ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO PARA O CÁLCULO DE ÁREAS DE SUPERFÍCIES EM MALHAS QUADRICULADAS E PONTILHADAS POR ALUNOS DO NONO ANO

Demettrius Giulliano Barros Siqueira; Ricardo Tibúrcio dos Santos

Instituto Federal de Pernambuco, demettrius.siqueira@gmail.com
Instituto Federal de Pernambuco, ricotiburcio@hotmail.com

Resumo:
Neste artigo temos o objetivo de refletir sobre as relações existente entre as dificuldades dos alunos no cálculo de áreas de figuras planas representadas em malhas. Dentre os vários tipos de malhas, decidimos utilizar as quadriculadas e as pontilhadas. A pesquisa foi realizada em uma escola pública da cidade de Garanhuns, no interior de Pernambuco, e que possui bom rendimento nas avaliações externas estaduais e no ENEM. As turmas escolhidas foram os nonos anos, uma vez que o conceito de área já estaria, a priori, construído. Percebemos que nesta fase de escolarização, os alunos tendem a utilizar mais as fórmulas do que os outros tipos de resolução existentes, no entanto não evidenciou-se diferenças significativas nas resoluções dos alunos referentes ao tipo de malhas nas quais as superfícies estavam representadas. Por outro lado, algumas dificuldades existentes em alunos dos sextos anos, como mostram algumas pesquisas, ainda se mantém presentes nos alunos do nono ano.
Palavras-chave: Malha Quadriculada; Malha Pontilhada; Áreas.

Introdução

As Grandezas e Medidas (G&M) estão fortemente ligadas à vida em sociedade, desde as mais antigas civilizações até os tempos pós-modernos nos quais vivemos. Os mesopotâmicos já sabiam calcular o volume de silos de grãos necessários à armazenagem das colheitas; os egípcios desenvolveram métodos para o cálculo de áreas às margens do Nilo que eram divididas para produção agrícola; gregos utilizaram-se de propriedades geométricas para estimar áreas e volumes por meio de comparações, como as quadraturas, por exemplo. Atualmente, o conceito de área pode ser utilizado, por exemplo, para estimar a quantidade de pessoas em um certo local, por meio de proporcionalidade ou, ainda, em situações mais rebuscadas, como na utilização de semáforos inteligentes.

Dessa maneira, é evidente a utilização das grandezas como ferramenta necessária na resolução de problemas de cunho social. Em particular, a área é um dos conceitos que podem ser utilizados com essa finalidade. No entanto, vale salientar que, de um ponto de vista histórico, não necessariamente o percurso deste conceito está relacionado a aplicações práticas, mas também podemos fazer essa análise do ponto de vista do desenvolvimento da própria matemática. Um exemplo para isso é o desenvolvimento, no século XVIII, do cálculo diferencial e integral, que possibilitou a ampliação da quantidade de superfícies que poderiam ter suas áreas medidas (Bellemain, 2000).

Entre os fatores que justificam o estudo das G&M nos anos iniciais e finais, podemos listar três, que foram discutidos em Lima e Bellemain (2010) e que estão, em certa medida, contidos nas colocações anteriores: *a presença nas práticas sociais*, que pode ser verificada nas brincadeiras das crianças, no processo do uso de estimativas; *conexões com outras disciplinas*, como por exemplo nos problemas que envolvem questões biológicas sobre gestações (grandeza tempo), sobre movimentos (grandeza velocidade ou comprimento) etc; *articulações internas com outros campos da matemática*, como por exemplo a necessidade de criação do conjunto dos números racionais (e mais tarde, reais) para utilização em medições dos mais diversos tipos de grandezas ou, ainda, utilizando o conceito de área como ferramenta na demonstração de propriedades e teoremas, dentre outras possibilidades. Corrobora com esse aspecto os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) ao afirmarem que as G&M possuem "forte relevância social devido ao seu caráter prático e utilitário, e pela possibilidade de variadas conexões com outras áreas do conhecimento". (Brasil 1998, p. 52).

O modelo teórico adotado por nós é o mesmo das pesquisadoras Douady e Perrin-Glorian (1989). Consideramos a área como uma grandeza. Ou seja, quando calculamos a medida da área de um quadrado de lado 2 metros, iremos definir o número 2 como sendo a medida da área, o par 2 m² como sendo a grandeza área. Dessa maneira, podemos diferenciar claramente área de superfície, visto que superfícies distintas podem ter mesma área, como também há distinção entre área e número, uma vez que mudando a unidade de medida, mudamos a medida da área, mas não a quantidade de espaço ocupado pela superfície.

Algumas pesquisas que tomam a área como grandeza podem ser encontradas, no entanto não vemos uma discussão maior sobre os procedimentos de resolução dos alunos quando utilizamos o mesmo problema para malhas distintas. Dentre os vários estudos na área, podemos citar Ochi (*et al*, 1997), que apresenta várias atividades envolvendo malhas quadriculadas para construção de significados em diversos conceitos. Em particular, para a área, percebe-se que os alunos tem dificuldade em perceber que figuras com formas diferentes podem ter a mesma área.

Outra pesquisa relevante neste aspecto é a de Pessoa (2010), que buscou entender as potencialidades da utilização da malha quadriculada como ferramenta para o cálculo de áreas de figuras com alunos do sexto ano. Percebeu-se que boa parte dos alunos dominam os cálculo que envolvem uma quantidade inteira de vezes de superfícies unitárias, quando essas não estão “cortadas”. Por outro lado, em situação que envolvem composição e decomposição de figuras, uma parte considerável dos estudantes não conseguem acertar por não terem bem construídas as noções relativas a estes conceitos.

O conceito de grandeza, em geral, pode variar de autor para autor. No entanto, iremos adotar grandeza como um atributo ou uma propriedade intrínseca a um conjunto de objetos. Para efetuar e medição da grandeza área, que é o nosso foco, podemos utilizar uma função medida que associa para superfície um número, ou então por meio da escolha de uma unidade arbitrária para contar quantas vezes esta unidade “cabe” dentro da superfície dada.

Metodologia

Levando em conta o que dissertam os documentos, acerca das expectativas de aprendizagem com relação às Grandezas e Medidas nos anos finais do ensino fundamental e a discussão feita anteriormente, decidimos diagnosticar as concepções que os alunos do nono ano possuem quando são colocados para resolverem problemas relacionados ao cálculo de áreas em uma malha.

Mais em particular, estávamos buscando entender se a variável malha pode influenciar no tipo de resolução, por parte de alunos do nono ano, no cálculo da medida da área de uma determinada figura dada. Decidimos, portanto, utilizar a malha quadriculada e a pontilhada. O motivo de ter sido escolhido o nono ano é pelo fato destes alunos estarem no último momento dos anos finais, se preparando para adentrar no ensino médio. Desta maneira, acreditamos que o conceito de área como grandeza já deve estar construído.

Outro ponto importante que justifica a escolha é que os alunos citados farão neste ano, no estado de Pernambuco, a prova do Sistema de Avaliação da Educação Básica de Pernambuco (SAEPE), que é uma avaliação de larga escala realizada pela Secretaria Estadual de Educação de Pernambuco nos nonos anos do ensino fundamental e terceiros anos do ensino médio, buscando avaliar o desempenho nas disciplinas de língua portuguesa e matemática. Desta maneira, as escolas se preparam, em certa medida, para esta prova, tendo em vista que ela também tem o papel de classificar as escolas dentro do estado, de acordo com seu rendimento, dentre outros objetivos.

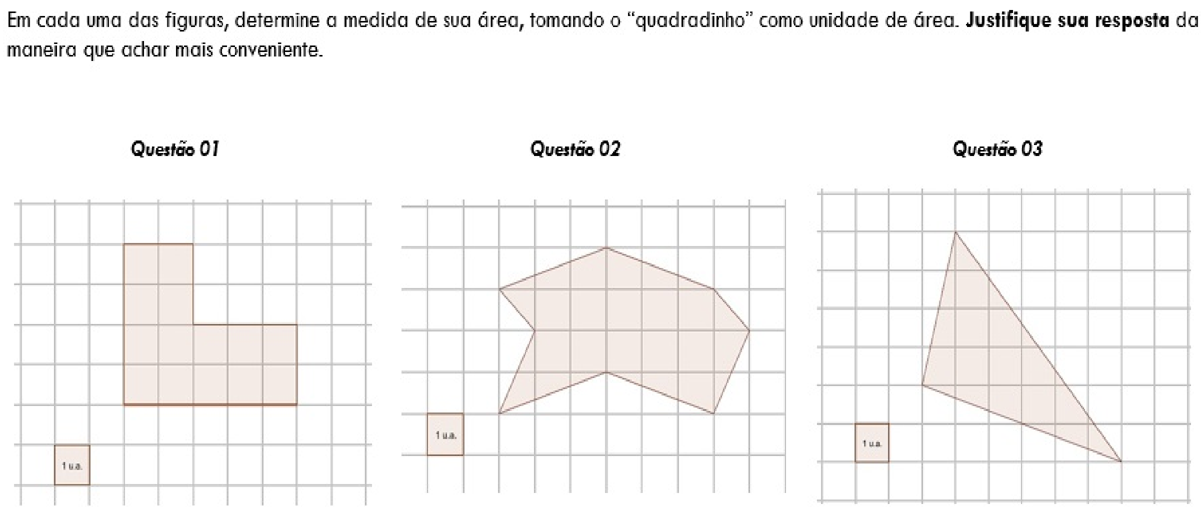
As atividades propostas foram aplicadas em uma escola pública do município de Garanhuns, no interior do estado de Pernambuco, que está entre as melhores do estado nas avaliações externas do SAEPE e que também lidera, no momento, o ranking de escolas mais bem colocadas nos dois últimos Exames Nacionais do Ensino Médio (ENEM). Esta instituição conta com duas turmas de nonos anos, que funcionam apenas no período da manhã, tendo um quantitativo de 74 alunos matriculados no ano letivo de 2016. A coleta dos dados foi realizada no mês de agosto de 2016 por meio das atividades supracitadas.

No total, foram aplicadas duas atividades com seis alunos (três de cada turma), escolhidos pelo aplicador, dentre os que se propuseram a participar. Um dos requisitos que adotamos para seleção da amostra é que fossem alunos com rendimentos médios com um pequeno desvio-padrão, entre si, de modo que os conhecimentos prévios deles, de acordo com o método avaliativo da professora, fossem razoavelmente similares. A docente da turma acompanhou o sorteio dos estudantes que estavam dentro das condições especificadas à participar e a resolução das atividades por parte dos alunos, mas sem poder intervir em seus procedimentos de cálculo.

Cada atividade possuía 03 questões. A primeira delas envolvia o cálculo da área de uma figura que tinha uma quantidade inteira de vezes de superfícies unitárias, além destas preencherem sem nenhum tipo de falta ou excesso a figura em questão. Na segunda, a superfície não poderia ser preenchida apenas por superfícies unitárias, levando a aluno a pensar em soluções alternativas para sua resolução, como por exemplo, a translação ou rotação de partes da superfície para outro local da malha, buscando assim construir uma forma mais “homogênea” e “ladrilhável”. Por fim, na terceira questão, era dada uma figura cuja área não poderia ser calculada por meio da contagem de superfícies unitárias interiores. Para este problema, os alunos poderiam usar tanto o procedimento da questão anterior, quanto a decomposição-composição de figuras. Outro fator que deve ser levado em conta é que neste quesito, a forma não está em sua maneira prototípica, ou seja, não é dada como geralmente trazem os livros didáticos, por exemplo.

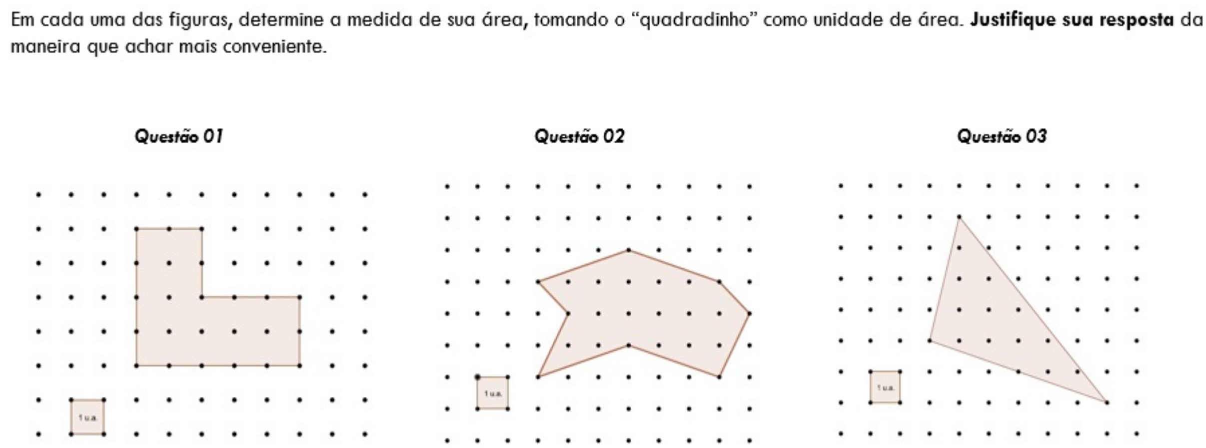
As atividades podem ser vistas abaixo

Figura 01: questões na malha quadriculada.



Fonte: autor

Figura 02: questões na malha pontilhada.



Fonte: autor

Para resolução das atividades os estudantes foram agrupados em uma sala de aula a parte, em um contra turno previamente acordado entre o pesquisador, professor e alunos. Os alunos não puderam trocar informações sobre os procedimentos de resolução individuais, uma vez que isso traria problemas a análise futura. Com relação à duração, após uma conversa com a professora, chegou-se ao intervalo de tempo de 30 minutos, no máximo, para cada estudante colocar suas impressões e tentar responder às questões propostas na atividade.

Resultados e discussões

As duas atividades propostas possuíam e questões, cada. A única diferença entre elas era exatamente a malha utilizada, que poderia ser quadriculada ou pontilhada. A título de codificação, faremos a seguinte correspondência:

Figura 03: codificação das questões por tipo de malha.

Quadriculada
- Primeira questão (Q.1)
- Segunda questão (Q.2)
- Terceira questão (Q.3)

Pontilhada
- Primeira questão (P.1)
- Segunda questão (P.2)
- Terceira questão (P.3)

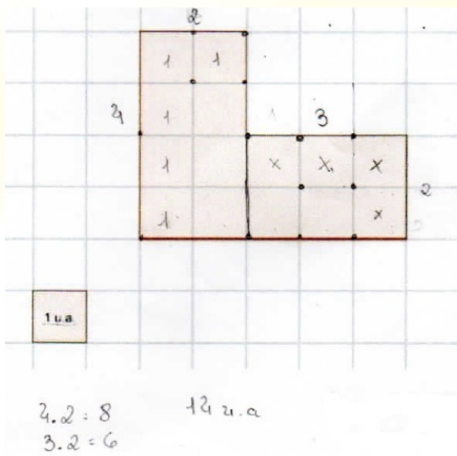
Fonte: autor

Com relação aos estudantes, os três que responderam a atividade com malha quadriculada serão denominados A, B e C, enquanto que os que utilizaram malha pontilhada, serão D, E e F. Ou seja, se o aluno A tiver respondido a segunda questão de malha quadriculada, estaremos falando do A.Q.2, enquanto que se o aluno F respondeu a primeira questão de malha pontilhada, ele será o F.P.1, e assim sucessivamente.

<u>Questão 01</u>

A primeira questão, como pode ser conferido anteriormente, é que está na posição mais prototípica, de modo que todas as unidades cabem completamente dentro da superfície dada. Esse tipo de situação favorece o processo de medição da área por meio da contagem de superfícies unitárias, mas isso não impede vários outros tipos de resoluções. A seguir, temos as respostas dos alunos A, B e C para esta questão.

Figura 04: Resposta B.Q.1

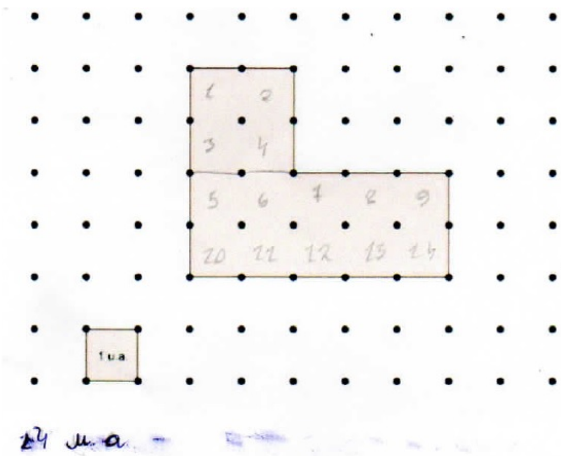


(83) 3322.3222
contato@conedu.com.br
www.conedu.com.br

Como justificativa, B escreve: *"Formei dois quadriláteros a partir da figura representada. Um com base 2 e altura 4 e outro de base 3 e altura 2. Fazendo a área do primeiro (8) e do segundo (6), somei as áreas e deu 14".*

Percebe-se que nesta atividade que o aluno utiliza o procedimento de decomposição, dividindo a figura original em dois retângulos e, depois, utilizando a fórmula que fornece a medida da área da figura. Vale salientar que os alunos A e C também utilizaram a decomposição, no entanto formando novas figuras, mas também utilizando a fórmula ao final. Ou seja, em nenhum dos casos analisados, houve a contagem de superfícies unitárias de uma maneira direta, unidade a unidade. Na malha pontilhada, uma das resoluções pode ser explicitada a seguir:

Figura 05: Resposta E.P.1



Como justificativa, E escreve: "*Se um quadrado tem uma unidade de área, então cada lado mede 1. Então, tracei uma reta transformando a figura em um quadrado e um retângulo. O retângulo tem 10 u.a. e o quadrado tem 4 u.a., então, ao somar, obtive o resultado 14u.a.*"

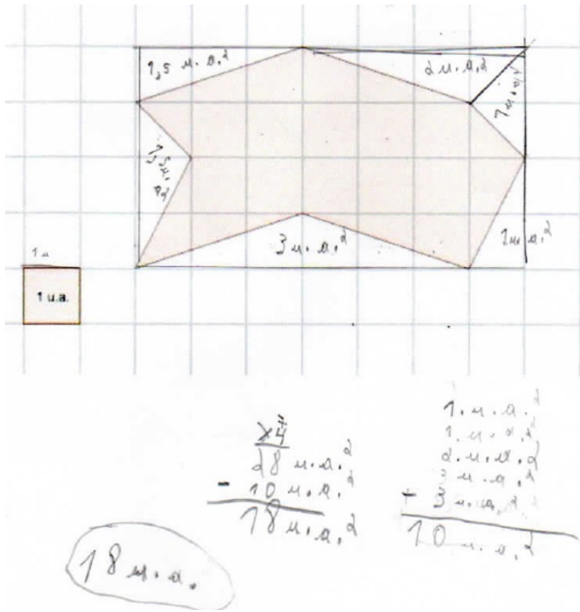
Este foi o único estudante, dentre os 6, que utilizou a contagem de superfícies unitárias na primeira questão; os outros 5 usaram a decomposição com utilização da fórmula. Esse é um indicativo de que nesta etapa de escolarização, os alunos já estão, provavelmente em sua maioria, familiarizados com as fórmulas e se sentem mais seguros ao resolverem com ela. Nesta questão, todos os alunos chegaram à resposta correta.

<u>Questão 02</u>

A segunda questão já se mostra mais desafiadora, visto que as superfícies unitárias já não cabem completamente dentro da figura, de modo que algumas estão cortadas em certas frações que não são fáceis, uma a uma, de serem medidas. Neste caso, uma solução possível é utilizar a composição/decomposição da figura, por meio da subtração ou adição de áreas, dependendo da resolução adotada.

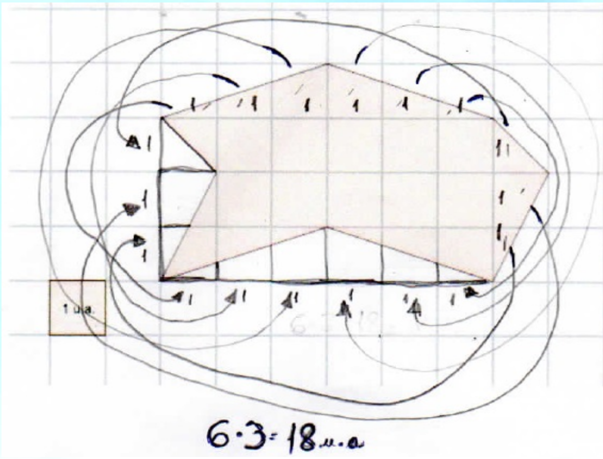
A utilização da fórmula que resulta na área do triângulo e do retângulo também podem ser úteis, após o processo de decomposição. Abaixo temos as resoluções dos alunos.

Figura 06: Resposta A.Q.2



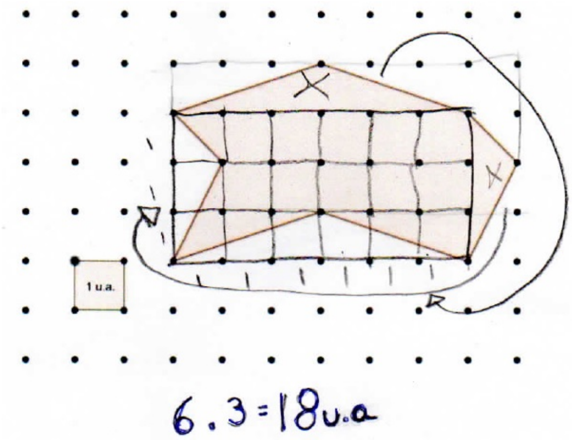
Desta vez o aluno preferiu utilizar o método da decomposição, calculando a área do retângulo que continha toda a superfície dada e subtraindo das partes eram do retângulo, mas não da superfície. Tendo em vista que o aluno não deixa claro como encontrou as áreas em branco, entendemos que ele utilizou, na maioria dos casos, a fórmula da área do triângulo, pois em todos eles a base a altura são conhecidas. Outro fator que nos leva a acreditar nisto é o fato de que os triângulos em questão, em sua maioria, não estarem sendo representados como a metade de um paralelogramo, retângulo ou quadrado, como é de costume. Por outro lado, tivemos uma resolução diferente, por composição, como pode ser verificado abaixo.

Figura 07: Resposta C.Q.2



Os alunos que pegaram a malha pontilhada tiveram resoluções idênticas, utilizando composição ou decomposição, como pode ser verificado abaixo.

Figura 08: Resposta D.P.2

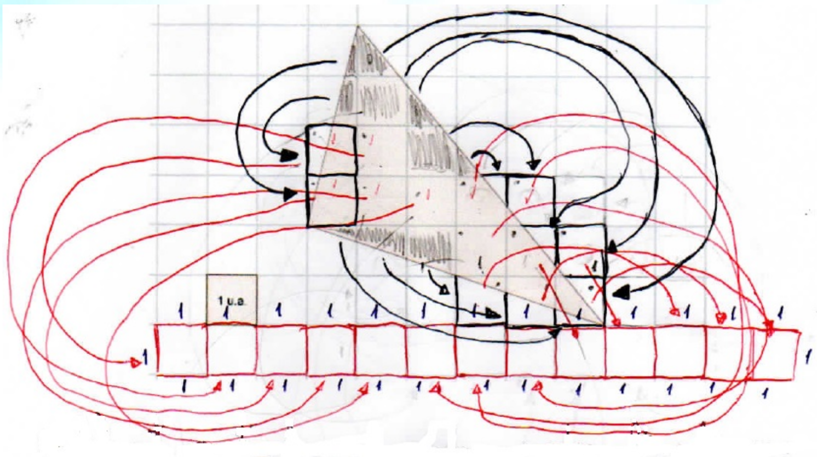


Para esta questão, assim como na primeira, não tivemos nenhum erro por parte dos alunos. Ou seja, podemos concluir que mesmo que as figuras não estejam em sua representação prototípica, os alunos desse ano não sentem as mesmas dificuldades que alunos do ciclo anterior. Isso é importante, uma vez que permite conjecturar que o trabalho com malhas, até este tipo de questão, pode ter sido satisfatório nos anos anteriores. Por fim, ainda percebe-se a recorrência à utilização de fórmulas.

<u>Questão 03</u>

No caso da última questão, temos um triângulo em posição não prototípica, além de superfícies unitárias não completamente contidas na figura dada. De todas as questões, esta foi a que apresentou a maior quantidade de erros. Das seis respostas, três estavam incorretas. Em geral, as resolução também envolveram a tentativa de compor retângulos a partir das figuras dadas para depois, utilizando a fórmula ou a contagem se efetuar a medição. Mas vale salientar que houve também uma tentativa de resolução por meio de rotação (supondo que o triângulo dado era retângulo), além de uma mudança de superfície unitária, para a metade da superfície dada. Vejamos abaixo:

Figura 09: Resolução C.Q.3



A composição de quadrados foi uma alternativa encontrada por este aluno. O estudante escreveu, nesta resolução: "*A linha preta representa a formação dos quadrados com os pedaços soltos na figura como indicam as setas pretas. Depois de formados, foram montados 13 quadrados que em um mesmo plano foram colocados, como indica a caneta vermelha. Depois, multiplica b* x *a, que foi igual a 13 u.a.*"

Já os discentes que cometeram equívocos, fizeram da seguinte maneira:

Figura 10: resolução B.Q.3

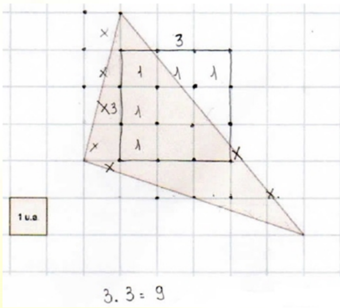


Figura 11: Resolução D.P.3

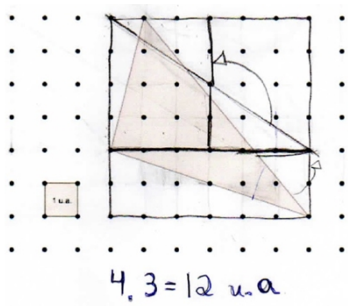
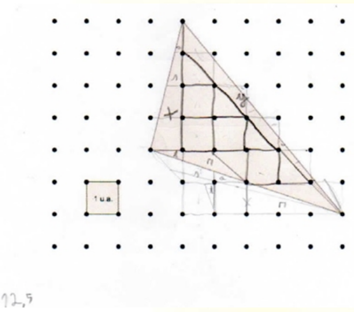


Figura 12: Resolução F.P.3



O estudante B.Q.3 justificou sua resolução da seguinte maneira: "*Como na anterior, formei uma figura a partir das outras, formando um quadrado de base 3 e altura 3, tendo assim 9 de área.*".

Já F.P.3 afirma: "*Eu tentei fazer essa questão usando lógica, já que não achei outro modo; eu 'parti' pedaços do triângulo e os 'encaixei'*". O aluno D.P.3 não justificou sua escolha.

Como percebe-se, independente da malha ser quadriculada ou pontilhada, os alunos tiveram mais dificuldade na resolução da terceira questão. Mesmo eles cursando o nono ano, vemos resultados semelhantes aos de Pessoa (2010), que afirma que os alunos do sexto ano tiveram muitas dificuldades em resolver questões desta natureza.

Considerações finais

O eixo das Grandezas e Medidas, apesar de estar muito presente na vida cotidiana e prática dos alunos desde muito cedo, ainda apresenta certos obstáculos de aprendizagem por parte dos discentes. Em particular, o conceito de área pode ser um gerador de dificuldades futuras, se não for bem trabalhada nos anos iniciais e finais. Uma das maneiras de se construir o conceito de área como grandeza é partir de situações que diferenciem área de perímetro, de superfície e de número. Uma das ferramentas que podem ser úteis nessas tarefas são as malhas quadriculadas e pontilhadas.

Decidimos verificar como os procedimentos de resolução dos alunos de um nono ano poderiam variar a partir do momento que variávamos apenas a malha, de quadriculada para pontilhada. Percebemos que essa variação não é geradora de diferenças significativas no processo de medição de área de uma superfície dada, nessa fase de escolarização.

Por outro lado, evidenciamos que em geral, nas malhas pontilhadas, os alunos tendem a ligar os pontos, buscando formar uma malha quadriculada. Isso mostra que provavelmente eles se sintam mais à vontade com esse tipo de malha, que traz mais referências para a figura, no momento de sua resolução. Assim como uma malha pontilhada traz mais referência que uma folha em branco.

Mesmo tendo a maioria das pesquisas com malhas quadriculadas voltadas para as turmas de sexto ano, percebemos que certas dificuldades em se falando do nono ano continuam resistindo. Dentre elas, a principal é a relacionada ao cálculo da área de figuras que necessitam de um grau de abstração maior para formação de uma superfície "mais homogênea", por meio de rotações ou translações, buscando compor ou decompor figuras para então adicionar ou subtrair áreas.

Referências

BELLEMAIN, P. M. B. **Estudo de situações problema relativas ao conceito de área**. Anais do ENDIPE, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/ SEF, 1998.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN M. J. **Un processos d'apprentissage du concept d'aire de surface plane.** In: Educational Studies in Mathematics. vol.20, n. 4, p. 387 424, 1989.

LIMA, P. F.; BELLEMAIN, P. M. B. **Grandezas e Medidas.** In: João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho. (Org.). Matemática: Ensino Fundamental (Série Explorando o ensino). Brasília: Ministério da Educação: Secretaria da Educação. Básica, 2010, v. 17.

OCHI, F. H.; PAULO, R. M.; YOKOYA, J. H.; IKEGAMI, J. K. **O uso de quadriculados no ensino da Geometria**. Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática – CAEM. Instituto de Matemática e Estatística – IME – USP. 3ª edição. São Paulo, 1997.

PESSOA, G. S. **Um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada**: influências de algumas variáveis. Dissertação, 146 f. Recife, 2010.