A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE WINPLOT NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE SISTEMA LINEAR: UMA APLICAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Zacarias Carvalho de Araújo Neto[1]; Saul Mark Lima Coêlho[2]

[1]Graguado do curso de Licenciatura em Matemática do *Instituto Federal do Piauí-IFPI, Campus* Angical zacariasnetto10@hotmail.com; [2]Professor Esp. do curso de Licenciatura em Matemática do *Instituto Federal do Piauí-IFPI, Campus* Angical. e-mail: saul@ifpi.edu.br.

Resumo: O presente trabalho vem discutir os resultados obtidos através da pesquisa de campo com abordagem quali-quantitativa, realizada com 15 estudantes da 2º série de Ensino Médio em uma escola pública da cidade de Santo Antônio dos Milagres/PI. Com o objetivo de utilizar os diferentes registros de representação para a classificação de sistemas linear com duas e três variáveis com estudantes da 2° série do Ensino Médio com o auxílio do software Winplot. Nesse processo foi usada a teoria de representação semiótica, na perspectiva de representar os sistemas lineares. No entanto, foi usada uma sequência didática com intuito de mostrar aos estudantes os métodos de resolução por meio da substituição e escalonamento de modo que depois fossem capazes de realizar os procedimentos e classificá-los como sistema possível e determinado (SPD), possível e indeterminado (SPI) e impossível (SI). Os dados analisados obtidos a partir do material produzido pelos estudantes revelam que o recurso tecnológico utilizado no decorrer das atividades produziu um efeito positivo na construção da aprendizagem dos conceitos matemáticos envolvendo sistemas lineares 2x2 e 3x3. Com esta proposta, foi possível concluir que com a utilização da representação gráfica de sistemas lineares os alunos podem construir a sua própria significação do conteúdo e compreender sobre a existência ou não de solução para os sistemas lineares apresentados. Sendo assim, os registros de representações semióticas, colaborou no procedimento de construção e significação da informação, permeando todo o procedimento de criação das atividades e, aplicação de tal modo como a análise dos dados relacionados à pesquisa.

Palavras-chave: Sistemas Lineares. Tecnologia. Representações Semióticas. Registros de Representação.

INTRODUÇÃO

Este trabalho foi desenvolvido com o intuito de mostrar os resultados decorrentes da aplicação de atividades envolvendo Sistemas Lineares, com aspectos voltados para a interpretação Algébrica e Gráfica no sentido de compreendermos os casos em que o sistema é possível e determinado, sistema possível e indeterminado e Sistema Impossível. No entanto, mostraremos que conceitos ensinados acerca de sistema linear estão errados e que não são abordados em alguns livros.

Buscamos também interpretar quanto a sua Representação Semiótica, ou seja, a conversão de registros da linguagem natural para a linguagem algébrica e gráfica e vice e versa, no entanto serão desenvolvidas e elaboradas atividades em que os estudantes utilizem papel e caneta de forma que eles resolvam as situações problemas e, em seguida utilizando o

Software Winplot na construam de gráficos e verifique as soluções para entendemos sua classificação a partir do mesmo.

Surgiu essa inquietação, referente a sistema linear mediante a alguns livros abordarem somente solução de questões de maneira mecânica e não apresenta a representação gráfica de um sistema, tornando assim a aprendizagem mais significativa, onde o estudante possa manipular situações que te proporcione uma compreensão melhor do que está sendo abordado. Battaglioli (2008) afirma que os livros didáticos demonstram que os registros algébricos, com atividades relacionadas a mudanças de registro são apresentados de forma simples. Ela também defende que haja uma maior representação dos registros gráficos, pois eles facilitam a compreensão dos conjuntos soluções de um sistema linear bem como sua classificação.

Machado (1996) em seu trabalho *"O Universitário principiante x Significado de sistema de equações"* defende a importância da mudança de registro em sistema, ou seja, as transformações do algébrico para o gráfico, ou do gráfico para o algébrico e vice-versa tornando mais significativo, por outro lado teremos estudantes "cegos" em relação a manipular questões de sistema sem dar sentido nenhum a ele. No entanto, cada registro de representação está associado a um objeto que facilite sua compreensão das mudanças feitas no processo de ensino aprendizagem (DUVAL, 2912).

Sendo assim, dividimos a pesquisa em etapas nas quais na primeira etapa apresentamos o *software Winplot* e suas ferramentas, em seguida os sistemas lineares de ordem 2x2, resolvemos questões com os alunos de modo que fique claro para eles, na segunda etapa apresentamos sistemas lineares de ordem 3x3 onde resolveremos questões com o auxílio do software, que nos permitirá ter uma visão mais dinâmica das mudanças de registros. Esse estudo se deu mediante as necessidades de compreendermos as transformações de registros que estão presentes nos sistemas lineares, de modo que os registros são muito importantes para compreensão e classificação dos mesmos, pois muitos estudantes não conhecem a representação gráfica de um sistema linear, bem como identificar quando ocorre um sistema possível e determinado, indeterminado e impossível, por esta razão é que o uso do *software Winplot* vem proporcionar a compreensão dessa mudança de registro seja da linguagem algébrica para a gráfica como da gráfica para a algébrica contribuindo assim para a aprendizagem dos estudantes.

Este trabalho tem como objetivo utilizar os diferentes registros de representação semiótica para a classificação de sistemas linear com duas e três variáveis com estudantes da 2° série do Ensino Médio no estudo de sistemas lineares por meio do *software Winplot*.

REFERENCIAL TEÓRICO:

Muitos estudantes apresentam dificuldades em matemática, para entendermos essas dificuldades é necessário observarmos o funcionamento cognitivo que venha a possibilitar a aprendizagem dos estudantes. No entanto, é necessário verificar quais são os princípios cognitivos exigidos no processo de tratamento matemáticos e se esses princípios são movimentados exclusivamente para os conhecimentos matemáticos (Duval, apud Machado, 2003, p. 11-12).

Inicialmente iremos trabalhar com sistema linear 2x2, em seguida com sistemas 3x3 que é o foco da nossa pesquisa. No entanto, é necessário entendermos a resolução de ordem dois por dois e analisarmos o comportamento do gráfico em relação a sua classificação quanto o sistema possível e determinado, indeterminado e impossível.

Sendo assim, uma equação linear a n incógnitas sobre $\mathbb{R}$ é uma equação da forma $m \times n$ – **Forma geral.**

São definidas a partir de m equações lineares a n incógnitas dispostas da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots = \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Entretanto no nosso estudo aplicaremos uma sequência didática com base na teoria de Representação Semiótica de Raymond Duval (2012) como analise a priori. No qual ele defende que para resolver um determinado objeto matemático é necessário utilizar dois processos: tratamento e conversão de registros, que contribuirá para a aprendizagem em matemática.

Quadro 01: Atividade será realizada em duas partes como mostra afigura abaixo:

PARTE A Sistemas lineares 2x2	**PARTE B** Sistemas Lineares 3x3
A_1: Exploração do estudo no registro da língua natural, algébrico, de tabela e gráfico.	B_1: Exploração do estudo no registro da língua natural e gráfico.

A_2: Exploração do estudo com auxílio do *software* Winplot.	B_2: Exploração do estudo com auxílio do *software* Winplot.

Figura: Descrição das partes A e B da sequência didática.

Fonte: Dados empíricos da pesquisa.

Nesse contesto destaca-se a importância do uso das tecnologias para a compreensão e a visualização, pois ela ocupa um papel muito importante no significado de conteúdos matemáticos. Segundo Arcavi (2003), a visualização nos possibilita ter uma visão mais ampla de um objeto matemático, por exemplo, uma imagem, um processo, uma atividade escrita. A visualização gráfica por meio de softwares matemáticos nos permite dar mais significado aos conteúdos e, esses recursos vêm contribuir em uma concepção mais ampliada e, o uso desses recursos é fundamental para o entendimento dos estudantes.

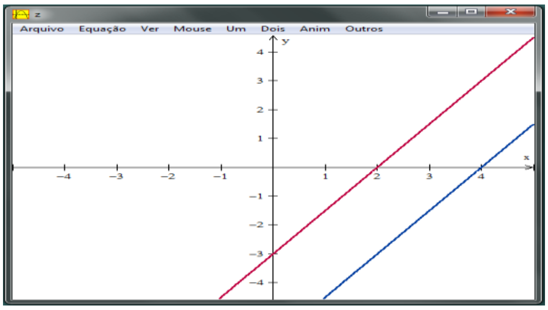
No primeiro momento serão desenvolvidos e discutidos com os estudantes, alguns exemplos onde mostraremos a visualização gráfica e a análise geométrica de sistemas lineares de duas e três variáveis.

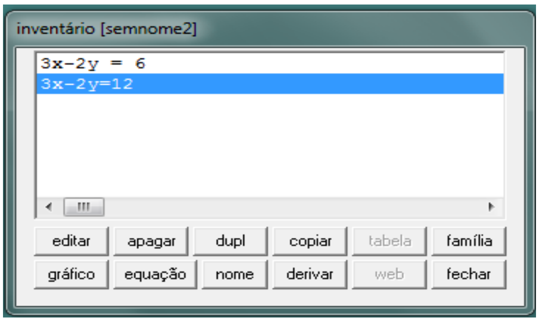
Por exemplo: o sistema abaixo classifique em sistema possível, indeterminado ou impossível.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases} \text{(-1)} \quad \begin{array}{cccc} -\cancel{3x} & +\cancel{2y} & = & -6 \\ \cancel{3x} & -\cancel{2y} & = & 12 \\ \hline 0x & 0y & = & 6 \end{array}$$

Quando multiplicamos a primeira equação (-1), e somamos com a segunda equação obtemos os valores x = 0, y = 0 e a soma dos termos independentes iguais a 6, pela definição quando isso acontece se caracterisa como um sistema impossivel (SI), como mostra o grafico abaixo.

Figura 01: Representação gráfica de um sistema de ordem 2x2.





A **B**

Fonte: Dados empíricos da pesquisa (2018).

Ao observamos o gráfico do sistema de duas variáveis, podemos observar na figura A que as retas são paralelas e na figura B estão apresentadas as equações que geram o gráfico, ou seja, não tem nenhum ponto em comum, caracterizando assim, um sistema impossível não apresentando solução. Nesse sentido, as atividades Matemáticas estão associadas à pelo menos dois registros de representação, ou seja, ao resolver um determinado problema é empregada simultaneamente a linguagem natural para a algébrica ou da gráfica para tabulá-la ou vice e versa (DUVAL, 2008).

Com relação à representação semiótica Duval (2009, p.32) afirma que:

> [...] em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escritura algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações "equivalentes" em outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferente para os sujeitos que as utiliza.

Entretanto, observa-se que na construção do conhecimento matemático a semiótica se torna muito importante uma vez que as mudanças de registro proporcionam um desenvolvimento cognitivo, permitindo compreender as transformações que ocorrem nas resoluções de problemas onde o mesmo objeto matemático pode apresentar mais de uma solução. (DUVAL, 2011).

Nesse cenário o uso desses registros contribui de forma significativa para a construção do conhecimento, principalmente no que diz respeito a sistema linear, pois compreender as transformações ajuda entender a sua classificação. No exemplo a seguir mostraremos como é um gráfico de um sistema linear com três variáveis (X, Y, Z) e sua classificação. A solução de um sistema linear é a atribuição de valores às variáveis x_1, x_2, ..., x_n de modo a satisfazer ambas as equações. O grupo de todas as soluções possíveis é chamado de conjunto-solução. Um sistema linear pode comportar-se em qualquer uma das três formas possíveis:

Sistema Possível Determinado – (S.P. D).

É o sistema que possui apenas uma única solução possível. Esse sistema pode ser chamado de sistema possível e suas equações de equações compatíveis.

Sistema Possível Indeterminado – (S.P. I).

É o sistema que possui múltiplas soluções.

Sistema Impossível – (SI).

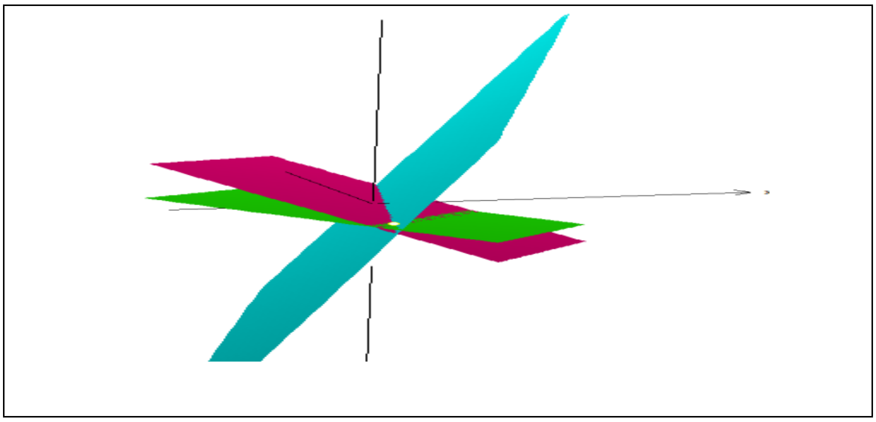
É o sistema que não admite uma solução, sendo designado por sistema impossível e suas equações como equações incompatíveis.

$$S1: \begin{cases} -x + \frac{1}{2}y - z = 0 \\ 2x - 2y + 4z = -2 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Esse sistema tem os valores pra (x, y e z) x = 1, y = -2 e z = -2

Figura 01: Representação gráfica de um sistema possível e determinado (SPD).

-



Fonte: Dados empíricos da pesquisa (2018).

Esse sistema como apresenta uma única solução é classifica como sistema possível e determinado (SPD). E o gráfico mostra justamente à mudança de registro da linguagem algébrica para a gráfica. Desse modo, toda situação que envolve um problema está associada a um tipo de representação, pois a Matemática por ser considerada bastante abstrata torna-se diferente das outras áreas do conhecimento (PIRIS, 2014).

Nesse caso, as mudanças de registros nos possibilitam perceber claramente as transformações de uma linguagem matemática para outra permitindo entender e visualizar os procedimentos empregados nesses registros, que facilita a compreensão das mudanças de registros que contribuem para o processo de aprendizagem (DUVAL, 2012).

No sistema abaixo verificaremos em quais das afirmações está inserido esse sistema, se ele tem uma única solução, infinitas soluções ou nenhuma solução, pois pela definição temos: D ≠ 0 ↔ S é determinado e, quando D = 0 ↔ S é indeterminado ou impossível.

A conversão de registro mostra claramente que o determinante desse sistema é:

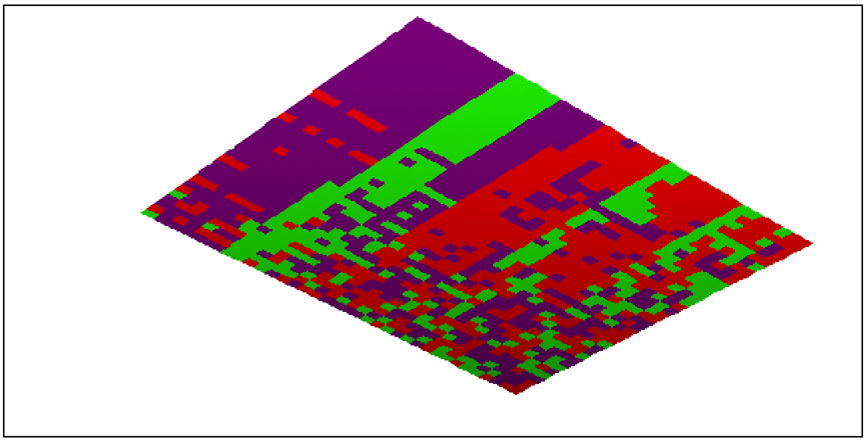
$$S_{1}: \begin{cases} -2x - 2y + 2z = -2 \\ -6x - 6y + 6z = -6 \\ -8x - 8y + 8z = -8 \end{cases}$$

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ -6 & -6 & 6 & -6 & -6 \\ -8 & -8 & 8 & -8 & -8 \end{array}\right| = 0 \qquad D = \left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ -6 & -6 & 6 & -6 & -6 \\ -8 & -8 & 8 & -8 & -8 \end{array}\right| = 0$$

$$D=\left|\begin{array}{ccc:cc} -2 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ -6 & -6 & 6 & -6 & -6 \\ -8 & -8 & 8 & -8 & -8 \end{array}\right| = 0 \qquad D=\left|\begin{array}{ccc:cc} -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -6 & -6 & -6 & -6 & -6 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \end{array}\right| = 0$$

Como podemos observar ao se calcular o determinante do sistema apresentado acima fica visível que sua solução é sempre igual a zero, caracterizando um sistema possível e indeterminado, ou seja, apresenta infinitas soluções. E sua representação gráfica é um plano onde se interceptam em vários pontos como mostra o gráfico abaixo.

Figura 02: Gráfico de um Sistema linear Indeterminado.



Fonte: Dados empíricos da pesquisa (2018).

Na mudança de registro da língua algébrica para a gráfica, com a ajuda *do software Winplot*, podemos então visualizar claramente que os planos se interceptam em vários pontos, tendo, portanto, infinitos pontos em comum, seguindo a definição caracterizando um sistema (SPI).

No caso a seguir analisaremos o seguinte sistema:

$$S_3: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 8 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

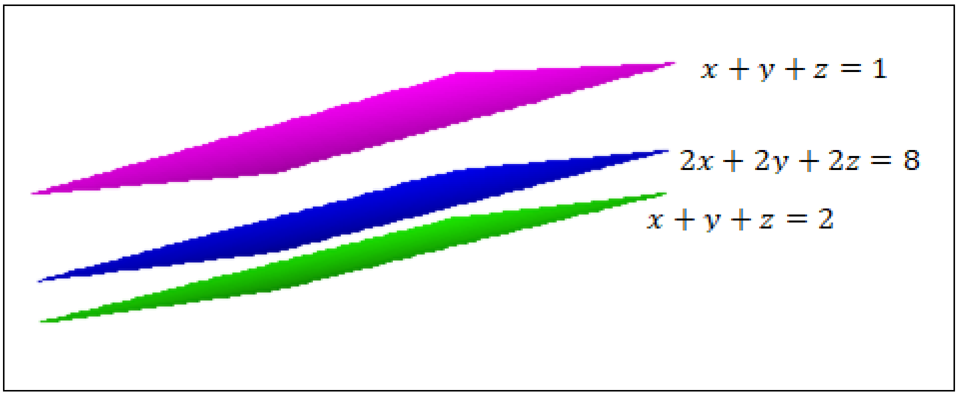
para entendermos esse sistema iremos calcular o determinante desse sistema no qual quando D ≠ 0 ↔S apresenta solução única, quando D = 0 ↔ S é indeterminado ou impossível, portanto vamos verificar essas afirmações.

$$D=\left|\begin{array}{ccc:cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = 0 \qquad D=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right| = 0$$

$$D=\left|\begin{array}{ccc:cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 2 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right| = 0 \qquad D=\left|\begin{array}{ccc:cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right| = 0$$

O determinante é todos iguais a zero caracterizando um sistema indeterminado (SPI), isso é o que muitos livros didáticos abordam de maneira erronia, pois com a ajuda do *software Winplot*, quando colocamos as equações obtemos três planos paralelos entre as, como mostra a figura abaixo.

Figura 03: Representação gráfica do sistema impossível (SI).



Fonte: Dados empírico da pesquisa (2018).

Quando o sistema é indeterminado (SPI), apresenta infinitas soluções, ou seja, tem varios pontos em comu, só que essas equações formam três planos no qual não tem nenhum ponto em comum, caracterizando um sistema impossível (SI) e, não um sistema indeterminado (SPI).

METODOLOGIA:

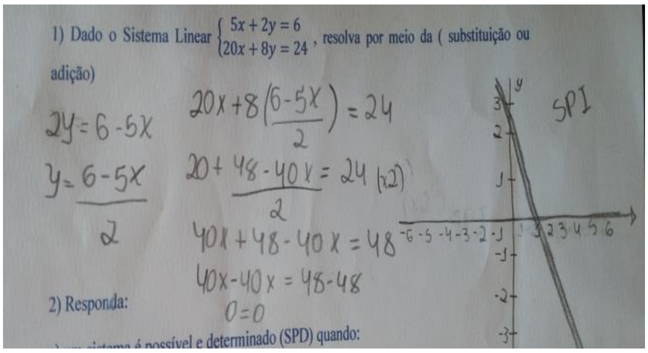
A pesqisa é de carater qualitativa e quantitativa de cunho descritva com o intuito de mostrar a importancia de se compreender as mudançãs de registros e correlacioná-los. Para Mesquita e Matos (2014), a pesquisa qualitativa vem trabalhar com um campo amplo de significados, causa, anseios e importância e atitudes, que nos permite entender essas mudanças, a pesquisa foi realizada com 15 estudandes da 2º série do Ensino Médio, foi aplicadao um questionário pré-teste aos estudantes para conhecer o que eles conheciam sobre sistema lineares, e em seguida foi aplicado uma sequencia didática aos estudantes.

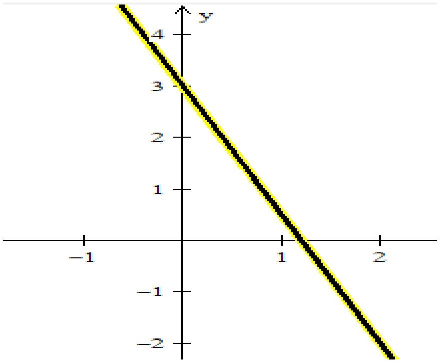
No entanto, primeiramente foi apresentado uma sequência didática aos alunos da segunda série do Ensino Médio de uma escola pública de Santo Antônio dos Milagres – PI, onde foi dividida em 5 (cinco) aulas, sendo que a 1 (primeira) aula apresentaremos *o software winplot* e suas ferramentas, na 2 (segunda) aula mostramos os sistemas lineares de ordem 2 x 2 e 3 x 3, já na 3(teceira) aula os estudantes receberão uma lista de questões de sistema para responderem e análisarmos, a 4 (quarta) aula resolveremos questões com o auxílio do *winplot*, e na 5(quinta) aula foi aplicado uma nova lista para verificar se com a ajuda do *software* houve um melhor rendimento.

ANALISE DOS RESULTADOS:

Com base nas demobstrações e resolução de algumas questões envolvendo sistema lineares de ordem 2x2 e 3x3, os estudantes comessaram a entender como resolver situações envolvendo sistemas. No entanto, pode-se observar que eles escolheram a maneira mais fácil para resolver um sistema de ordem 2x2, como mostra a seguir:

Figura 04: Resolução de um sistema de ordem 2x2, e sua representação gráfica.





A **B**

Fonte: Dados da pesquisa 2018.

Percebe-se que os estudantes ao se depararem com sistema de ordem 2x2 preferem resolve usando sistema de equação como mostra a figua A que facilita a compreenção deles e com a ajuda do *softwere winplot* figura B os estudantes conseguiram classificar o sistema como (SPI), pois encontraram os valores pra x = 0 e y = 0 e o termo independente também é zero. Nesse sentido, os registros de representação semiótica é importante no sentido de representar um determinado registo em outro, podemos observar nessa questão a presença da mudança da liga algébrica para a gráfica dando um significado no ensino de sistema. Desse modo, todo problema matemático assosia -se aum tipo de representação que proporciona uma visão mais apurada dos conceitos matematicos (PIRIS,2014).

Tabala 01. Qual a importância em utilizar o *software winplot* no estudo de sistema linear

ALUNO (AS)	**AFIRMAÇÕES**
Aluno (a) 01	“Com o uso do programa consegui entender a classificação do sistema linear em (SPD), (SPI) e (SI).”
Aluno (a) 02	“É importante, pois não sabia que o sistema linear podia ser representados em gráfico.”
Aluno (a) 03	“Me ajudou bastante a compreender a representação gráfica de um sistema.”

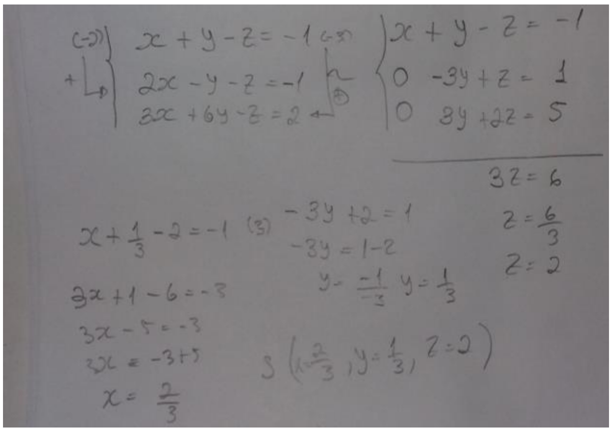
Fonte: Dados empíricos da pesquisa (2018).

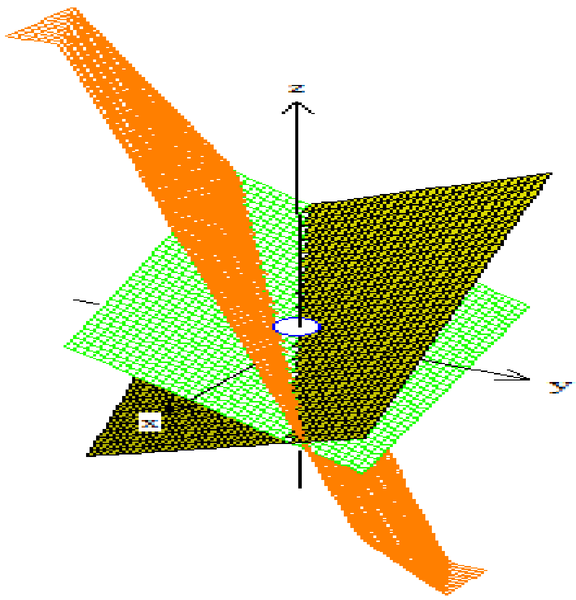
Nesse sentido, fica evidente que o uso dos softwares tem um papel muito significativo na aprendizagem dos estudantis, pois proporcionam a eles enxergar as transformações que ocorrem na mudança de registros da linguagem algébrica para a gráfica. Moraes e Cunha (2001, p. 190) afirmam que: “A inserção das tecnologias vai, aos poucos, agrupando ao dia-a-dia em sala de aula e por essa razão devem ser abordadas, verificadas e estudadas nos cursos de Licenciatura em Matemática. Tal aprendizado ajuda professores e alunos a se sentirem mais preparados e motivados para o seu uso, o que consentirá aos futuros licenciados, uma melhor preparação para suas atividades no ensino fundamental e médio.”

No sistema abaixo usando o método de escalonamento classifique em (SPD, SPI ou SI).

Figura 05: No sistema de ordem 3x3 abaixo resolva usando escalonamento e construa a sua representação gráfica.

$$S_1: \begin{cases} 2X - Y - Z = -1 \\ X + Y - Z = -1 \\ -3X + 6Y - Z = 2 \end{cases}$$



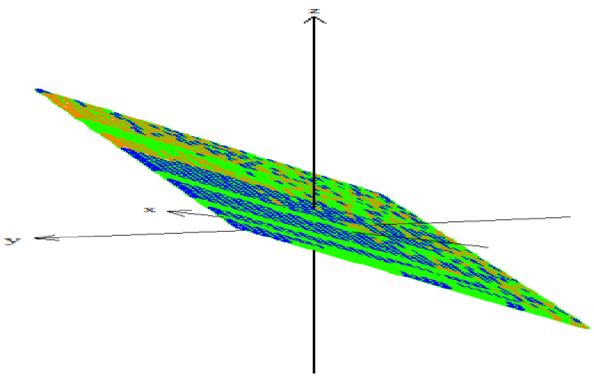


Dos 15 participaram da pesquisa, somente 67% dos estudantes conseguiram resolver o sistema construíram o gráfico e classificaram corretamente como sistema possível e determinado (SPD), os outros 33% dos estudantes conseguiram apenas construir o gráfico com a ajuda do *software winplot*. Nesse sentido, podemos perceber que alguns estudantes apresentaram dificuldade ao resolver sistema de ordem 3x3. No entanto, os recursos computacionais se mostram como um forte aliado para aprendizagem no sentido que os estudantes conseguiram perceber as mudanças de registros nas quais estão ocorrendo.

Para Aguirre (2014), o uso dos procedimentos informatizados, mais especificamente, o uso de *software Geogebra* e *Winplot*, é adequado para o aproveitamento de atividades envolvendo Sistemas Lineares 2x2 e 3x3. Aguirre (2014) e Ferreira (2013) concluem que estes softwares possibilitam abordar com mais de uma representação do mesmo objeto matemático em que, por meio da forma algébrica e gráfica, permitir a troca de elementos e a exploração.

Figura 06: Na questão a seguir foi proposto a os estudantes a construção apenas o gráfico do sistema abaixo:

O registro gráfico corresponde a três planos nos quais coincidem no mesmo espaço, ou seja, tem vários pontos em comum caracterizando como sistema possível e indeterminado (SPI).

$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x + y - z = -2 \\ x + y - z = -3 \end{cases}$	

Fonte: Dados empíricos da Pesquisa (2010)

Com esse cenário fica evidente a importância de se usar as tecnologias no ensino de Matemática, pois nos proporcionam uma visão mais apurada das mudanças de registro, ou seja, da linguagem algébrica para a gráfica dando um novo conceito aprendizagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS:

A proposta desse trabalho foi mostrar como os registros de representação semiótica se tornam importante na aprendizagem matemática, pois muitos estudantes têm dificuldades de classificar um sistema, más com ajuda do *software winplot*, fico evidente que os mesmos tiveram aproveitamento de forma significativa no que diz respeito à resolução de sistemas seja pelo método da substituição ou pelo escalonamento.

Com a análise dos dados obtidos durantes as atividades desenvolvidas, podemos concluir que houve um desenvolvimento por parte dos estudantes, pois essa proposta segundo os mesmos foi de grande ajuda para sua evolução no processo de ensino aprendizagem de sistema. Manifestou-se uma possível evolução no que se refere à existência ou não de solução em Sistemas Lineares 2x2 e 3x3, utilizando as mudanças de tratamento do registro de representação gráfico do objeto matemático.

A conversão é uma importante ferramenta que auxiliam os estudantes a compreender melhor os acontecimentos envolvendo os objetos matemática, com sistema linear não é diferente, pois ao relacionar a resolução com sua representação gráfica conseguimos classificar com maior clareza, todos os estudantes conseguiram resolver os sistema de ordem 2x2 e representar graficamente, já com sistema de ordem 3x3 somente 67% dos estudantes conseguiram efetuar a resolução e a representação gráfica corretamente e 33% apenas a representação gráfica. Com tudo, fica claro que as tecnologias são fortes ferramentas que auxiliam tanto o professor como alunos no processo de ensino aprendizagem em Matemática.

REFERÊNCIAS:

A. Arcavi. “O papel das representações visuais no ensino e aprendizagem da matemática” **Estudos Educacionais em Matemática.** (2003, p. 215-241)

BATTAGLIOLI, C.S.M. Tese de Mestrado Profissional: Sistemas Lineares na segunda série do Ensino Médio: **Um olhar sobre os livros didáticos** – PUCSP: (2008, p.114)

DUVAL, R. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática.** *In*: MACHADO, S.D.A.(org.) Aprendizagem em Matemática, Registros de Representações Semióticas. Campinas: Papirus. (Coleção Papirus Educação) p.11 – 33, 2003.

__________. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. **A. Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação Semiótica. Campinas: Editora Papirus, 2008, p.11-34.

__________. **Semiósise pensamento humano:** Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. MORETTI, M. T. **Revemat: Rev. Eletr. De Edu. Mat** e ISSN 1981 - 1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266 - 297, 2012.

MACHADO, S.D.A., **O Universitário principiante x Significado dos Sistemasde Equações** *in* Anais do IV EPEM – PP. 241 – 248. São Paulo: SBEM, 1996. SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação.

MESQUITA, S. M. R.; VIERA, A. T. **O papel da avaliação na argumentação em situações de conflitos.** 2014.

PIRES, R. F. **Função**: Concepções de professores e estudantes dos ensinos Médio e Superior. 2013. 439 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014