V CONEDU
Congresso Nacional de Educação

# Origami Euclidiano: Relatos de um experimento utilizando origami em construções a régua e compasso

Emanuella Martins de França

Orientador: Franck Gilbert René Bellemain.

Universidade Federal de Pernambuco – emanuellafranca83@gmail.com

GT 13. Educação Matemática

Resumo: O presente trabalho tem como objetivo relatar os resultados de um experimento feito com os alunos do primeiro período da Universidade Federal de Pernambuco do curso de Licenciatura em Expressão Gráfica, o qual forma professores para atuar em disciplinas que envolvam desenho gráfico, geométrico, técnico, bem como as tecnologias utilizadas em sua aprendizagem em diversos cursos como Design, Arquitetura e Engenharias. A dificuldade na compreensão dos conteúdos que envolvem desenho geométrico por parte dos ingressos nos referidos cursos, resultante de um hiato no ensino de geometria gráfica nas escolas públicas em diversos momentos históricos na educação do país, nos impulsionou a buscar por soluções em amenizar ou erradicar essas dificuldades. Outras pesquisas mostraram ser satisfatório o uso das dobraduras como auxílio na superação dessas dificuldades, norteando nossa pesquisa. O experimento consistiu em que os voluntários resolvessem construções euclidianas utilizando dois instrumentos diferentes: régua e compasso e dobraduras em papel (origami). Para análise das respostas dos voluntários, foi utilizada a Teoria Antropológica do Didático, que busca uma compreensão das praxeologias em diversas atividades humanas, principalmente na aprendizagem matemática. Essa pesquisa resultou na dissertação de Mestrado intitulada Origami Euclidiano aprovada pelo programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica ofertado pela Universidade Federal de Pernambuco.

## 1. Introdução

A cada momento histórico e político, as sociedades passam por transformações significativas. Com o sistema educacional das mesmas não foi diferente. O Movimento da Matemática Moderna em 1959, importado da França para o Brasil foi o grande responsável pelo declínio do ensino de geometria no Brasil e no mundo (ZUIN, 2001). A algebrização da geometria foi o ponto chave para seu abandono nas escolas públicas, segundo Pavanello (1989):

> "Nessa década, o ensino de Matemática no Brasil sofre mudanças na educação básica. Tais mudanças decorrem de uma discussão internacional acerca de uma nova abordagem para o ensino de Matemática, que propunha aproximar o ensino realizado na educação básica ao desenvolvido na Universidade, o que corresponde à linguagem e à estrutura empregada pelos matemáticos da época. Este Movimento internacional torna-se conhecido como Movimento da Matemática Moderna (MMM). A idéia central da Matemática Moderna consistia em trabalhar a matemática do ponto de vista de estruturas algébricas com a utilização da linguagem simbólica da teoria dos conjuntos. Sob essa orientação, não só se enfatizava o ensino da álgebra, como se inviabilizava o da Geometria da forma como este era feito tradicionalmente. " (PAVANELLO, 1989, p. 103).

Nos anos seguintes, o currículo nacional passou por três momentos decisivos que resultaram na carência de conteúdos bases para ingressos em cursos que exigem esse conhecimento. Podemos citar as Leis de Diretrizes e Bases da educação nacional dos anos de 1961, 1971 e 1996. A LDB de 1961 no Art. 35 deu poder às escolas de escolheres quais disciplinas comporiam o quadro optativo junto com as cinco obrigatórias. A mesma, no Art. 71 delega ao professor a estruturação do programa da disciplina em forma de plano de ensino. Em 1971, a LDB no Art. 12 libera ao regimento escolar substituir disciplinas que o mesmo julgar ser obsoleta por conter conteúdos similares. Nesse mesmo período ocorre a Revolução de 64 (1964- 1985) que estagna outras mudanças. Em 1996, a LDB 9394, no Art. 26 apenas atribui que os currículos dos ensinos fundamental e médio possuam um núcleo comum a ser complementado com as características regionais, culturais e econômicas da clientela. Nosso grau instrutivo está atrelado a interesses políticos e econômicos da elite, pois segundo Pavanello (1989) algumas instituições privadas, visto que só a elite as frequentava, estes conteúdos nunca foram excluídos de fato.

Em 1998, os Parâmetros Curriculares Nacionais fazem uma tentativa de retorno do ensino geométrico com foco no " [...] ensino de procedimentos de construção a régua e compasso e o uso de outros instrumentos, como esquadro, transferidor, estabelecendo-se a relação entre tais procedimentos e as propriedades geométricas que neles estão presentes. " (BRASIL, 1998, p. 68 e 69), porém como conteúdo da disciplina de Matemática ou Artes. Conteúdos esses que ainda segundo Pavanello (1989) quando abordados, eram relegados ao final do ano letivo, justamente pela falta de preparo dos professores aos mesmos.

A França, percebendo que a retirada do ensino de Geometria havia comprometido a qualidade de seus produtos, no ano 2000, faz com que a Comissão de Reflexão sobre o ensino de Matemática escreva um relatório de Progresso sobre a Geometria e seu Ensino (Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement), relatório este que foi editado, publicado e apresentado ao Ministro da Educação Nacional da França, dois anos depois, pois com mão de obra qualificada, produtos de qualidade e população instruída para valorizar estes produtos, a demanda econômica voltaria a crescer (ZUIN, 2001). Infelizmente, mesmo com a influência francesa na educação brasileira, segundo Zuin (2001), os retornos das construções geométricas nos conteúdos das escolas públicas vieram só com a tentativa do PCN de 1998.

Rabello (2005) faz uma crítica categórica a esse abandono do ensino de desenho pois ao:

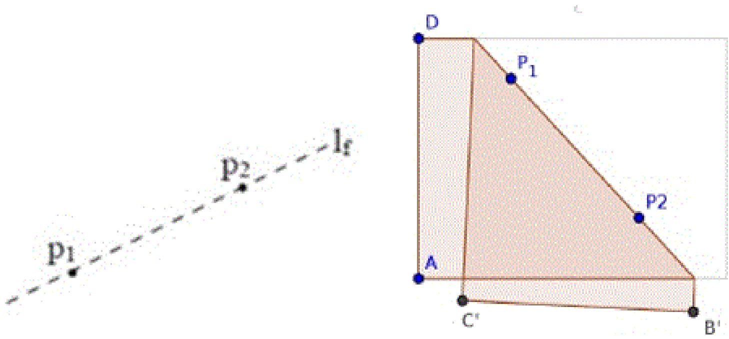
> "Tornar a prova de desenho a grande vilã dos vestibulares foi um sério malefício causado ao ensino de geometria descritiva no final dos anos 70 e início da década seguinte. As vagas para o curso de engenharia eram limitadas, pois à época só cinco instituições ofereciam no hoje estado do Rio de Janeiro. Como a ordem era evitar a figura do excedente – candidato que auferia grau mínimo (nota 4) em cada prova, grau 5 na média global e conquistava direito à matrícula por meio de liminares -, a solução encontrada foi acabar com a nota mínima e criar o critério exclusivamente classificatório, dificultando ao máximo a prova de desenho. Por isso, os professores de descritiva dos 'cursinhos' eram na ocasião os mais bem remunerados.
> Com o advento das provas de múltipla escolha e da desobrigação do ensino de desenho no ensino básico, a exigência de comprovação de conhecimento nessa área foi suprimida nos vestibulares, até para os cursos de arquitetura (uma aberração sem precedentes). Assim, os estabelecimentos públicos de ensino, diante da histórica falta de professores habilitados, e os particulares, por razões de ordem econômica, expurgaram o desenho do currículo. Ainda que em alguns guetos de resistência e bom senso se prognosticasse a aproximação de uma tragédia, não houve retorno. A pressão exercida também pelos proprietários dos cursos preparatórios acabou por liquidar com o ensino de desenho em todos os níveis do ensino básico. [...]
> Assim, é possível calcular a dimensão do problema. Salvo raras excessões, os alunos que ingressam no ciclo básico, especialmente os do curso de engenharia, não distinguem os ângulos de um esquadro ou um elipsóide de um rinoceronte. Para muitos, será fácil aceitar que épura é uma deusa grega ou que existem vetores curvos. [...]
> O conhecimento de geometria de posição e de procedimentos gráficos para representar formas é indispensável à boa formação de engenheiros e arquitetos, razão pela qual é necessário encontrar solução para o problema imediatamente. [...] (RABELLO, 2005, p. 49-51).

França (2016) como discente do curso de Licenciatura em Expressão Gráfica da UFPE e logo após docente da mesma, sentiu dificuldades na apreensão de conteúdos e percebeu o mesmo em seus alunos. Como diletante na arte das dobraduras, viu na mesma uma possibilidade lúdica de auxilio nas aulas com construções geométricas, assim surgiu a pesquisa que culminou na dissertação de mestrado Origami Euclidiano, a qual se fez um experimento com os ingressos ao curso de Licenciatura em Expressão Gráfica da Universidade Federal de Pernambuco, curso este que foi criado em 1951 justamente para auxiliar os professores de Arquitetura e Engenharias em disciplinas relacionadas com desenho geométrico gráfico. O referido curso foi desativado na década de 70, pela retirada dos conteúdos geométricos nos vestibulares de Arquitetura e Engenharias, sendo reativado em 1983 como um curso isolado. A situação do ensino de Geometria no nosso país chegou a um ponto em que o curso de Expressão Gráfica é o único a ser oferecido no Brasil, sendo Licenciatura em Pernambuco e Bacharelado no Paraná.

A arte do Origami ou dobraduras em papel, originária na Ásia, antes uma arte voltada para a religião, entretenimento e decoração (ABE, 2004), na década de 70, Humiaki Huzita começa a pesquisar as propriedades geométricas e matemáticas contidas nos padrões dos vincos deixados no papel após desdobrar um modelo pronto. Huzita compila seis operações matemáticas com propriedades equivalentes às construções euclidianas à régua e compasso que ele denomina de Axiomas. Hatori em 2002 acrescenta um último axioma aos já descobertos por Huzita. Em 2003, o físico da NASA Robert Lang comprova algebricamente todos os axiomas do Origami (MONTEIRO, 2009).

Os HAs, sigla que denomina os axiomas de Huzita (Huzita Axioms), tratam-se de operações simples com uma única dobra para determinar entes geométricos a partir de outros entes já existentes. Vejamos o primeiro axioma: Dados dois pontos P1 e P2, podemos dobrar uma linha conectando-os. Este axioma possui descrição equivalente ao primeiro postulado do livro 1 de Euclides: “Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto. ” (EUCLIDES, 2009, p. 98).

Figura 1: Primeiro Axioma de Huzita.




Fontes: ALPERIN e LANG, 2006; CAVACAMI e FURUYA, 2009.

## 2. Metodologia

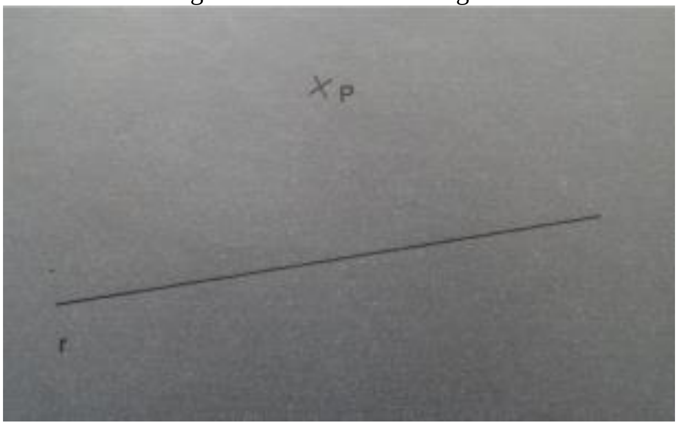
Em princípio, elaboramos um experimento contendo oito tarefas de construções euclidianas para serem resolvidas em régua e compasso e, depois, as mesmas tarefas, resolvidas em origami. Porém, acordamos na escolha de algumas construções que se encaixassem nas seguintes categorias: Uma questão econômica em origami, porém trabalhosa em régua e compasso e outra questão trabalhosa em origami e econômica em régua e compasso. As atividades escolhidas foram: mediatriz, bissetriz, retas paralelas, retas perpendiculares, triângulo equilátero, quadrado, retângulo e o fechamento de um paralelogramo. A base desses conteúdos na geometria Euclidiana é conhecida como lugares geométricos de equidistância.

Utilizamos a Teoria Antropológica do Didático para analisar questão por questão. Segundo esta teoria, toda atividade humana segue uma ordem prática. A essa ordem, chama se praxeologia, do latim *praxis*, ‘prática’ e logos, ‘estudo’, literalmente o ‘estudo da prática’. Essa praxeologia é composta por quatro componentes: os tipos de tarefa, representadas pela letra maiúscula grega T (tau), as técnicas, representadas pela letra minúscula grega $\tau$ (tau), as tecnologias, representadas pela letra minúscula grega $\theta$ (teta) e a teoria, representada pela letra maiúscula grega $\Theta$ (teta). A tarefa T é um problema a ser resolvido ou uma atividade a ser realizada. A técnica $\tau$ é a maneira de fazer, realizar, resolver T, que pode ser organizada em subtipos de tarefas. A tecnologia $\theta$ vai justificar e compreender o porquê a técnica $\tau$ funciona e a teoria $\Theta$ por sua vez vai justificar a tecnologia. Sendo que, um tipo de tarefa T pode ter n técnicas $\tau$ para sua resolução.

Para a etapa de tarefas respondidas com a técnica das dobraduras utilizamos papel vegetal no tamanho A6 (10,5 cmx14,85 cm). Além da transparência do papel ajudar na visualização e transferências dos pontos nas construções, os vincos formados nesse tipo de papel também ficavam bem marcados.

Vejamos o exemplo da tarefa T1 que foi construir uma reta perpendicular s em relação à reta r dada, passando pelo ponto P.

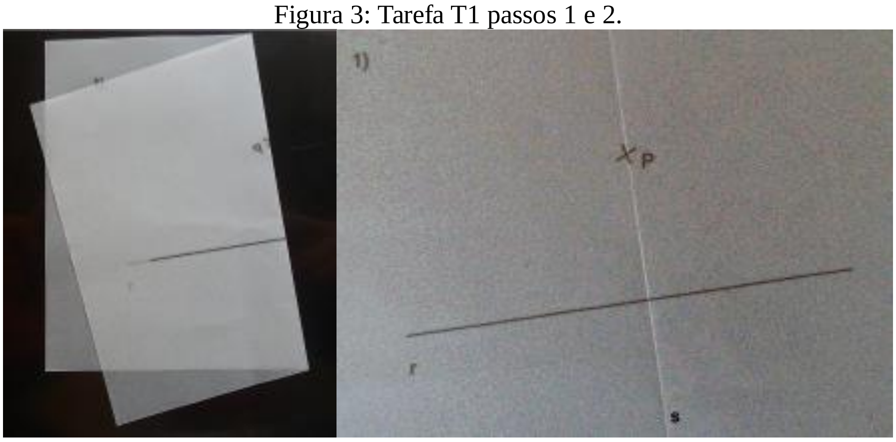
Figura 2: Tarefa T1 em Origami




Fonte: FRANÇA, 2016.

Na tarefa T1, uma técnica $\tau$ para sua solução foi dobrar o papel alinhando a reta r até que esta dobra atinja o ponto P. A tecnologia $\theta$ que justifica o porquê esta técnica funciona é o fato de que alinhando uma reta r em si mesma, a dobra resultante sempre será uma reta s perpendicular à reta r. A teoria $\Theta$ que justifica essa tecnologia é baseada no quarto axioma de Huzita-Hatori que diz que dados um ponto P1 e uma linha l1, nós podemos fazer uma dobra perpendicular à l1, passando através do ponto P1.

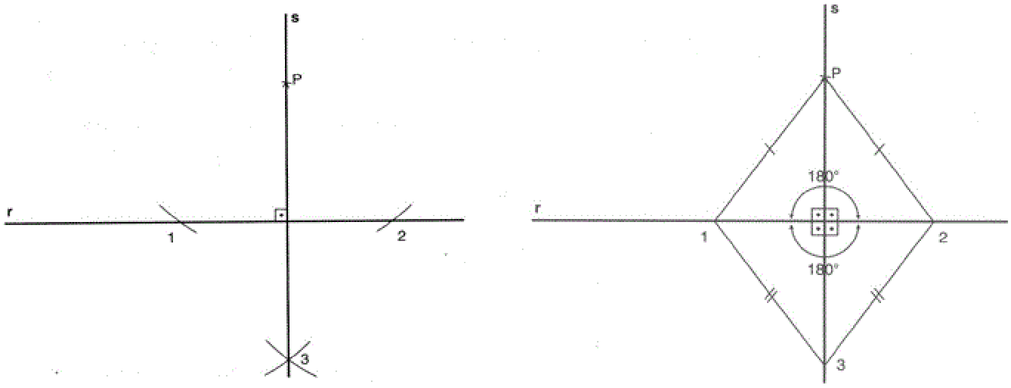
Figura 3: Tarefa T1 passos 1 e 2.




Fonte: FRANÇA, 2016.

Para construir uma reta perpendicular s em relação à reta r dada, passando pelo ponto P com régua e compasso precisamos da seguinte técnica $\tau$: Por a ponta seca do compasso em P e, com abertura maior que a distância de P a r, traçar um arco que intercepte r em dois pontos 1 e 2. Com a mesma abertura do compasso, centrar a ponta seca em 1 e traçar um arco oposto a P. Depois, com a mesma abertura, apoiar a ponta seca em 2 e interceptar o arco anterior criando um ponto 3. Apoiando a régua em P e 3, podemos traçar a reta perpendicular s.

Figura 4: Tarefa T1 em régua e compasso.




Fonte: MARCHESI JÚNIOR, 2009.

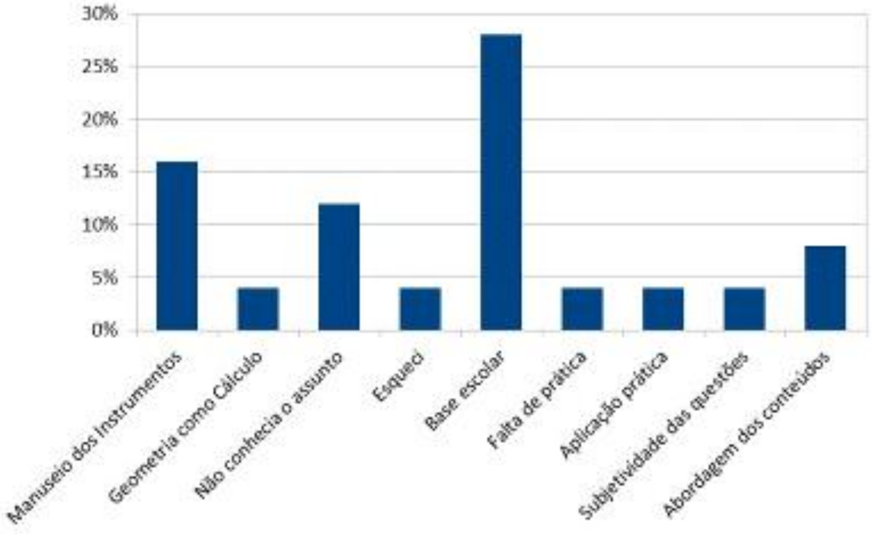
A tecnologia θ que justifica a técnica descrita acima é o fato que se ligarmos os pontos P, 1, 2 e 3, podemos observar que eles formam um losango de lados P2, 23, 31 e 1P. Nas retas r e s estão coincidentes as diagonais deste losango (P3 e 12), que se interceptam em seus respectivos pontos médios e em ângulos retos. Por este motivo, centramos a ponta seca do compasso em P, com abertura do compasso maior que a distância entre P e r, pois se esta abertura for menor, não conseguiremos interceptar r e determinar os pontos 1 e 2 (dois dos vértices do losango) e com a mesma abertura do compasso, pois os lados do losango são congruentes, com a ponta seca centrada em 1 e depois em 2, determinaremos o ponto 3 que é o último vértice do losango, fechando o quadrilátero. Por isto que s é a reta perpendicular a r que passa pelo ponto P. A teoria Θ que justifica a tecnologia se baseia no primeiro postulado de Euclides: Uma reta só pode ser apoiada a partir de dois pontos. Não poderíamos traçar a reta s apenas a partir de P, precisaríamos determinar outro ponto simétrico a P para traçarmos s. Por este motivo, utilizamos as propriedades do losango para justificar a solução desta tarefa.

## 3. Resultados

O experimento teve duas etapas. A saber, a primeira com duração de uma hora, foram dois questionários para ver o nível de conhecimento dos voluntários sobre os assuntos a serem abordador para formarem-se duplas complementares e também saber sobre suas experiências no ensino médio referentes as aulas de Geometria. Tivemos 25 alunos voluntários da disciplina Geometria Gráfica Bidimensional, nos quais 21 eram do primeiro período, 2 do terceiro período e 2 do quinto período do curso de Licenciatura em Expressão Gráfica. Sendo que apenas 16 alunos destes 25, participaram do experimento. Dos 16 que participaram, 14 foram do primeiro período e 2 do terceiro que tinham reprovado a disciplina. Oitenta e oito por cento dos alunos que se submeteram ao experimento teve aula de Geometria na Educação Básica.

A tabela abaixo mostra as dificuldades que os voluntários alegaram possuir referentes aos conteúdos geométricos.

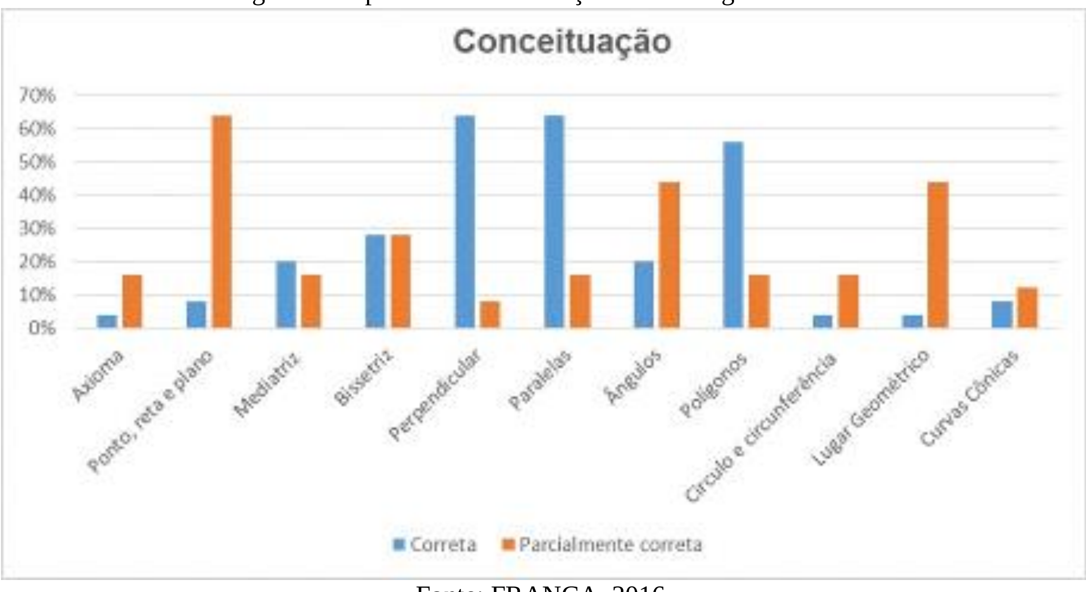
Figura 5: Possíveis causas das dificuldades dos alunos.




Fonte: FRANÇA, 2016.

No segundo questionário da primeira etapa, pediu-se para conceituarem os entes geométricos que eram a base das antigas academias de desenho, arquitetura e artes. Esse questionário foi o determinante para a formação das duplas.

Figura 6: respostas de conceituação dos entes geométricos.

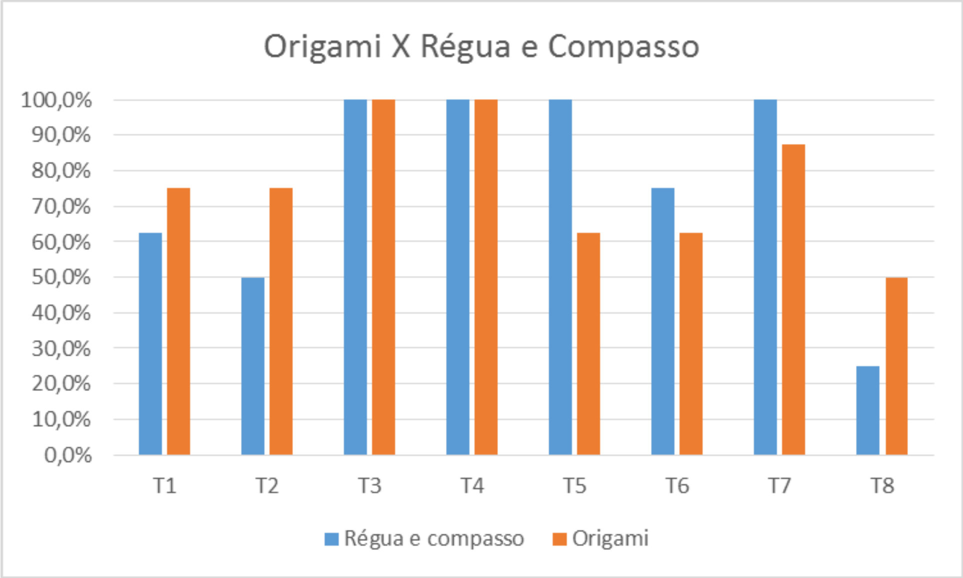



Fonte: FRANÇA, 2016.

Podemos observar que dos 11 conteúdos, 7 deles possuíam respostas incompletas ou equivocadas, como troca de conceitos entre entes bidimensionais e tridimensionais.

O experimento propriamente dito teve duração de duas horas, uma hora para cada instrumento de resolução das tarefas: régua e compasso versus origami.

Figura 7: Comparação de acertos nas atividades entre Origami versus Régua e compasso.

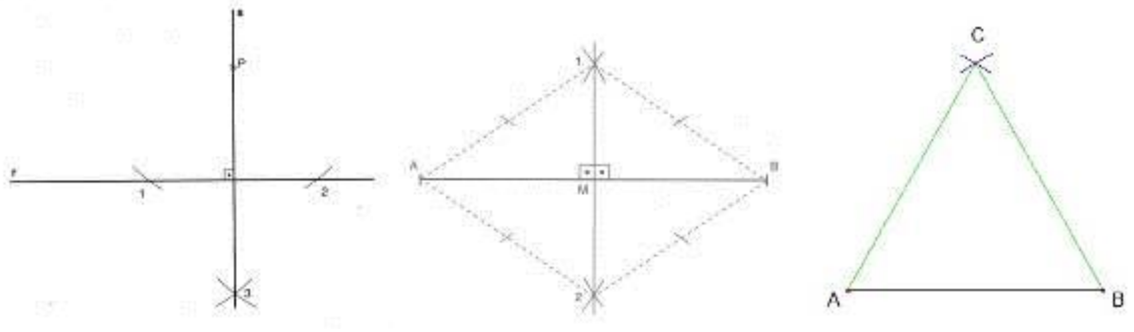



Fonte: FRANÇA, 2016.

Na figura do gráfico acima podemos observar um empate técnico no desempenho das duplas em relação aos dois instrumentos, mesmos com as dificuldades alegadas, e 52% dos alunos já terem reproduzido um modelo simples de Origami.

Um fato interessante foi a dificuldade que uma dupla teve em reconhecer construções análogas nas tarefas a régua e compasso e utilizar as propriedades dos mesmos entes e procedimentos para responder às outras atividades. Eles esqueceram que a construção da mediatriz é análoga à construção da reta perpendicular em relação a uma reta dada, passando por um ponto P dado não pertencente à reta, mostrando que, quando não há o domínio dos conceitos geométricos, fazer a relação do mesmo conceito em uma situação nova implica em impedimentos ao aluno em avançar na aprendizagem.

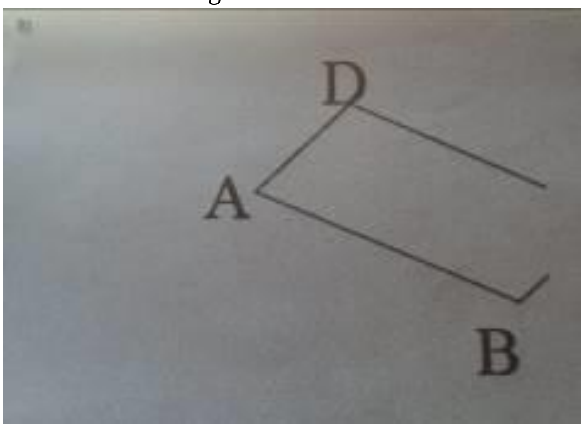
Figura 8: Construções análogas em régua e compasso.




Fonte: FRANÇA, 2016.

A tarefa T8 que solicitava construir a diagonal AC do paralelogramo ABCD dado sem prolongar os lados DC e BC, foi uma das mais complexas, pois os voluntários dispenderam mais tempo tentando resolvê-la nos dois instrumentos, porém obteram mais êxito em sua resolução com o auxílio do Origami, percebendo-se que as propriedades envolvidas para a resolução eram mais facilmente evocadas e ainda surgiu mais um tipo de tecnologia para resolução da mesma tarefa improvisada pelos alunos, não previsto pela equipe.

Figura 9: Tarefa T8.




Fonte: FRANÇA, 2016.

## 4. Conclusões

Podemos concluir que, os ensinos dos fundamentos básicos da geometria euclidiana são importantes na formação de todo cidadão, não apenas professores, engenheiros, designers e arquitetos. A capacidade de abstração viso-espacial é uma das primeiras experiências sensoriais do ser humano através da visão e locomoção no espaço em o permeia. As construções geométricas euclidianas em toda sua amplitude necessitam de um retorno não apenas no núcleo privado, mas essencialmente no ensino público. Sabemos que este retorno ainda é utópico, visto que não há uma disciplina isolada, salvo colégios militares e escolas de

Aplicação, e isso demandaria uma reformulação lenta e dispendiosa curricular e elaboração de material didático específico.

Mudar o padrão tecnicista das didáticas que nos foi passado entre as gerações parece ser ainda um desafio a ser superado, tanto pelos docentes, quanto pelos discentes, cada vez mais distraídos pelas facilidades tecnológicas digitais que avançam a cada segundo.

O desafio principal é colocarmos em prática tudo o que já foi estudado, pesquisado e comprovado até o presente momento. Se assim, o sistema nos permitir.

## 5. Referências


ABE, Keiko. **Aprenda a Fazer Origami Passo a Passo.** São Paulo: Editora JBC, 2004.

ALPERIN, Roger C; LANG, Robert. **One-, Two-, and Multi-Fold Origami Axioms.** 2006. Disponível em: <http://www.math.sjsu.edu/~alperin/AlperinLang.pdf>. Acesso em: 07 Fv. 2013.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC / SEF, 1998.

CAVACAMI, Eduardo; FURUYA, Yolanda Kioko Saito. **Explorando Geometria com Origami.** Disponível em: <http://www.docfoc.com/download/documents/explorando-geometria-com-origami-eduardo-cavacami-yolanda-kioko-saito-furuya>. Acesso em: 14 de Nov. 2015.

CHEVALLARD, Yves. **Introdução à Teoria Antropológica do Didático.** Disponível em: <http://yves.chevallard.free

EUCLIDES. **Os Elementos.** In: BICUDO, Irineu. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FRANÇA, Emanuella Martins de. **Origami Euclidiano.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, PE, 2016.

LDB: **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional:** lei nº 4.024, de 20 de dezembro de 1961, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Disponível em: <http://wwwp.fc.unesp.br/~lizanata/LDB%204024-61.pdf>. Acesso em: 15 de Jan. 2016.

LDB: **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional:** lei nº 5.692, de 11 de agosto de 1971, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L5692.htm>. Acesso em: 15 de Jan. 2016.

LDB: **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional:** lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Disponível em: <https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/70320/65.pdf> Acesso em: 15 de Jan. 2016.

MARCHESI JÚNIOR, Isaias. **Desenho Geométrico.** São Paulo: Ática, 2009.

MONTEIRO, Liliana. **Fundamentos Matemáticos do Origami.** Lisboa: Associação Ludus, 2009.

RABELLO, Paulo Sérgio Brunner. **Ensino de Geometria Descritiva no Brasil.** In: Revista Ciência Hoje, novembro, 2005. Pag. 49-51. Disponível em: <http://www.cienciamao.usp.br/tudo/exibir.php?midia=chj&cod=_ensinodageometriadescritivanobrasil-opiniaocienciahoje221nov2005>. Acesso em: 17 de set. 2018.

PAVANELLO, R. M**. O abandono do ensino da Geometria:** uma visão histórica. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. Campinas, 1989.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Da Régua e do Compasso:** As construções geométricas como um saber escolar no Brasil. Dissertação (Mestrado em Educação e Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, MG, 2001.