das aulas em que o professor descarrega várias definições, demonstrações e exercícios, sem atribuir alguma aplicação para o conteúdo estudado é uma estratégia perigosa, uma vez que, a "preocupação excessiva com apresentações formais é uma falha grave no ensino, pois atrapalha o desenvolvimento do aluno já que obscurece o que há de mais importante na Matemática: as idéias. Exemplo típico desse erro é o esforço que se faz no 2° grau para apresentar o conceito de função como um caso particular de relação" (Ávila, 1985). Todavia, essa é uma realidade extremamente comum nas salas de aula, transmitir conteúdos desconectados do contexto social, da realidade do aluno ou que tenha uma aplicação prática, nem que seja uma aplicação dentro da própria matemática.

Um caminho sugerido por Brasil (2006), diz respeito a uma organização curricular ocorrendo com "integração e articulação dos conhecimentos em processo permanente de interdisciplinaridade e contextualização". Desta forma, é indiscutível que torna-se mais fácil para os alunos compreender o conteúdo quando ele é capaz de relacioná-lo com alguma outra situação.

O CONCEITO DE FUNÇÃO

O termo função é de autoria de Leibniz, e muitos matemáticos contribuíram para que chegássemos ao seu conceito atual. Ao grande Matemático Suíço Leonard Euler, deve-se a notação na qual $f(x)$ lê-se (f de x). Segundo Dante (2014), o alemão Dirichlet escreveu uma definição de função semelhante a que tem-se dada pelo grupo Bourbaki: "Uma variável y se diz em função de uma variável x se, para todo valor atribuído a x, corresponde, por alguma lei ou regra, um único valor de y. Nesse caso, $x$denomina-se variável **independente** e y, variável **dependente**". De fato, tal definição se aproxima bastante da definição dada há décadas mais tarde pelo grupo Bourbaki, apud Dante, 2014, p.41: "Dados dois conjuntos X e Y, uma função $f{:}X\square Y$ (lê-se: uma função de X em Y) é uma regra que determina como associar a cada elemento $x \in X$ um único $y = f(x) \in Y$ ". Deixando claro a terna, $X, Y, f(x)$, na qual X e Y são conjuntos e $f(x)$ a lei que relaciona os elementos.

O texto das Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (OCNEM) sugere que o estudo de funções seja iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações. Levando o aluno a perceber o conceito envolvido, e não a decorar definições ou regras e equações para as quais conseguirá atribuir pouco ou quase nenhum significado. Baseado nessas orientações Paiva 2009, p.83, inicia o capítulo que trata do conceito de função da seguinte maneira:

> Toda característica que pode ser expressa por uma medida é chamada de **grandeza**. São exemplos de grandeza: comprimento, área, volume, velocidade, pressão, temperatura, profundidade, tempo, massa e vazão. A variação da medida de uma grandeza associada a um objeto depende da variação das medidas de outras grandezas, por exemplo: o crescimento de uma planta depende do tempo; a taxa de evaporação das águas de um rio depende da temperatura. Para estudar essas dependências podemos recorrer a equações matemáticas que relacionam as grandezas envolvidas.

Fazendo assim, uma abordagem que tenha um significado relacionado com o mundo real e que seja de fácil compreensão por parte dos alunos, de acordo com a sugestão da (OCNEM).

Aqui a abordagem ao estudo das funções será feita como em THOMAS (2009), "Uma função de um conjunto D em um conjunto Y é uma regra que associa a um *único* elemento $f(x) \in Y$ a cada elemento $x \in D$", pelo fato de tal definição, ser exposta de maneira precisa e concisa, porém várias outras literaturas podem ser pesquisadas sobre tal tema, como por exemplo, DANTE (2014), PAIVA (2009), STWERT (2007).

Diz-se nesse caso que D é o domínio da função f, Y é o contradomínio de f e que $f(x) = y$, com y pertencente a um subconjunto de Y, conjunto que é chamado de conjunto imagem (Im) de f, será a lei de formação da função f. Em alguns casos, é possível ter alguma restrição no domínio dependendo do contexto em que é apresentada a função. Por exemplo, considerando a função $A(l) = l^2$, que fornece a área de um quadrado em função de seu lado, tem-se que o valor de l, está restrito ao conjunto dos números reais positivos, pois a medida do lado de um quadrado não assume valores negativos nem nulo.

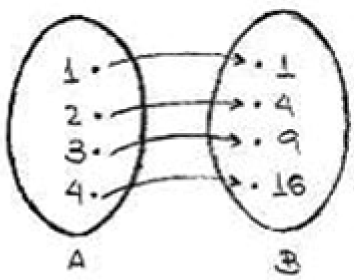
REPRESENTAÇÕES DE UMA FUNÇÃO

Pode-se representar uma função através de uma equação que explicite sua lei de formação, diagramas relacionados por setas, tabelas, gráficos ou até um conjunto de pares ordenados. Nesta seção discute-se alguns tipos de representações elencando-se cada um dos casos a seguir.

3.3 REPRESENTAÇÃO POR DIAGRAMAS

Uma função utilizando diagramas de dois conjuntos A e B, relaciona os elementos de A e B por setas ligando-os, de modo que A seja o domínio, B o contradomínio e f seja a relação entre oso conjuntos A e B. Por exemplo:

Sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1,4,9, 16\}$, a função $f{:}A\square B$, será representada por:



$f{:}A\square B$, O autor 2016.

Pode-se perceber que $Im = \{1,4,9,16\}$, pois $1,4,9,16$ são os elementos do contradomínio que recebem a relação f.

REPRESENTAÇÃO POR UMA TABELA

É possível escrever os valores que das variáveis dependente e independente em uma tabela, na qual existe uma correspondência entre as duas grandezas descritas em cada uma das colunas, como segue:

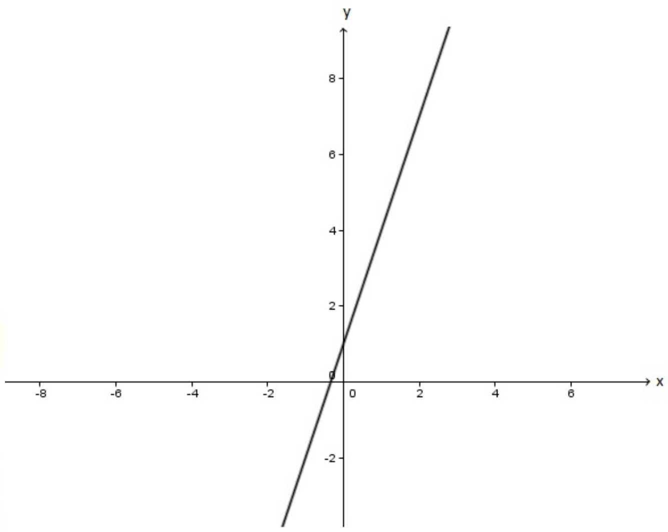
x	$f(x)$
-1	-20
0	-12
1	-2

Neste tipo de representação não se tem clareza, se o domínio é um conjunto que possui medidas discretas ou continuas, ou mesmo que conjunto é o contradomínio. Porém representar uma função por uma tabela muitas vezes ajuda a identificar qual a lei de formação que relaciona os elementos do domínio com os elementos do contradomínio.

REPRESENTAÇÃO POR UM GRÁFICO

Neste tipo de representação cada ponto pertencente à função será representado por um par ordenado no qual $(x, y) = (x, f(x))$. Assim o gráfico de uma função f será o lugar geométrico de todos os pontos $(x, f(x))$.

Por exemplo: Seja f:R□R; $f(x) = 3x + 1$. Sua representação gráfica será:



Representação gráfica da função $f(x) = 3x + 1$, *o autor* 2016.

Um fato importante é que o domínio está representado no eixo x e o contradomínio no eixo y. Também podemos ter uma preocupação conveniente na hora de desenhar o gráfico que representa uma função. Esta preocupação seria qual o traçado formado entre os pares ordenados, e a resposta será obtida posteriormente pela operação de diferenciação. Por enquanto, é suficiente dizer que, caso o domínio da função seja um conjunto continuo, ligam-se os pontos encontrados da forma mais conveniente possível.

Observa-se que, dada uma curva qualquer no plano xy, ela nem sempre representa o gráfico de uma função. Pois, se f *é* uma função, um ponto de seu domínio só poderá ter uma imagem, ou seja, só poderá estar relacionado com um elemento do contradomínio pela função f. Assim a curva representa o gráfico de uma função se ao traçarmos uma reta qualquer, vertical ela corta a curva exatamente em um ponto, caso o domínio da função não esteja definido neste ponto a tal reta pode não cortar a curva.

FUNÇÕES DEFINIDAS POR MAIS DE UMA SENTENÇA

Algumas funções são definidas por mais de uma lei de formação, pois estão definidas para partes diferentes de seu domínio. Tem-se como exemplo de uma função definida por duas sentenças a função $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R};\ f(x) = \begin{cases} x^2, & se\ x < 1 \\ x + 2, & se\ x \geq 1 \end{cases}$. A representação gráfica desta função não é uma curva contínua, sua representação dá um "salto" no ponto $x = 1$, do valor $f(x) = 1$, que teríamos caso usássemos a equação, $f(x) = x^2$, para o valor $f(x) = 3$, quando usamos a equação $f(x) = x + 2$, tendo como $Im_f = (-\infty, 1) \cup [1, +\infty)$.

APLICAÇÕES

1) Uma agência de viagens vende pacotes turísticos coletivos com destino a Fortaleza. Um pacote para 40 clientes custa R$ 2000,00 por pessoa e, em caso de desistência, cada pessoa que permanecer no grupo deve pagar mais R$ 100,00 por cada desistente do pacote de viagem. Dessa forma, para que essa agência obtenha lucro máximo na venda desse pacote de viagens, qual o número de pessoas que devem realizar a viagem?

Resolução:

Sendo x a quantidade de pessoas, o preço total é dado pela quantidade de pessoas vezes o preço por pessoa, que é 2000 mais 100 por desistente.

C(x) = x(2000 + 100(40 – x))
C(x) = x(2000 + 4000 – 100x)
C(x) = x(6000 – 100x)
C(x) = 6000x – $100x^2$

Dessa forma temos uma função do 2º grau. Como em nossa função o valor de a = -100 < 0, o gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo, portanto possui valor máximo, e é exatamente o valor do x do vértice, ou seja:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-600}{2(-100)} = \frac{-6000}{-200} = 30$$

Resposta: O número de pessoas que devem realizar a viagem são 30 pessoas.

2) Os diretores de um centro esportivo desejam cercar com tela de alambrado o espaço em volta de uma quadra de basquete retangular. Tendo recebido 200 metros de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do terreno a cercar com tela para que a área seja a maior possível?

Resolução:

Podemos considerar o comprimento dado por $(100 - x)$ e a largura x.
Temos que a área será dada por $(100 - x)x = 100x - x^2$.
A área máxima procurada é o valor máximo da função $f(x) = -x^2 + 100x$.
A área assume o valor máximo no vértice da parábola, ou seja:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-1)} = \frac{-100}{-2} = 50$$

Observamos então que a área máxima a ser calculada é uma região quadrada cujo lado mede 50 metros.

3) A trajetória da bola, num chute a gol, descreve uma parábola. Supondo que sua altura **h,** em metros, **t** segundos após o chute, seja dada por $h = -t^2 + 6t$.
a) Em que instante a bola atinge a altura máxima?
b) Qual é a altura máxima atingida pela bola?

Resolução:

a)Ponto máximo: $V(t_v, h_v)$

A bola atinge a sua altura máxima quando:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Ou seja, a bola atinge a altura máxima 3 segundos após o chute.

b) A altura máxima atingida pela bola é:
$h_v = -(3)^2 + 6.3 = -9 + 18 = 9$

Logo, a altura máxima atingida pela bola é 9 metros.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O nível de evolução da raça humana, através dos tempos, sempre esteve relacionado com a capacidade de adquirir e transmitir conhecimentos, isto é, aprender e ensinar. Nesse contexto, consideramos e indicamos nosso trabalho para Professores de Matemática uma oportunidade diferenciada para investigar outras conexões entre conteúdos tradicionalmente estudados, quer sejam nas séries de ensino fundamental, médio ou nos cursos de graduações, refletiu-se neste trabalho sobre a resolução de problemas de funções e suas aplicações. Entendeu-se como uma característica inerente às atividades de ensino de um educador em matemática, a busca permanente pela aplicação dos conteúdos ensinados em qualquer período da formação acadêmica. O curso de graduação em Matemática deve ser um período onde o estudante, futuro professor, receba uma formação eclética que proporcione o aprofundamento dos conhecimentos e possibilite sua interação com os diversos meios educacionais, sociais, etc.

Ao término deste trabalho, consideramos relevantes as análises realizadas nesse trabalho, onde o docente da disciplina de Matemática trabalhe Funções, explorando situações do cotidiano, utilizando questões contextualizadas voltadas à realidade do aluno para chamar mais a atenção e despertar interesse dos discentes, serve também, para sublinhar os componentes onde a aprendizagem deve ser significativa. Isto explica todo o estudo realizado sobre os diversos tipos de funções que por sua vez representarão o modelo a ser estudado.

Ensinar é mostrar que o que está sendo ensinado pode se converter em oportunidades logo adiante, nas ocorrências diárias, na escola, na saúde, na segurança, nos meios de transportes, na economia, nos esportes, na política, etc.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ÁVILA G. **Evolução do conceito de função e de integral**. In: publicação da Sociedade Brasileira de Matemática. p. 14-46, julho 1985, São Paulo.
- BRASIL 1; **Orientações Curriculares para o Ensino Médio, Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias**, Brasília: MEC. SEB, 2006
- BRASIL 2, **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental: Matemática. Brasília: Ministério da Educação, 1998.
- DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Contexto e Aplicações/ Luiz Roberto Dante**. 2ª Edição, São Paulo. Editora Ática, 2014.
- PAIVA, Manoel. **Matemática-Paiva/Manoel Paiva**. 1ª Edição, São Paulo. Moderna, 2009.
- STWERT, Ian. **Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años.** Barcelona**.** Editora Crítica, 2007.