NÚMEROS TRANSREAIS E LÓGICA EM DISCIPLINA OPTATIVA NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Autor: Caio Julio de Almeida

Instituto Federal do Rio de Janeiro, campus Volta Redonda, caio.julio.de.almeida@gmail.com

Orientador: Tiago Soares dos Reis

Instituto Federal do Rio de Janeiro, campus Volta Redonda, tiago.reis@ifrj.edu.br

INTRODUÇÃO

Em geral, na Matemática a divisão por zero não é permitida. Ocorre que na maioria dos casos usamos o conjunto dos números reais e a divisão por zero não está definida nesse conjunto. Seja um número real arbitrário denotado como r. Para que fosse possível fazer a operação $r/0 = k$ sendo k um número real, seria necessário existir algum número k tal que $k \times 0 = r$ o que é um absurdo, pois $k \times 0 = 0$ qualquer que seja k real. Para que seja permitida e utilizada a divisão de números reais por zero foi criado um novo conjunto numérico chamado de conjunto dos números transreais em que a divisão por zero está definida.

O conjunto dos números transreais foi proposto por James Anderson (professor e pesquisador em ciência da computação). O motivo foi poder realizar a divisão por zero e com esse recurso resolver problemas dentro da computação. Segundo ele o conjunto dos números transreais pode ser usado para evitar exceções que ocorrem pela divisão por zero. A vantagem disso é que se os programadores não precisam tratar essas exceções, os programas se tornam mais curtos e mais simples. Como consequência ocorre uma economia do tempo dos programadores ao desenvolver os programas. Além disso, programas mais curtos e mais simples são executados mais rápido pelos computadores aumentando a velocidade de funcionamento dos processadores. Como o tempo de operação dos processadores é reduzido o consumo de energia também diminui (ANDERSON, 2005).

A Matemática que é feita a partir dos números transreais é chamada de Transmatemática. A primeira vez que James Anderson falou sobre a divisão por zero foi considerando a geometria projetiva. Em 2006 ele propõe o conjunto dos números transracionais formado pelos números racionais e pelos novos elementos que surgem da divisão de números racionais por zero. Em seguida ele apresenta o conjunto dos números transreais e estende algumas funções para que possam ser usadas com os números transreais. Ele também propôs uma topologia para o espaço de números transreais em 2008. Depois disso, Anderson e Gomide (2014) propõem uma aritmetização de uma lógica paraconsistente utilizando os números transreais. Além disso, Reis e Anderson (2015b) estabeleceram os conceitos de limite, continuidade no espaço transreal. Reis e Anderson (2015a) estabeleceram a derivada e a integral no espaço transreal, além de formarem o conjunto dos números transcomplexos construído a partir dos números complexos (2014). A proposição dos números transreais feita por James Anderson é baseada em axiomas. Uma segunda construção dos números transreais baseada no conjunto dos números reais foi proposta por Reis (2015).

O presente texto faz uma reflexão sobre os potenciais educativos que uma disciplina sobre a Transmatemática pode trazer a estudantes de licenciatura em Matemática. No primeiro semestre letivo de 2018 o presente autor cursou a disciplina optativa “Transmatemática e Filosofia”. Os principais conteúdos das aulas foram: os números transreais, a semântica total e espaço dos mundos possíveis. Este texto fala um pouco sobre o conteúdo em Transmatemática coberto pelos professores durante as aulas e fala também sobre os assuntos dos trabalhos exigidos pelos professores durante a disciplina. Na parte de discussão são feitos comentários sobre os ganhos em ter essa disciplina em um curso de licenciatura em Matemática.

NÚMEROS TRANSREAIS, SEMÂNTICA TOTAL E ESPAÇO DOS MUNDOS POSSÍVEIS

A proposta da disciplina optativa de Transmatemática e Filosofia oferecida no primeiro semestre de 2018 foi estudar alguns tópicos da Transmatemática associados ao campo da lógica. Durante as aulas os assuntos eram apresentados pelos professores e discutidos. Algumas demonstrações eram feitas pelos professores em momentos adequados e trabalhos para casa foram passados sobre alguns dos assuntos vistos em aula.

Os assuntos principais da disciplina foram os números transreais, a semântica total e o espaço dos mundos possíveis. A semântica total é uma forma de reunir lógicas diferentes. Os elementos desse sistema representam as lógicas clássicas, paraconsistentes, *fuzzy* e o *gap*. Dentro da semântica total existem elementos que correspondem ao verdadeiro e ao falso clássicos. Existe também um elemento que corresponde ao valor de contradição das lógicas paraconsistentes. Além desses existem elementos que correspondem a graus de veracidade entre o verdadeiro absoluto e o falso absoluto presentes na lógica *fuzzy.* O *gap* é um valor presente na semântica total para indicar indeterminação não representando nem falso nem verdadeiro (REIS, 2015).

As lógicas clássicas possuem apenas dois valores de verdade que são o verdadeiro e o falso. Uma proposição só pode ser verdadeira ou falsa, não pode ter outro valor, e também não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo, é possível apenas um desses valores por vez. As paraconsistentes são lógicas que permitem que uma proposição possa ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Para representar as lógicas paraconsistentes foi escolhida a lógica de Priest por ser a mais simples. Ela possui além do falso e do verdadeiro um valor de contradição. As lógicas *fuzzy* possuem um intervalo de valores de verdade, normalmente representados pelo intervalo que vai de zero até um sendo zero correspondente ao falso absoluto, um correspondente ao verdadeiro absoluto e os valores entre zero e um correspondem aos valores de verdade intermediários como graus de veracidade (REIS, 2015).

O conjunto dos números transreais é formado pelos números reais e por mais três outros elementos. Esses elementos são o menos infinito, denotado como $-\infty$, o infinito, denotado como $+\infty$, e o *nullity*, denotado como Φ. James Anderson postulou que $-1/0=-\infty$, $+1/0=+\infty$ e $0/0=\Phi$. Ele propõe o uso das regras de operações entre frações nas operações envolvendo esses elementos. Dessa forma números como $+2/0$ e $+3/0$ são considerados frações equivalentes a $+1/0$, ou seja, representam o mesmo número. Isso ocorre porque se considerarmos $+1/0$ como uma fração e aplicarmos a operação $+1/0\times+2/+2$ seguindo as regras de operações entre frações usuais obtemos como resultado $+2/0$. Assim como ocorre com o número dois, o raciocínio vale para qualquer número real positivo, ou seja, todo número real positivo dividido por zero forma uma fração equivalente a $+1/0$. Qualquer número real negativo dividido por zero forma uma fração equivalente a $-1/0$. Usando a aritmética transreal é possível dividir qualquer número real por zero acrescentando apenas esses três novos elementos ao conjunto dos números reais. Os números transreais podem ser representados por uma figura que estende a reta numérica que representa os números reais. No centro fica o zero.
Pela direita estão os números positivos. Eles avançam

em direção ao infinito. Quanto mais distantes do zero maiores são os números. No caso dos transreais o infinito também é considerado um número. Ele fica na mesma direção da reta, à direita de todos os números reais. Pela esquerda estão os números negativos. Eles avançam em direção ao menos infinito que fica à esquerda da reta. O *nullity* é um número não ordenado. Ele é representado como um ponto isolado, fora da direção da reta.

Para construção da semântica total foi utilizada essa própria estrutura dos números transreais. O menos infinito é usado para representar o falso clássico. O infinito representa o verdadeiro clássico. O zero representa o valor de contradição, possui valor de verdadeiro e falso ao mesmo tempo estando no centro, isto é, a distância do zero para o infinito é a mesma que para o menos infinito. O *nullity* representa o *gap*, não tem valor nem verdadeiro nem falso, não fazendo parte da direção da reta. É um ponto isolado. Os números entre infinito e menos infinito representam valores de verdade intermediários entre verdadeiro e falso, assim como ocorre na lógica *fuzzy* com os valores entre um e zero.

O conceito de mundo possível faz parte da área da lógica. Para Leibniz, Deus tem em mente todos os mundos que poderiam ser criados e escolhe um para ser o mundo real. Para ele existem diferenças entre os mundos possíveis de modo que uma proposição verdadeira em um mundo possível poderia ser falsa em outro, ou seja, se descrevermos o mundo através de proposições cada possibilidade diferente para os valores dessas proposições equivale a um mundo possível. A abordagem de Leibniz oferece explicações metafísicas para o conceito de mundos possíveis (REIS, 2015).

O espaço lógico dos mundos possíveis baseado nos números transreais foi inspirado nessa abordagem de Leibniz e é uma forma matemática de expressar o conceito. Esse espaço é parecido com um espaço vetorial, mas sem todas as propriedades que caracterizam um espaço vetorial. Cada dimensão desse espaço é uma reta transreal e as coordenadas de cada ponto no espaço são números transreais que representam o valor semântico de uma proposição de acordo com a semântica total. O espaço possui uma quantidade infinita de eixos sendo um eixo para cada proposição que pode ser enunciada. Os pontos nesse espaço são chamados mundos possíveis porque representam configurações diferentes para as proposições.

DISCUSSÃO

Uma vantagem da disciplina optativa de Transmatemática num curso de licenciatura em Matemática é que os alunos podem ter um contato maior com o campo da lógica podendo conhecer temas como lógicas não clássicas, semântica total, mundos possíveis, sem ficar restritos apenas a tabelas verdade e regras de inferência da lógica clássica.

Outra vantagem é que os alunos podem estudar um conjunto numérico que surgiu na época em que estamos além de outras estruturas matemáticas que são feitas com uso desse conjunto. Isso evidencia que a Matemática não está pronta e acabada, mas que continua a ser construída, algo importantíssimo para a formação de um professor de Matemática que deve mostrar esse ponto de vista aos alunos tanto para que eles percebam que a Matemática não é uma atividade já terminada, algo ainda em desenvolvimento, quanto pelo fato de que os alunos podem se motivar ao estudar algo que é novo, da época deles, ainda em construção.

Estudar os números transreais é algo que pode contribuir para que os alunos entendam melhor o conjunto dos números reais e o conceito de divisão porque para entender o motivo da criação desse novo conjunto numérico é preciso discutir o motivo pelo qual a divisão por zero não está definida no conjunto dos números reais. Esse tema não é sempre abordado nas aulas de Matemática e discutir isso pode evitar que os alunos considerem vago, sem explicação ou ainda que é uma regra arbitrária.

O fato da divisão por zero não estar definida no conjunto dos números reais possui consequências dentro da Matemática. Esse fato explica porque não podemos calcular $f(0)$ no caso da função $f(x) = 1/x$ ou $g(1)$ no caso da função $g(x) = \frac{x-1}{x-1}$. Estudar os números transreais pode ajudar os alunos em relação a perceber e entender as restrições que são causadas pela falta da definição da divisão por zero considerando o conjunto dos números reais.

Os pontos destacados acima contribuem para a permanência da disciplina de Transmatemática e Filosofia no curso. Os professores ofereceram novamente a disciplina no segundo semestre de 2018. A proposta nesse segundo momento é fazer uma revisão do que foi estudado no primeiro semestre de 2018 e continuar a discussão sobre os tópicos em Transmatemática do ponto em que encerraram no semestre anterior. Além disso eles pretendem estudar junto com os alunos temas que ainda não foram investigados dentro da Trasmatemática e da lógica.

CONCLUSÃO

A disciplina optativa de Transmatemática e Filosofia possui pontos positivos que influenciam a formação do estudante na graduação tanto do ponto de vista técnico Matemático ao formar um espaço para estudo de temas que normalmente não são vistos em um curso de licenciatura e também serve para que os futuros professores de Matemática da Educação Básica possam ter mais uma ferramenta para motivar os alunos e mostrar que a Matemática não é apenas um conjunto de regras arbitrárias mas é uma construção da qual as pessoas fazem parte e que está ainda em desenvolvimento.

REFERÊNCIAS

ANDERSON, J. A. D. W. Perspexmachine II: Visualisation. Vision Geometry XIII Proceedingsofthe SPIE, v. 5675, p. 100-111, 2005.

ANDERSON, J. A. D. W. Perspexmachine VII: The universal Perspex machine. Vision GeometryXIVProceedingsofthe SPIE, v. 6066, p. 1-17, 2006.

ANDERSON, J. A. D. W. Perspexmachine XI: Topologyofthetransrealnumbers. In:INTERNATIONAL MULTICONFERENCE OF ENGINEERS AND COMPUTERSCIENTISTS,2008. Hong Kong.Anais...InternationalAssociationofEngineers, 2008. p. 330-338.

ANDERSON, J. A. D. W.; GOMIDE, W. Transrealarithmetic as a consistentbasisforparaconsistentelogics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCE ANDAPPLICATIONS, 2014. San Francisco. Anais...InternationalAssociationofEngineers, 2014. p.103-108.

REIS, T. S. Transmatemática. Rio de Janeiro, 2015. 125 p. Tese (Doutorado,Programa de Pós Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015. [Orientador: Ricardo SilvaKubrusly,Coorientador:Walter Gomide do Nascimento Junior].

REIS, T. S. dos; ANDERSON, J. A. D. W. Constructionofthetranscomplexonumbersfromthecomplexnumbers. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCE ANDAPPLICATIONS, 2014. San Francisco. Anais...InternationalAssociationofEngineers, 2014. p.97-102.

REIS, T. S. dos; ANDERSON, J. A. D. W. Transreal Calculus.IAENG International Journal of Applied Mathematics, v. 45, n. 1, p. 51-63, 2015a.

REIS, T. S. dos; ANDERSON, J. A. D. W. Transreal Limits and Elementary Functions.In: HaengKon Kim; Mahyar A. Amouzegar; Sio-long Ao.(Org.).Transactions on Engineering Technologies, World Congress on Engineering and Computer Science 2014.London: Springer, 2015b, p. 209-225.