OBTENÇÃO DO PONTO SIMÉTRICO EM RELAÇÃO A UMA RETA UTILIZANDO MÉTODO SIMPLIFICADO

Pedro Roberto Silva

Afiliação: Escola Ten. Rêgo Barros. E-mail:prof.pedromat@hotmail.com

Gustavo Nogueira Dias;

Afiliação: Escola Ten. Rêgo Barros. E-mail: gustavonogueiradias@gmail.com

RESUMO

O presente trabalho trata a respeito de simetria de um ponto em relação a uma reta previamente conhecida. O objetivo é mostrar um processo que se traduz em uma forma de algoritmo simplificador dos cálculos, pois em poucas linhas de trabalho obtém-se o ponto refletido. A extensão do conceito é criada quando o ponto faz a reflexão a partir de uma figura, circunferência, hipérbole, elipse, parábola ou até outras curvas polinomiais. As aplicações na geometria são grandes, pois podemos determinar as características de uma nova figura a partir de uma reta qualquer previamente fornecida ou criada com essa finalidade. Nesta investigação é mostrada a vantagem do método quando o coeficiente angular é 1 ou -1, ou seja a reta forma um ângulo de 45º ou 135º em relação ao eixo dos x, considerado como referência.

Palavras chaves: Simetria; Ponto; Reta; Reflexão.

1 - Introdução

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1998) para o ensino de matemática, encontra-se como objetivos para a disciplina em sala de aula “identificar características de figuras geométricas, percebendo semelhanças e diferenças entre elas, por meio de composição e decomposição, simetrias, ampliações e reduções” (BRASIL, 1998, p. 56). Isso mostra que a simetria é tão importante, pois proporciona ao aluno a noção da semelhança, igualdade, lateralidade entre outros.

O conceito de simetria, lembra a palavra “reflexão”. Quando trabalhamos com o conceito de espelhos, nos dá uma ideia de uma imagem refletida. Neste caso a equação da reta funcionaria como como um espelho, porém com imagens, definidas pela simetria dos pontos. A geometria dá ao aluno noções de espaço, área, volume, complementos, equilíbrio, e outros mais, para que esse aluno desenvolva das séries iniciais ao ensino superior uma percepção visual que o dá condições para viver em sociedade.

Segundo Kaleff (2004, p.02) “ Um dos principais objetivos do ensino de Geometria, tanto no ensino fundamental quanto no médio, é o desenvolvimento da percepção visual, o qual pode ser incentivado por meio da exploração de efeitos visuais obtidos a partir de modelos concretos de representações de transformações geométricas. A partir destas observações e como produto de pesquisas em busca de novos caminhos para o ensino de Geometria. ”

Gomes, (2007) afirma que “o surgimento das novas tecnologias criou um cenário favorável à hibridação, codificando novas linguagens, associadas às atuais formas de comunicação. ” Facilitando o aprendizado do aluno através das tecnologias que estão habituados a ver.

2 - Desenvolvimento histórico

Segundo (LOPES et al, 2013, p. 2) A presença de características simétricas é tão evidente e historicamente perceptível que foi introduzida na Educação Básica para sua abstração e formalização, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998). Nas diversas áreas da Matemática, a simetria é estudada a partir de várias tendências. As funções ímpares (funções polinomiais de índice ímpar e algumas trigonométricas) possuem representação gráfica simétrica à origem, enquanto os pares (polinomiais de índice par e outras trigonométricas).

Tratando-se de simetria, a matemática estar presente na história desde o início dos tempos, quando vemos pinturas, estatuas, monumentos e construções ficam evidentes a sua presença, para uma abstração e formalização esse contexto foi introduzido à educação básica, assim nos anos seguintes os alunos já terão uma ideia de simetria tanto na matemática como na história.

Estudando algumas áreas da matemática, percebesse a presença da simetria fora de sua tendência, como por exemplo, algumas funções polinomiais e trigonométricas que em sua representação gráfica apresentam simetria em relação à origem ou em relação ao eixo das ordenadas. Observe a figura abaixo que mostra a curva da função $y = senx$ que é simétrica a origem.

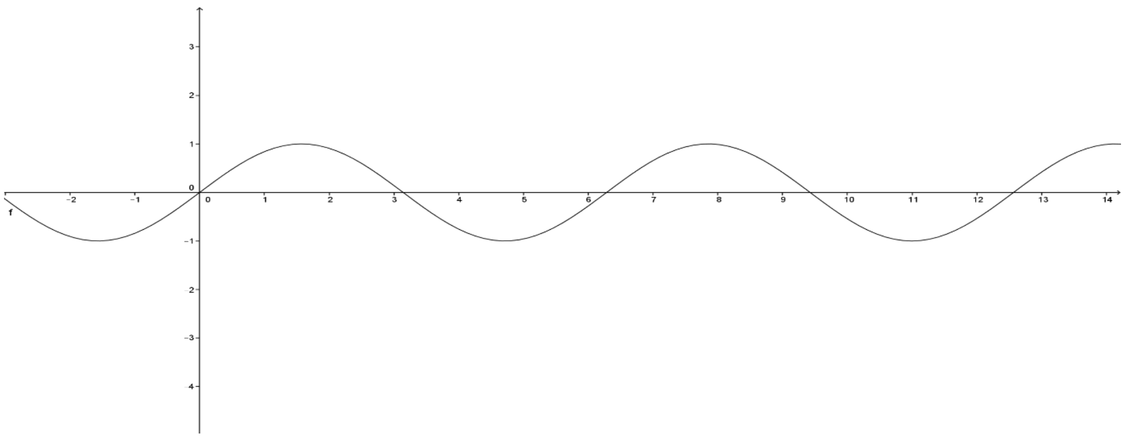


Figura 01. Gráfico de uma função trigonométrica y = sen x.

Do conceito básico de simetria, temos que seja tudo aquilo que possa ser dividido em partes, desde que haja a coincidência dessas partes quando sobrepostas. Um termo que está ligado à natureza, artes e claro, à matemática. Nessa última, geralmente associa-se com os assuntos de geometria, por exemplo, quando nos referimos a duas figuras geométricas idênticas dispostas e que se correspondem ponto a ponto.

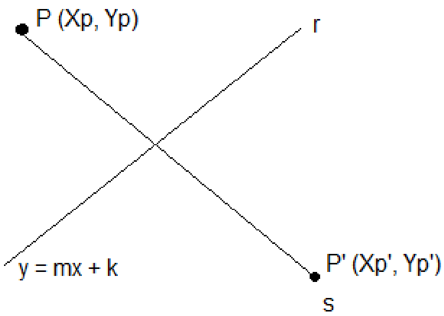
Também a simetria pode ser uma conformidade, em medida, forma e posição relativa, entre as partes dispostas em cada lado de uma linha divisória, um plano médio, um centro ou um eixo.Nas obras de artes a simetria é muito utilizada e importante para a confecção da obra. Podemos encontrar a simetria na natureza e na arte como também no corpo humano.

O conjunto dos pontos P’ associados aos diversos pontos P de uma figura F constituem a figura P’ transformada de A por simetria em relação à reta r. ALVES (2005), considera nesta ótica, a figura, a sua parte esquerda é congruente à parte direita, em relação a eixo, por ser uma imagem refletida.

De acordo com essa ideia, podemos dizer também que esse conceito serve de base para a questão da interdisciplinaridade, pois é o que afirma Fortes (2011), a interdisciplinaridade caracteriza-se pela intensidade entre os especialistas e pelo grau de interação real das disciplinas no interior de um mesmo projeto de pesquisa.

3 - Metodologia

Observe:



Considere o ponto $P\ (x_p, y_p)$ que se deseja refletir em relação à reta $y = mx + k$.

Para tanto, vamos achar outra reta perpendicular a reta “r” passando por P eP'.

Usamos a equação do feixe de retas $y - y_0 = m.(x - x_0)$ onde (x_0, y_0) é o ponto conhecido (x_p, y_p) e “m” é o coeficiente angular da reta perpendicular à reta "s". (Lehmann, 1998)

Como a reta "s" é perpendicular à reta "r", temos:

$$m_s . m_r = -1 \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r} \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m}$$

Portanto obtemos a equação da reta perpendicular:

$$y - y_0 = -\frac{1}{m} . (x - x_0)$$

Para encontrarmos o ponto P' simétrico, necessitamos do conceito de ponto médio, logo temos:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_p + x_{p'}}{2} \\ y_M = \dfrac{y_P + y_{P'}}{2} \end{cases}$$

Portanto, o ponto médio M é obtido através da solução do sistema:

$$\begin{cases} y - y_p = -\dfrac{1}{m}.\left(x - x_p\right) \quad (I) \\ y = mx + k \quad (II) \end{cases}$$

Fazendo (II) em (I), temos:

$$mx + k - y_p = -\frac{1}{m}.\left(x - x_p\right)$$

$$x = \frac{1}{m^2+1}.x_p + \frac{m}{m^2+1}.y_p - \frac{m}{m^2+1}.k$$

Como $x = x_m$ (Abscissa do ponto médio), temos:

$$x_m = \frac{1}{m^2+1}.x_p + \frac{m}{m^2+1}.y_p - \frac{m}{m^2+1}.k \ (III)$$

Substituindo-se (III) em (II), temos:

$$y = mx + k$$

$$y = m.\left(\frac{1}{m^2+1}.x_p + \frac{m}{m^2+1}.y_p - \frac{m}{m^2+1}.k\right) + k$$

Como $y = y_m$ (ordenada do ponto médio), temos:

$$y_m = \left(\frac{m}{m^2+1}.x_p + \frac{m^2}{m^2+1}.y_p - \frac{m^2}{m^2+1}.k + k\right) \ (IV)$$

Substituindo (III) e (IV) nas coordenadas de ponto médio, obtemos finalmente o ponto simétrico:

$$x_m = \frac{x_p + x_{p'}}{2}$$

$$\frac{2}{m^2+1}.x_p + \frac{2m}{m^2+1}.y_p - \frac{2m}{m^2+1}.k - x_p = x_{p'}$$

Portanto:

$$x_{p'} = \frac{2}{m^2+1}.x_p + \frac{2m}{m^2+1}.y_p - \frac{2m}{m^2+1}.k - x_p \quad (V)$$

Fazendo a mesma situação com y_n , temos: $y_m = \frac{y_p + y_{p'}}{2}$

$$\frac{m}{m^2+1}.x_p + \frac{m^2}{m^2+1}.y_p - \frac{m^2}{m^2+1}.k + k = \frac{y_p + y_{p'}}{2}$$

Portanto:

$$y_{p'} = \frac{2m}{m^2+1}.x_p + \frac{2m^2}{m^2+1}.y_p - \frac{2m^2}{m^2+1}.k + 2k - \quad \text{(VI)}$$

Observamos que a superfície reflexiva tem coeficiente angular em torno de ± 1.

Portanto basta substituir este coeficiente $\pm$ 1 no lugar do "m" das equações $V\ e\ VI$,

i) Para m = +1 , obtemos:

Para $x_{p'}$:

$$x_{p'} = \frac{2}{1^2+1}.x_p + \frac{2.1}{1^2+1} - \frac{2.1}{1^2+1}.k - x_p$$

$$x_{p'} = x_p + x_p - k - x_p$$

$$x_{p'} = y_p - k$$

C.q.d.

Para $y_{p'}$:

$$y_{p'} = \frac{2.1}{1^2+1}.X_p + \frac{2.1^2}{1^2+1}.y_p - \frac{2.1^2}{1^2+1}.k + 2k - y_p$$

$$y_{p'} = X_p + y_p - k + 2k - y_p$$

$$y_{p'} = x_p + k$$

C.q.d

ii) Para m= -1 e substituindo-se nas equação (V) e (VI) obteremos resoluções semelhantes. Observe que "k" representa o coeficiente linear da reta fornecida inicialmente.

Exemplo de aplicação:

Quando a = ± 1 podemos usar um artifício: "use a própria reta fornecida "

Determine o ponto simétrico de P(1,-2) em relação a reta y = x – 4.

Use a Reta

$y = x - 4$	$y = x - 4$
$y_{P'} = 1 - 4$	$-2 = x_{P'} - 4$
$\mathbf{y_{P'} = -3}$	$-x_{P'} = -4 + 2$
	$-x_{P'} = -2$
	$\mathbf{x_{P'} = 2}$

Portanto o ponto simétrico procurado é: **P'(2, - 3).**

Fazendo a comparação pelo método tradicional: DIAS (2011).

4 - Considerações finais

O conceito de simetria é mais amplo do que parece. Tem vários casos possíveis como simetria de um ponto em relação ao eixo x, ao eixo y, a origem, em relação a uma reta, em relação a uma: circunferência, elipse, hipérbole ou até em relação a uma curva polinomial.

A simetria proposta neste trabalho, trata de uma forma mais concisa e rápida de expor os pontos simétricos a serem calculados. É uma forma de algoritmo que facilita os cálculos das projeções dos pontos em relação a uma reta. Pontos esses que poderão ser pontos a serem refletidos, coordenadas do centro de uma circunferência, focos de uma elipse ou hipérbole, vértice e focos de uma parábola e muitas outras aplicações possíveis.

5 - Referências Bibliográficas

ALVES, D. S. Simetria Axial: Uma Sequência Didática Para alunos da 6ª Série com o Uso de Software de Geometria Dinâmica. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Pernambuco. Centro de Educação. 2005.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DIAS, G. N. Práticas do Ensino da Matemática: A Realidade da Sala de Aula – Edição Independente. Belém, 2011.

EXPOSIÇÃO DE ARTES. MOSTRA. O mundo mágico de Escher, no Centro Cultural Banco do Brasil (CCBB), em Brasília. Dezembro, 2010.

FORTES, C. C. A. Temática da Interdisciplinaridade no Curso de Especialização em gestão Educacional. Monografia (especialização) – UFSM/RS, 2011.

GOMES L. A.O Double Coding na Animação: A Construção do Desenho Animado Contemporâneo para Adultos e Crianças. Intercom – Sociedade Brasileira de Estudos Interdisciplinares da Comunicação XXX Congresso Brasileiro de Ciências da Comunicação – Santos – 29 de agosto a 2 de setembro de 2007. 2007.

IEZZI, Gelson – Fundamentos da Matemática Elementar, v. 7, Ed. Atual 1993.

KALEFF, A. M. R. Construindo o Conceito de Simetria em Relação a uma Reta: do Jardim de Infância ao Ensino Superior. Publicado em boletim GEPEM, nº 35, 1999, p. 42-56, 1999.

LOPES, L. S. A Simetria por Meio de Uma Proposta Investigativa: História e Implicações Culturais. VI Congresso Internacional do Ensino de Matemática. Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil, 16, 17, 18 de outubro de 2013. 2013.

LEHMANN, C. H. Geometria Analítica. Tradução de Pinto da Silva Sieczkowski. São Paulo, 9ª Edição, ed. Globo. 1998.