

ÂNGULOS NOTÁVEIS NOS LIVROS DIDÁTICOS: UMA ANÁLISE PRAXEOLÓGICA.

Jessie Heveny Saraiva Lima (1); Jesirreila Melo Souza do Nascimento (2); Acylena Coelho
Costa (3).

*Universidade do Estado do Pará, Jessieheveny7@gmail.com (1) Universidade do Estado do Pará,
nascimentoreila@gmail.com (2) Universidade do Estado do Pará, acylena@gmail.com (3).*

RESUMO: Este trabalho tem por objetivo apresentar uma análise praxeológica de questões referentes ao conteúdo de trigonometria com ênfase no tópico de Ângulos Notáveis de três livros didáticos de matemática do 1º ano do ensino médio, para identificar as tarefas, técnicas, tecnologias e teorias de exercícios resolvidos e exercícios propostos, além de identificar algumas dificuldades que alunos têm a partir do conteúdo escolhido. Pela análise feita observamos que as tarefas dos livros são apresentadas com clareza e levam o aluno a um bom entendimento da questão, além de apresentar exercícios propostos e resolvidos semelhantes, tornam esse recurso um orientador para o estudante.

Palavras-chave: Educação Matemática. Análise praxeológica. Trigonometria.

Introdução

O livro didático no processo de ensino e aprendizagem é considerado como um dos principais guias de conhecimento para o aluno e para o professor. Segundo Silva (2014) é importante que o aluno se insira cada vez mais em um processo que tem por objetivo o seu aprendizado de maneira mais atuante, e para isso o livro didático torna-se um recurso auxiliador na apresentação dos conteúdos contribuindo para que isso aconteça, pois o livro traz atividades de situações-problema em que o aluno possa perceber a utilização da matemática, por exemplo, no seu cotidiano.

Apesar do livro didático ser um importante e contribuinte para tornar o processo de ensino e aprendizagem significativo, além de contemplar e aproximar os alunos de sua realidade, tem-se, ainda, muitos estudantes que sentem dificuldades no conteúdo de matemático. Segundo Oliveira (2006), algumas dificuldades encontradas pelos alunos são referentes aos obstáculos didáticos e todas as habilidades e conceitos que não foram bem trabalhados nas séries anteriores, o que interfere na hora em que eles necessitam efetuar alguma tarefa de trigonometria, como usar os conhecimentos de proporção para se trabalhar com as razões trigonométricas. Além das dificuldades citadas por Oliveira (2006), Dionizio e Brandt (2011) apontam a dificuldade na escolha da razão trigonométrica seno, cosseno e tangente e na identificação da posição dos catetos de acordo com o ângulo.

O interesse por esse estudo surgiu devido às dificuldades que os alunos têm com o conteúdo de trigonometria, mesmo com o uso de livros didáticos em sala de aula. Diante

desse contexto, surgiu o interesse em desenvolver uma análise praxeológica em três livros didáticos de matemática do 1º ano do ensino médio, de questões referentes ao conteúdo de trigonometria com ênfase no tópico de Ângulos Notáveis para identificar as tarefas, técnicas, tecnologias e teorias de exercícios resolvidos e exercícios propostos, além de identificar algumas dificuldades que alunos têm a partir do conteúdo escolhido, tomando por base estudos feito por Dionizio e Brandt (2011) e Oliveira (2006).

Nesse sentido, delimitou-se a seguinte questão de pesquisa: Qual a organização praxeológica existente em livros didáticos de matemática do ensino médio na abordagem do conteúdo sobre Ângulos Notáveis? E para tal questão analisaremos três livros didáticos de Matemática do Ensino Médio.

Metodologia

Este trabalho relata uma pesquisa do tipo bibliográfica a qual de acordo com Severino (1941) é realizada a partir de estudos feitos por meio de livros, artigos, teses, entre outros. Tal pesquisa, conforme o autor, propicia encontrar respostas específicas em busca de novos enfoques e com um caráter inovador.

Foram escolhidos três livros didáticos de matemática, especificamente livros do 1º ano do ensino médio, que obedecem aos critérios do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), são eles: L1: *Coleção novo olhar, 1. Ed. 2010*; L2: *Matemática: contexto e aplicações, 2. Ed. 2013*; L3: *Matemática: ciência e aplicações, 9. Ed. 2016*.

Resultados e Discussão

A seguir mostraremos uma síntese das obras levantadas acerca das dificuldades na aprendizagem de Trigonometria com ênfase em Ângulos Notáveis, posteriormente uma breve discussão sobre a Teoria Antropológica do Didático e por fim mostraremos as análises feitas a partir dos livros didáticos de Matemática do 1º ano do ensino médio e seus respectivos resultados.

➤ Trigonometria: Ângulos Notáveis

Um dos conteúdos matemáticos alvo de muitas dificuldades por parte dos alunos é a Trigonometria, desde seus tópicos iniciais os alunos já mostram encontrar diversos obstáculos no processo de aprendizagem. Nesse sentido, os estudos de Oliveira (2006) e os de Dionizio e Brandt (2011) apontam essas dificuldades, além disso, ambos afirmam que uma das raízes dessas dificuldades é a forma abstrata como é apresentado o conteúdo.

No que tange ao tópico de Ângulos Notáveis, Oliveira (2006) aponta dificuldades não apenas no que se refere a conteúdos prévios como o uso da proporção, mais ainda na escolha da razão trigonométrica correta a ser utilizada. Outra dificuldade identificada pelo autor é manifesta no momento em que é necessário posicionar os catetos em relação aos ângulos dados, ou seja, o aluno apresenta problemas ao verificar se o cateto é oposto ou adjacente ao ângulo.

Dionizio e Brandt (2011), também indicam que os alunos têm dificuldades em estabelecer se a razão a ser utilizada é seno, cosseno ou tangente. Além disso, afirmam que outro problema está relacionado ao ato de diferenciar as medidas de ângulos das medidas de comprimento. Outra dificuldade extremamente perceptível é a conversão da linguagem natural à linguagem figural, visto que, os alunos não apresentam facilidade em questões nas quais predomina a linguagem natural.

Por isso tudo, é importante que esse tópico seja abordado em estudos com o intuito de identificar as dificuldades e contribuir para que sejam superadas. É em função disso que faremos a análise praxeológica indicada pela Teoria Antropológica do Didático, na abordagem do conteúdo sobre razões trigonométricas com Ângulos Notáveis.

Teoria Antropológica do Didático

A Teoria Antropológica do Didático (TAD), conforme aponta Almouloud (2015), foi desenvolvida por Yves Chevallard (1992) e estuda o homem diante de situações matemáticas, nesse sentido, o autor afirma que uma das justificativas, apontadas por Chevallard (1999) para a utilização do termo *antropológico* “é que a TAD situa a atividade matemática e, em consequência, o estudo da matemática no âmbito do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais”, ou seja, o estudo é direcionado à relação individual e social do homem com o fazer matemático.

No entanto, para este trabalho vamos nos concentrar no que se refere à análise das práticas institucionais que pode ser feita “sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas” (ALMOULOU, 2015, p.11). Essas tarefas servem para moldar práticas sociais em geral, mais especificamente a atividade matemática. Além das tarefas, também têm esse fim a técnica, a tecnologia e a teoria.

As tarefas, em se tratando da atividade matemática, são caracterizadas por verbos no imperativo presente nos enunciados de questões ou problemas indicando a ação que deve ser realizada. Assim, para que uma tarefa seja identificada basta verificar os verbos de ação, pois

eles indicam o que precisa ser feito, ou seja, qual a tarefa a ser realizada. Isso é importante no processo de ensino aprendizagem da matemática, pois o aluno precisa saber com clareza o que precisa ser feito para definir de que forma irá realizar a atividade.

Nesse sentido, é necessário que haja técnicas reconhecidas por quem produziu a tarefa para que esta seja cumprida. “A palavra técnica é utilizada como uma ‘maneira de fazer’ uma tarefa, mas não é necessariamente como um procedimento estruturado e metódico ou algorítmico” (ALMOULOU, 2015, p.11), ou seja, para resolver a equação $x^2 - 6x + 4 = 0$, por exemplo, as técnicas são todos os procedimentos - o passo a passo incluindo não só os cálculos, mas também a análise e compreensão dos dados - para se realizar a tarefa designada.

Almouloud (2015) diz que, para Chevallard (2002), esse grupo de técnicas, tecnologias e teorias sistematizadas para a realização de uma tarefa dá origem a uma organização “praxeológica” que converge para o fato de que uma ação humana no interior de uma instituição é sempre dirigida por um discurso lógico que a justifica. Sabendo disso, usaremos a análise praxeológica de Chevallard com o intuito de identificar os tipos de tarefas presentes nos livros didáticos L1, L2 e L3.

➤ Análise Dos Resultados

A seguir mostraremos as análises feitas a partir dos livros didáticos de Matemática do 1º ano do ensino médio e seus respectivos resultados.

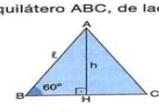
• Análise Do L1:

Em relação aos exercícios resolvidos, ao analisarmos o livro L1, constatamos a presença de 3 exercícios resolvidos. Ilustraremos aqui a questão R9, conforme figura 1, indicada abaixo.

Figura 1 –Exercício Resolvido de L1

R9 Utilizando a razão seno, mostre que a altura h de um triângulo equilátero de lado ℓ é dada por $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

Resolução
Considere o triângulo equilátero ABC, de lado ℓ e altura h .



Calculando o seno do ângulo \widehat{ABH} , temos:

$$\text{sen}60^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{\ell} \Rightarrow 2h = \ell\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, a altura de um triângulo equilátero de lado ℓ é dada por $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

Lembre-se de que os ângulos internos de um triângulo equilátero são iguais a 60° .

Fonte: Souza (2010, p. 279)

A seguir faremos uma análise praxeológica da tarefa apresentada na figura 1.

- **Tarefa:** Mostrar que a altura H de um triângulo equilátero de lado l é dada por $\frac{l\sqrt{3}}{2}$

- **Técnica:**
 1. Converter a questão para a linguagem figural;
 2. Lembrar que os ângulos internos de um triângulo equilátero são iguais a 60° ;
 3. Identificar um triângulo retângulo e seus elementos no triângulo equilátero;
 4. Posicionar corretamente os ângulos no triângulo retângulo;
 5. Utilizar o ângulo de 60° na razão seno.
- **Tecnologia/Teoria:** Ângulos Notáveis: Seno de 60° ; Triângulo equilátero.

No que se refere aos exercícios propostos, ao analisarmos este livro verificamos a presença de 11 exercícios propostos. Para fazer a análise praxeológica escolhemos as questões 42 e 47 indicadas nas figuras 8 e 9 respectivamente.

Figura 2 – Exercício Proposto de L1

42 A hipotenusa de um triângulo retângulo mede H unidades, e um de seus ângulos internos, 30° . Mostre que o cateto adjacente a esse ângulo mede $\frac{H\sqrt{3}}{2}$ unidades.

Fonte: Souza (2010, p. 280)

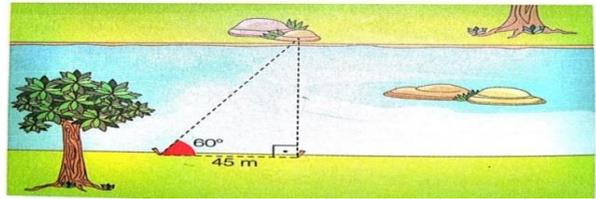
A seguir faremos uma análise praxeológica da tarefa apresentada na figura 2.

- **Tarefa:** Mostrar que o cateto adjacente ao ângulo interno de 30° mede $\frac{H\sqrt{3}}{2}$
- **Técnica:**
 1. Converter a questão para a linguagem figural;
 2. Identificar os catetos e os ângulos do triângulo retângulo;
 3. Reconhecer qual razão trigonométrica será utilizada;
 4. Utilizar o cosseno do ângulo de 30° .
- **Tecnologia/Teoria:** Ângulos Notáveis: Cosseno.

O outro exercício proposto encontrado nesse livro foi a questão 47, a qual ilustraremos abaixo.

Figura 3 – Exercício Proposto do L1

- 47 Para medir a largura de um rio, um engenheiro utilizou como referência duas estacas de madeira, que fincou em uma das margens do rio, e uma pedra, localizada na margem oposta, conforme o esquema. Qual é, aproximadamente, a largura do rio?



Fonte: Souza (2010, p. 280)

A seguir faremos uma análise praxeológica da tarefa apresentada na figura 3.

- **Tarefa:** calcular a medida aproximada da largura do rio.
- **Técnica:**
 1. Analisar a imagem e identificar a largura do rio;
 2. Verificar qual razão trigonométrica será utilizado;
 3. Reconhecer na imagem quem é o cateto oposto e o cateto adjacente;
 4. Utilizar a tangente do ângulo.
- **Tecnologia/Teoria:** Ângulos Notáveis: tangente

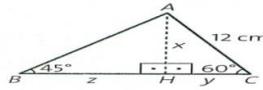
Com base na análise praxeológica realizada, concluímos que as tarefas de cada exercício são apresentadas com clareza para o aluno, levando-o a um bom entendimento da questão. O exercício resolvido é muito similar ao exercício proposto 1, conduzindo o aluno a uma melhor resolução, já que no resolvido mostra o caminho e a imagem que o aluno deve seguir para obter o resultado correto, pois segundo Dionizio e Brandt (2011) uma das dificuldades dos alunos é a conversão da questão para a linguagem figural. No exercício 2 como a tarefa difere do exercício 1, já é apresenta a imagem para evitar a dificuldade que é apontada nos estudos feitos por Oliveira (2006) . Desse modo o livro analisado cumpre o seu papel orientador no processo de ensino e aprendizagem.

- **Análise Do L2:**

Na análise do L2, constatamos a presença de 11 exercícios resolvidos. Ilustraremos aqui a questão 11, conforme figura 4, indicada abaixo.

Figura 4 – Exercício Resolvido do L2

11. Calcule as medidas x , y e z no triângulo abaixo:



Resolução:

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{y}{12} \Rightarrow y = 6$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 6\sqrt{3}$$

$$\tan 45^\circ = 1 = \frac{x}{z} = \frac{6\sqrt{3}}{z} \Rightarrow z = 6\sqrt{3}$$

Então, as medidas são: $x = 6\sqrt{3}$ cm, $y = 6$ cm, $z = 6\sqrt{3}$ cm.

Fonte: Dante (2013, p. 256)

A seguir temos a análise praxeológica do Exercício Resolvido do L2 acima

- **Tarefa:** calcular as medidas x , y e z no triângulo.

- **Técnica:**

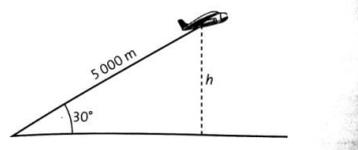
1. Analisar a imagem e identificar os dois triângulos menores que o triângulo maior forma;
2. Reconhecer em cada triângulo quem é a Hipotenusa, o cateto oposto e o cateto adjacente;
3. Verificar quais as razões trigonométricas que serão necessários para encontrar os valores de x , y e z .
4. Reconhecer que para encontrar o valor de z será necessário primeiro entrar o valor de x

- **Tecnologia/Teoria:** Ângulos Notáveis: Seno, Cosseno e Tangente.

No que se refere aos exercícios propostos, em L2 são apresentados 18 exercícios propostos, referente ao assunto de Ângulos Notáveis, do qual escolhemos o exercício 55 e o 56 para fazer a análise, que estão ilustrados nas figuras 5 e 6, respectivamente.

Figura 5 – Exercício Proposto de L2

55. Na figura abaixo, qual é a altura do avião em relação ao chão?



Fonte: Dante (2013, p. 257)

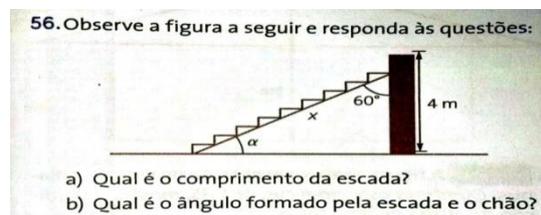
A seguir temos a análise praxeológica de um dos exercícios propostos do L2 indicado na figura 5.

- **Tarefa:** calcular a altura do avião em relação ao chão

- **Técnica:**
 1. Analisar a imagem e identificar qual é cateto e a hipotenusa;
 2. Reconhecer qual razão trigonométrica será utilizada;
 3. Utilizar seno para encontrar o valor da altura.
- **Tecnologia/Teoria:** Ângulos Notáveis: Seno.

Identificamos ainda em L2, o exercício proposto 56, o qual mostraremos na figura 6 a seguir.

Figura 6 – Exercício Proposto de L2



Fonte: Dante (2013, p. 257)

A seguir temos a análise praxeológica do exercício indicado na figura acima.

- **Tarefa:**
 - a) Calcular o comprimento da escada.
 - b) Calcular o ângulo formado pela escada e o chão.
- **Técnica:**

Letra a):

 1. Analisar a imagem e identificar a posição do comprimento da escada;
 2. Reconhecer qual razão trigonométrica será usada;
 3. Utilizar cosseno para encontrar o comprimento da escada.

Letra b):

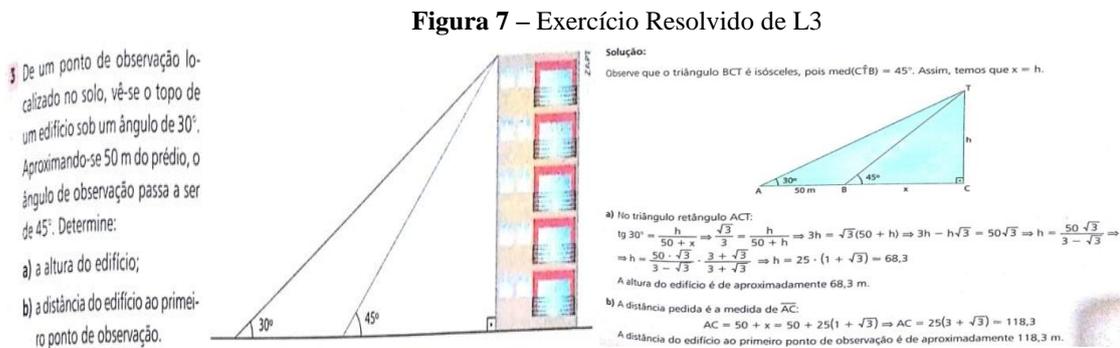
 1. Identificar qual razão trigonométrica será utilizada;
 2. Utilizar a razão seno pra encontrar o valor do ângulo.
- **Tecnologia/Teoria:** Ângulos Notáveis: Cosseno e Seno.

A partir da análise praxeológica feita, nota-se que o Livro Didático L2 traz, no exercício resolvido, as três razões trigonométricas seno, cosseno e tangente para serem trabalhadas em uma única questão, e isso faz com que o aluno verifique em quais situações cada razão será utilizada, pois segundo Oliveira (2006) uma das grandes dificuldades que os alunos têm ao resolverem questões de ângulos notáveis é de identificar qual razão

trigonométrica será necessária para resolver o problema. Os Exercício Proposto 1 e 2 trazem tarefas que levam o aluno a analisar e identificar qual a razão que deverá ser trabalhada em cada situação, potencializando o raciocínio do aluno para que o mesmo consiga resolver questões mais complexas futuramente. Logo, é importante que o livro didático utilize esse processo de ensino, que trabalhe primeiro com situações simples para que depois avancem com situações mais trabalhosas.

- **Análise Do L3:**

O livro L3 apresenta apenas um exercício resolvido. Ilustraremos aqui este exercício, conforme indica a figura 7.



Fonte: Iezzi et al (2016, p. 225)

A seguir temos a análise praxeológica do Exercício Resolvido de L3 de acordo com a figura 7.

- **Tarefa:**

- Calcular a altura do edifício.
- Calcular a distância do edifício ao primeiro ponto de observação.

- **Técnica:**

Letra a)

1. Analisar a figura e identificar as medidas dos lados e identificar os elementos dos triângulos;
2. Reconhecer nos triângulos quais lados corresponde ao cateto adjacente e ao cateto oposto;
3. Usar a tangente do ângulo de 30° para calcular a medida do cateto oposto.

Letra b)

1. Perceber que o triângulo que possui o ângulo de 45° é isósceles e que portanto, o cateto adjacente é congruente ao cateto oposto;
 2. Definir a equação para calcular a distância;
 3. Substituir a medida do cateto o posto na equação na posição correspondente ao ângulo de 45° e estabelecer a medida total da distância.
- **Teoria/Tecnologia:** Ângulos Notáveis: tangente; Equação do 1° grau.

Ao analisarmos os exercícios propostos neste livro verificamos a presença de 10 questões. Para este trabalho elencamos as questões 21 e 22 indicadas nas figuras 8 e 9.

Na figura 8 mostraremos o exercício 21 encontrado em L3, como indicado abaixo.

Figura 8 – Exercício Proposto de L3

- 21** Uma escada de pedreiro de 6 m está apoiada em uma parede e forma com o solo um ângulo de 60° . Qual é a altura atingida pelo ponto mais alto da escada? Qual é a distância do pé da escada à parede?

Fonte: Iezzi et al (2016, p. 226)

A seguir temos a análise praxeológica do Exercício 21 de L3 como mostra na figura 8.

- **Tarefa:**

- I) Determinar a altura do ponto mais alto
- II) Calcular a distância do pé da escada à parede

- **Técnica:**

Item I)

1. Converter da linguagem natural para a linguagem figural;
2. Reconhecer os elementos do triângulo (hipotenusa, catetos e ângulos) em suas respectivas posições;
3. Associar a altura ao cateto oposto;
4. Usar o seno do ângulo dado.

Item II)

1. Associar a distância ao cateto adjacente;
 2. Usar a tangente ou o cosseno de 60° .
- **Teoria/Tecnologia:** Ângulos Notáveis: seno e cosseno ou tangente.

Também identificamos no livro L3 outro exercício resolvido como ilustrado na figura 9.

Figura 9 – Exercício Proposto de L3

22 Um objeto percorre 8 m ao ser solto sobre um plano inclinado que forma um ângulo de 60° com a horizontal do solo. Determine a altura, em relação ao solo, da qual o objeto foi solto.

Fonte: Iezzi et al (2016, p. 226)

A seguir temos a análise praxeológica do Exercício Resolvido de L3 de acordo com a figura 9.

- **Tarefa:** Determinar a altura em relação ao solo
- **Técnica:**
 1. Fazer a conversão para a linguagem figural
 2. Identificar a hipotenusa, o cateto oposto, o cateto adjacente e os ângulos em suas respectivas posições no triângulo;
 3. Associar a altura ao cateto oposto;
 4. Reconhecer a razão trigonométrica a ser utilizada;
 5. Usar o seno do ângulo dado.
- **Teoria/Tecnologia:** Ângulos Notáveis: Seno.

Os exercícios propostos 1 e 2 do livro L3 apresentam tarefas similares a do exercício resolvido. Em ambos, a realização das tarefas exige a conversão da linguagem natural para a linguagem figural além do reconhecimento da razão trigonométrica a ser utilizada, como a maioria das atividades ligadas a ângulos notáveis, o que converge desse modo, às dificuldades apontadas por Oliveira (2006) e por Dionízio e Brandt (2011). No entanto, como o exercício resolvido é acompanhado de uma figura e mostra também como deve ser feita a conversão para a linguagem figural o aluno tem o livro como um orientador tornando possível a realização das tarefas. É importante que isso seja feito para que as dificuldades dos alunos sejam superadas, mas para isso o livro precisa apresentar mais de um exercício resolvido, buscando abranger diversas situações que podem apresentar obstáculos para a aprendizagem.

Considerações Finais

O objetivo principal deste trabalho era desenvolver uma análise praxeológica em três livros didáticos de matemática do 1º ano do ensino médio, de questões referentes ao

tópico de Ângulos Notáveis para identificar as tarefas, técnicas, tecnologias e teorias de exercícios resolvidos e exercícios propostos.

Nesse sentido, da análise realizada concluímos não apenas que as tarefas dos livros L1, L2 e L3 são apresentadas com clareza e levam o aluno a um bom entendimento da questão, mas também que as tarefas dos exercícios propostos e dos resolvidos são semelhantes, e assim cumpre-se o papel orientador do livro didático. Além disso, os exercícios propostos trazem tarefas simples que impulsionam o aluno a analisar e identificar qual razão será trabalhada em cada situação, servindo como potencializador do raciocínio ao possibilitar resoluções de questões futuras. No entanto, o L3 diferente dos livros L1 e L2 apresenta apenas um exercício resolvido criando a possibilidade de barreiras na aprendizagem de situações devido à ausência de mais exemplos.

Assim, acreditamos na eficácia da análise praxeológica como um diagnóstico dos pontos positivos e negativos do livro didático. Apesar de identificarmos tarefas que concordam com as necessidades do processo de ensino aprendizagem, temos consciência de que o livro didático deve sempre ser acompanhado de outros instrumentos e práticas diversas, ou seja, nunca deve ser o centro da prática docente.

Referências.

- ALMOULOUD, S. A. **Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos.** Revista Iberoamericana de Educação Matemática. São Paulo, 2015.
- DANTE, L. R. **Matemática:** Contexto e Aplicações – 2 ed. – São Paulo: Ática, 2013.
- DIONIZIO, F. Q. BRANDT, C.F. **Análise das Dificuldades Apresentadas pelos Alunos do Ensino Médio em Trigonometria** – UEPG. X Congresso Nacional de Educação – EDUCERE, Curitiba, 2011.
- IEZZI, G. et **Matemática:** ciência e aplicações – 9 ed. – São Paulo: Saraiva, 2016
- OLIVEIRA, R. L. **Dificuldade no processo ensino aprendizagem de trigonometria por meio de atividades** – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.
- SEVERINO, J. S. **Metodologia do Trabalho Científico.** 21ª Edição - Revista e Ampliada. São Paulo, 1941.
- SILVA, D. G. **O livro didático no processo de ensino e aprendizagem da matemática:** considerações de professores de escolas públicas de Ji-Paraná. Trabalho de conclusão de curso. UNIR– Ji-Paraná, 2014.
- SOUZA, J. S. **Matemática:** coleção novo olhar – 1. Ed. São Paulo: FTD, 2010