Cálculo Diferencial e Integral: Uma Introdução ao Ensino Médio

Luan Diego de Lima Pereira; Aline Menezes Rodrigues; Wilquer de Lima Pereira; Fabiany Corrêa Basoni; Renan Corrêa Basoni.

Instituto Federal do Espírito Santo, luamdiego@hotmail.com
Centro Universitário Internacional, aline_menezesrodrigues@hotmail.com
Instituto Federal da Bahia, wilquerlimap@hotmail.com
Universidade Federal do Espírito Santo, fbasoni@gmail.com
Instituto Federal do Ceará, renanbazoni@hotmail.com

Resumo: Este trabalho tem como objetivo descrever o projeto de complementação ao Ensino "*Cálculo Diferencial e Integral: Uma Introdução ao Ensino médio*", cujo público alvo foi alunos do Ensino médio integrado ao curso técnico de Automação Industrial de um Instituto Federal O ensino e aprendizagem de matemática e física é foco de diversos estudos, devido à dificuldade apresentada por muitos estudantes em compreender conceitos básicos das disciplinas em questão. Neste contexto, o projeto buscou introduzir noções de limites, derivadas e integrais e suas principais aplicações como o problema da reta tangente, o problema da velocidade instantânea e o problema da área. A metodologia utilizada envolveu a revisão e introdução de conteúdos matemáticos necessários para aplicar as noções de cálculo, seguidos das noções de limite, derivada, integral e suas aplicações. O projeto teve uma carga horária de 80 horas, distribuídas em 40 semanas. Espera-se que, ao final do projeto, os alunos consigam compreender melhor o comportamento de fenômenos matemáticos e físicos, tanto no ensino médio, como nas disciplinas do curso técnico e, consequentemente, melhorar o seu rendimento acadêmico. Destarte, com o conhecimento introdutório do cálculo diferencial e integral, deixará melhor preparados para o ensino superior, para aqueles que ingressarem em cursos de exatas.

Palavras-chave: Matemática, Automação Industrial, Cálculo Diferencial e Integral, Projeto de Ensino.

1 INTRODUÇÃO

O ensino e aprendizagem de matemática em todos os níveis escolares, desde o ensino fundamental até o ensino superior, é foco de diversos estudos. Os alunos enfrentam dificuldades em conceitos básicos da matemática, desde operações fundamentais até conteúdos mais elaborados. As dificuldades carregadas ao longo das séries letivas, limitam o aprendizado sequencial, deixando-os ainda mais inseguros e desacreditados com a disciplina.

A dificuldade e a falta de interesse com a disciplina, faz com que os alunos saiam do ensino médio e ingressem no ensino superior com uma base precária da matemática básica, levando a reprovações e até mesmo evasão, principalmente em cursos de natureza exata. É preciso, portanto, desmitificar a “demonização” da disciplina e trata-la como algo simples e necessário.

Para isso, é necessário utilizar ferramentas que facilitem o entendimento de conceitos e fenômenos da disciplina, de forma a aguçar a curiosidade do aluno e tratar com mais naturalidade os seus conteúdos, organizando-os de forma sequencial e lógica. Uma ferramenta que já fez parte do currículo do ensino médio há algumas décadas é o cálculo diferencial e integral.

O cálculo diferencial e integral é considerado como um dos conteúdos matemáticos mais influentes no desenvolvimento científico e tecnológico, abordado nos cursos superiores de natureza exata. Com ele é possível compreender mais facilmente o comportamento de diversas funções matemáticas e fenômenos físicos que, da forma como são ministrados no atual currículo do ensino médio, acabam sendo apenas memorizados ao invés de aprendidos.

Mas como inserir um conteúdo complexo como o cálculo para alunos de ensino médio? A resposta não é simples, e é fruto de estudo de diversos pesquisadores. Para ser compreensível para o aluno de nível médio, é preciso lançar mão da linguagem formal, simbólica, das demonstrações de teoremas e definições complexas, e adotar uma postura mais intuitiva, utilizando os problemas comuns já estudados, mas agora com os conceitos do cálculo. De acordo com Faria e Godoy (2012)

> Estreitar as relações entre as disciplinas do ciclo básico e profissionalizante, pode ser uma forma de motivar a apreensão dos conhecimentos, que muitas vezes podem parecer supérfluos e sem aplicações para seu desenvolvimento no curso e na carreira profissional (FARIA; GODOY, 2012, p.125).

Busse e Soares (2007) defendem o ensino de derivadas ainda no ensino médio, argumentando que

> A introdução da derivada deve ser acompanhada de várias de suas aplicações. Na Física, por exemplo, ela tem inúmeras utilidades na introdução de conceitos como pressão, densidade da massa, densidade de carga elétrica etc. Sendo assim, o Cálculo Diferencial e Integral é ferramenta necessária para a compreensão da Física e a falta desse tópico no Ensino Médio torna para o aluno a Física mais difícil do que realmente parece ser. Exemplo disso é o ensino da mecânica newtoniana, ensinado no Ensino Médio que nasceu junto com o Cálculo e fica incoerente sem ele. (BUSSE; SOARES, p. 2)

Além de facilitar o entendimento e resolução de diversos problemas da física e da matemática e, consequentemente melhorar o rendimento do aluno, a noção de cálculo ainda no ensino médio prepararia aqueles alunos que pretendem ingressar em cursos superiores da área de ciências exatas.

Embasado nessa discussão, o presente trabalho tem o objetivo de discutir e relatar a experiência em um projeto de ensino junto a um IF, no qual foi ofertado um curso introdutório do cálculo diferencial e integral para alunos do ensino médio.

2 METODOLOGIA

A pesquisa foi realizada através do estudo de caso de um projeto de ensino intitulado "*Cálculo Diferencial e Integral: Uma Introdução ao Ensino Médio*", realizado junto aos alunos do ensino médio integrado ao curso técnico de automação industrial. O estudo analisou o perfil dos alunos que participaram do curso e suas impressões acerca da experiência e do contato com o cálculo.

O curso foi iniciado com uma revisão dos conteúdos básicos da matemática e uma introdução de conteúdos que ainda não foram vistos pelos alunos, por se tratar de tópicos a serem estudados em séries futuras. Os principais tópicos estudados foram:

- Funções do 1º e 2º grau;
- Funções logarítmicas;
- Funções exponenciais;
- Funções racionais;
- Módulo;
- Polinômios.

O restante do curso seguiu a sequência adotada nos livros didáticos, iniciando com os fundamentos de limites, passando para o cálculo diferencial e finalizando com o cálculo integral. Após introduzir o conteúdo de forma intuitiva, tornando-os compreensíveis para alunos de nível médio, foram estudadas as propriedades, teoremas e aplicações de cada conteúdo. Buscou-se por aplicações em problemas normalmente estudados no ensino médio e no curso de automação.

As aulas foram expositivas, através da explanação dos conteúdos citados acima e, para cada tópico estudado, os alunos foram avaliados através de exercícios de fixação. Durante as explanações, os alunos tinham total autonomia para relatarem suas principais dificuldades e sugerirem tópicos de interesse, pertinentes ao curso.

No final do projeto, foi aplicado um questionário no qual os alunos foram questionados sobre suas motivações, sobre o impacto do curso em sua vida acadêmica, sua posição quanto ao tema discutido e suas sugestões e críticas sobre o projeto. A seguir têm-se os tópicos do questionário:

- Qual sua motivação para participar do projeto de ensino "Cálculo Diferencial e Integral: Uma Introdução no Ensino Médio"?
- O conteúdo do cálculo aprendido no curso ajudou você nas matérias de exatas do ensino médio? Caso positivo, explique de que forma.
- O conteúdo do cálculo aprendido no curso ajudou você nas matérias técnicas de automação? Caso positivo, explique de que forma.
- Na sua opinião, é possível incluir o ensino do cálculo na matemática do ensino médio?
- Defina, com suas palavras, o que você entendeu sobre o conceito de limite, derivada e integral.
- Recomendaria a reoferta deste projeto de complementação ao ensino?
- Caso deseje, escreva suas sugestões, críticas ou elogios sobre o curso.

O questionário teve como objetivo coletar resultados do ponto de vista dos próprios participantes. Para tanto, foi solicitado uma resposta completa, evitando respostas curtas como "sim", "não" e "talvez". Os alunos também ficaram cientes de que não se tratava de um questionário avaliativo e que seus nomes não seriam divulgados, dessa forma poderiam ser sinceros em suas considerações.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O projeto de ensino para estudar o cálculo integral e diferencial foi ofertado para alunos do ensino médio integrado ao curso técnico de automação industrial. Inicialmente foram ofertadas 20 vagas, porém somente 9 alunos iniciaram e terminaram o curso.

Inicialmente foram revisados (e introduzidos, para aqueles alunos que ainda não estudaram determinado conteúdo da matemática) conteúdos matemáticos e logo em seguida foi introduzido o conceito de limite. Dada a função f(x) da equação (1), foi solicitado aos alunos obterem o ponto *f(0)*.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} \tag{1}$$

Ao tentar resolver o que foi solicitado, os alunos obtiveram $\frac{0}{0}$, que simboliza uma indeterminação matemática, ou seja, não é possível determinar uma solução e nem afirmar a existência de uma solução. A partir de então foi introduzido a definição de limite, conforme a equação (2).

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{2}$$

Onde lê-se "O limite de *f(x)*, quando *x* tende à *a*, é igual a *L*".

Pode-se entender que, quanto mais o valor de x se aproxima de a, mais a função f(x) se aproxima de L. Para exemplificar, foi solicitado aos alunos que testassem valores próximos de 1, tanto pela esquerda (menores que 1) quanto pela direita (maiores que 1), para a função f(x) da equação (1) e desenhassem seu gráfico. Os resultados são mostrados nas Figura 3.1 e 3.2, respectivamente.

$x < 1$	$f(x)$
0,5	0,666667
0,9	0,526316
0,99	0,502513
0,999	0,500250
0,9999	0,500025

$x > 1$	$f(x)$
1,5	0,400000
1,1	0,476190
1,01	0,497512
1,001	0,499750
1,0001	0,499975

Figura 3.1. Limites laterais da função f(x).

Fonte: Stewart, 2013.

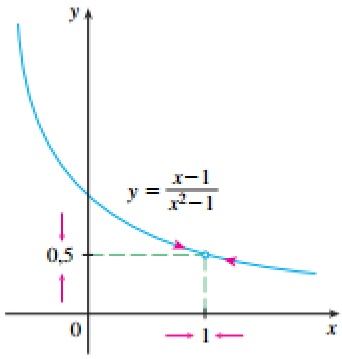

Figura 3.2. Gráfico da função f(x).

Fonte: Stewart, 2013.

Neste ponto, foi definido o limite de uma função conforme equação (3).

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, e somente se, (2)

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Isso quer dizer que, o limite de uma função f(x) é igual a L somente quando os seus limites laterais (tanto à esquerda de a, quando à direita de a) se aproximam de L.

Após introduzir a noção de limites, foram estudados seus principais tópicos:

- Propriedades de Limite;
- Continuidade;
- Proposições e Teoremas;
- Limites infinitos e Limites no infinito;
- Limites de funções trigonométricas;
- Limites fundamentais;
- Aplicações.

Uma aplicação de Limite é o problema da velocidade instantânea. Para analisarmos o problema vamos considerar o seguinte exemplo: Suponha que uma bola seja solta a partir do ponto de observação no alto da Torre CN, em Toronto, 450 m acima do solo. Encontre a velocidade da bola após 5 segundos.

A dificuldade em encontrar a velocidade instantânea do exemplo acima está no fato de possuirmos apenas um instante de tempo (5 segundos), ou seja, não há um intervalo de tempo. Porém, podemos obter a velocidade aproximada se calcularmos a velocidade média para o um breve intervalo de tempo, conforme Figura 3.3.

Intervalo de tempo	Velocidade média (m/s)
$5 \leq t \leq 6$	53,9
$5 \leq t \leq 5{,}1$	49,49
$5 \leq t \leq 5{,}05$	49,245
$5 \leq t \leq 5{,}01$	49,049
$5 \leq t \leq 5{,}001$	49,0049

Figura 3.3. Velocidade média para um intervalo de tempo que se aproxima de 5 segundos.

Fonte: Stewart, 2013.

Portanto, a velocidade instantânea pode ser determinada através do limite da velocidade média, com intervalos de tempo cada vez menores, começando de 5 segundos.

Uma outra aplicação do teorema de Limites é o problema da reta tangente. A reta tangente é uma reta que toca a curva em um único ponto e tem a mesma direção da curva. Para determina esta reta de forma precisa, é preciso recorrer ao conceito de Limite. Para exemplificar, vamos determinar a reta tangente à parábola $y(x) = x^2$.

Para determinar a reta tangente à parábola no ponto P, é necessário determinar a sua inclinação e para isso será preciso conhecer dois pontos. Adotaremos os pontos P e Q e determinaremos a inclinação da reta secante (reta que intersecta a curva mais de uma vez). Com a Figura 3.4, observamos que, à medida que Q se aproxima de P, as retas secantes giram em torno de P, se aproximando da reta tangente.

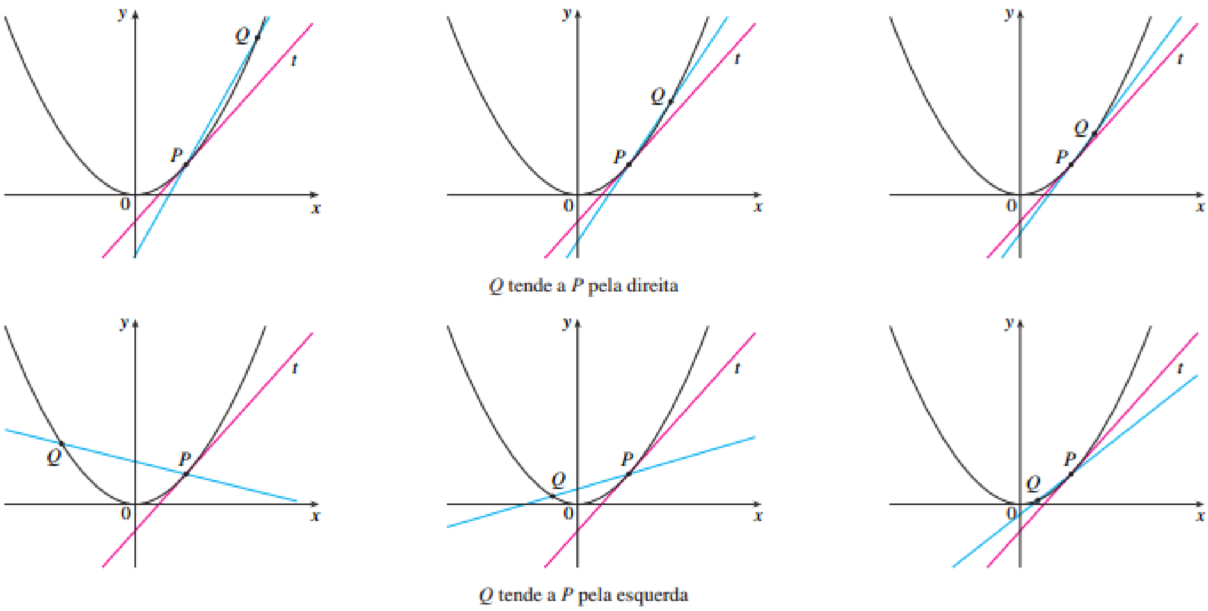

Figura 3.4. Limites laterais da reta tangente à f(x).

Fonte: Stewart, 2013.

O Limite para determinar a reta tangente e a velocidade de um objeto é um tipo de limite especial, que é chamado de derivada. Portanto, a derivada é na verdade a inclinação m da reta tangente e pode ser definida conforme a equação (3).

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (3)$$

Pode-se afirmar que, a reta tangente a $y = f(x)$ em $(a, f(a))$ é a reta que passa em $(a, f(a))$,cuja inclinação é igual a $f^{'}(a)$, a derivada de *f* em *a*.

Derivada também pode ser entendida como a taxa de variação. Suponha que $y = f(x)$ é uma quantidade que depende da quantidade x. Se x variar de x_1 a x_2, então y irá variar de $f(x_1)$ a $f(x_2)$. Então, o quociente da variação será de acordo com a equação (4).

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (4)$$

Após introduzir a noção de derivadas, foram estudados seus principais tópicos:

- Propriedades de Derivadas;
- Derivada da função potência;
- Derivada da função exponencial;
- Derivada de um produto de funções;
- Derivada de um quociente de funções;
- Derivada da função composta (Regra da cadeia);
- Derivada de funções trigonométricas;
- Derivação implícita;
- Derivação logarítmica;
- Aplicação de taxas de variações nas ciências naturais.

O cálculo diferencial como taxa de variação é amplamente aplicado nas ciências e engenharias. Um exemplo clássico é aplicação na física, com o movimento uniforme e uniformemente variado. Seja $s = f(t)$ a função de uma partícula que está se movendo em uma reta, então $\Delta s / \Delta t$ representa a velocidade média ao longo de um período de tempo Δt, e $v = ds / dt$ representa a velocidade instantânea. A taxa instantânea da velocidade em relação ao tempo é a aceleração, ou seja, para obter a aceleração basta derivar a velocidade uma vez ou derivar a posição duas vezes, conforme equação (5).

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (5)$$

Após estudar o cálculo diferencial, foi introduzido a definição de primitiva, antecipando o estudo do cálculo integral. Por definição, uma função F é uma primitiva de f se a derivada $F^{'}(x) = f(x)$, ou seja, a primitiva é a função que antecede a derivação.

Logo em seguida, foi explicado que a primitiva na verdade é a integral de uma função, ou seja, o inverso da derivada que é a antiderivada. O cálculo integral veio para solucionar o problema da área. A área, que conhecemos até então, é restrita para regiões retas, facilmente determinada através de equações matemáticas pré-definidas, como o quadrado, o retângulo e o losango.

No entanto, quando se trata de regiões curvas, como obter a área abaixo de uma curva qualquer (uma parábola, por exemplo), o processo é mais complicado. No exemplo das Figuras 3.5 e 3.6, para determinar a área abaixo da curva é preciso dividi-la em vários retângulos iguais, para se ter uma área conhecida (base x altura). A base de cada retângulo será $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e a altura será $f(x_i)$, onde n é o número total de subdivisões e i é posição do i-ésimo retângulo.

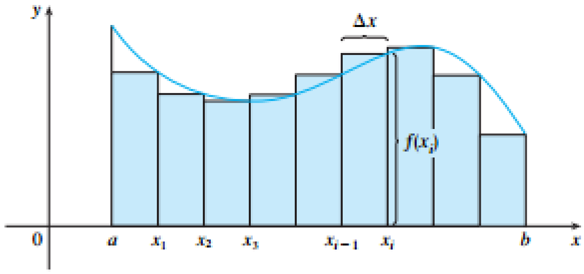

Figura 3.5. Área abaixo da curva de f(x).

Fonte: Stewart, 2013.

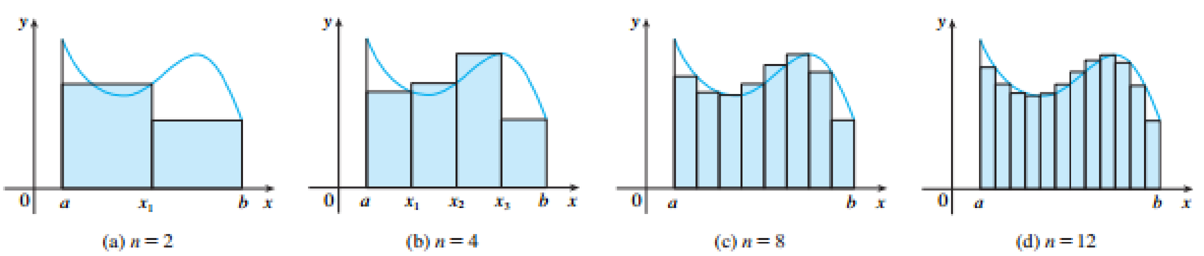

Figura 3.5. Diferentes subdivisões da curva de f(x).

Fonte: Stewart, 2013.

Percebe-se, que cada vez que aumentamos o número de subdivisões, isto é, quando n tende a infinito, a aproximação da área da curva fica melhor. Portanto, a área A pode ser definida conforme equação (6).

$$A = \lim_{n\to\infty}[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x] \quad (6)$$

A equação (6) é, na verdade, a integral da função f definida no intervalo [a, b] e é definida conforme equação (7).

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \quad (7,)$$

Após introduzir a noção de integral, foram estudados seus principais tópicos:

- Propriedades de Integração;
- Teorema fundamental do cálculo;
- Integrais definidas e indefinidas;
- Regra da substituição;
- Integração por partes;
- Integrais trigonométricas;
- Integração de funções racionais por frações parciais;
- Aplicações.

Na etapa final do curso os alunos responderam um questionário de opinião sobre sua participação no curso. Quanto à motivação para participação do curso, a maioria respondeu que seria para facilitar o entendimento da física e matemática e para um futuro curso superior.

Grande parte dos alunos relataram um maior entendimento de equacionamentos matemáticos e fenômenos físicos. Quanto às disciplinas técnicas, os alunos do 3º ano letivo conseguiram visualizar uma maior aplicação, em decorrência do número maior de disciplinas cursadas. A seguir temos o relato sobre as disciplinas técnicas de um aluno participante do curso:

- *"Ajudou no entendimento do funcionamento de sensores e suas curvas, ao usar a aproximação de uma curva em uma reta, para facilitar a leitura dos sensores. A compreender* *o PWM (Pulse Width Modulation), os inversores de frequência, o funcionamento de um multímetro, entre outros...''*

A maioria dos alunos acham que o ensino do cálculo deve ser inserido no ensino médio, desde que, seja ofertado de forma facultativa. Quanto à reoferta do curso, 100% dos participantes recomendam uma nova oferta no próximo ano letivo.

4 CONCLUSÕES

A presente pesquisa teve como foco analisar um estudo de caso de um projeto de complementação ao ensino em um IF. O projeto foi analisado tendo como perspectiva o ensino do cálculo diferencial e integral no ensino médio, de forma intuitiva, com o objetivo de facilitar a compreensão de equacionamentos matemáticos, comportamentos de funções, fenômenos físicos e nas disciplinas técnicas do curso profissionalizante.

Pode-se observar no decorrer do curso que, os alunos do ensino médio têm capacidade de compreender o conteúdo do cálculo, bastando apenas ministrar de forma clara e objetiva, selecionando os conceitos mais importantes para os conteúdos de nível médio. O que se deve, a princípio é buscar uma forma de introduzir este conteúdo de forma facultativa ou em complemento de outros tópicos de disciplinas como a matemática e a físcia. Tal fato, pode ser possível com a reforma do ensino médio, na qual o aluno passará a ter algumas disciplinas optativas e que terão autonomia para se inscreverem na que mais lhe interessar. Porém, este é um tópico para futuras pesquisas.

REFERÊNCIAS

BUSSE, R. S.; SOARES, F. S. O Cálculo Diferencial e Integral e o Ensino Médio. Anais... IX Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte, 2007. Disponível em http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Poster/Trabalhos/PO02944174789T.doc. Acesso em 24 de ago. de 2018.

FARIA, W. C.; GODOY L. F. S. O Cálculo Diferencial e Integral e suas Aplicações no Ensino da Engenharia: Uma Análise de Currículo. Anais...Congresso de Iniciação Científica do INATEL-INCITEL 2012. Santa Rita do Sapucaí, 2012. Disponível em http://www.inatel.br/incitel/index.php?option=com_content&view=article&id=118&Itemid=100302. Acesso em 24 de ago. 2018.

STEWART, James. Cálculo. 7.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.